ISBN 978-85-89082-23-5

Diagrama de Allan Marquand no cálculo proposicional[1]

Allan Marquand's Diagram in Propositional Calculus

Vera Jussara Lourenzi Mühl[2]*

Betine Diehl Setti[3]*

Rosana Maria Luvezute Kripka[4]*

Resumo

Neste artigo, são apresentados resultados decorrentes da exploração do uso do diagrama de Allan Marquand no cálculo proposicional. São descritas a construção e a forma de uso do referido diagrama. Em seguida, apresenta-se a correspondência entre valores de verdade de uma fórmula proposicional e seu respectivo conteúdo lógico no diagrama. Destacam-se as vantagens do uso do diagrama em relação à tabela-verdade, incluindo um comparativo com o problema de Post, em relação à aplicação das propriedades das operações lógicas e, ainda, no que diz respeito à validade de argumentos. Os resultados obtidos permitem concluir que o diagrama de Marquand constitui-se numa poderosa ferramenta no cálculo proposicional, sendo de fácil compreensão e utilização, apresentando diversas vantagens em relação aos métodos clássicos encontrados na literatura.

Palavras-chave: Lógica. Cálculo Proposicional. Diagrama de Allan Marquand.

Abstract

Results deriving from the exploration of the use of Allan Marquand's diagram in propositional calculus are presented in this article. Both the construction and the use of the diagram are described. Furthermore, the correspondence between the truth values of a propositional formulae and its respective logical content in the diagram is presented. The advantages of the diagram in relation to the truth table are highlighted, including a comparison with Post's problem, in relation to the application of the properties of logical operations and also with regard to the validity of arguments. The results support the conclusion that Marquand's diagram is a powerful tool for propositional calculus, with easy understanding and use, also presenting several advantages when compared to the classical methods found in literature.

Keywords: Logic. Propositional calculus. Allan Marquand's diagram.

[1] Digitalizado por Déa Nunes Fernandes Fernandes, Edna Sakon Banin e Marta Macena.

[2] vjlm@upf.tche.br
[3] diehl@upf.tche.br
[4] rkripka@upf.tche.br
*Instituto de Ciências Exatas e Geociências, ICEG, Universidade de Passo Fundo/UPF, 99001-970, Bairro São José, Campus I, Passo Fundo, RS

Introdução

O conteúdo de lógica matemática vem sendo trabalhado regularmente nos cursos de Licenciatura Plena em Matemática e Ciência da Computação na Universidade de Passo Fundo, onde a utilização do diagrama de Marquand tem possibilitado a otimização do ensino do cálculo proposicional. Essa otimização decorre de diversas vantagens que o diagrama apresenta em relação a métodos clássicos encontrados em livros-texto geralmente adotados em sala de aula (ALENCAR FILHO, 1999; JONOFON, 2000). Como resultado desse processo, apresenta-se neste trabalho, inicialmente, um breve histórico do diagrama de Allan Marquand e, em seguida, a construção, a forma de uso e a descrição das vantagens mencionadas.

A lógica matemática tem sua importância como disciplina, nos cursos das ciências exatas, ao cumprir o objetivo de levar o estudante a tomar conhecimento do processo de raciocinar e apropriar-se da sistemática desse processo como um instrumental. Nesse sentido, a inserção do diagrama de Marquand visa a contribuir com o processo de ensino-aprendizagem de forma que esse se torne mais aperfeiçoado e significativo.

Revisão de Literatura

A lógica simbólica ou matemática teve seu surgimento em meados do século XIX, com as obras de George Boole (1815-1864), *Las leyes del pensamiento*, publicada em 1854, e de Gottlob Frege (1848-1925), *Conceptografia*, publicada em 1879. Boole propôs que fossem transportadas para a lógica a notação e as leis da álgebra, de forma a possibilitar a conversão das proposições categóricas em equações e os silogismos, em sistemas de equações, cuja solução seria possível por métodos algébricos. (BOCHENSKI, 1985; GARRIDO, 1995).

Willian S. Jevons (1835-1882), apresentando diversas críticas ao sistema de Boole, propôs um sistema mais puro, livre dos complicados cálculos algébricos. Criou um outro sistema com várias modificações. Os cálculos de Jevons, pelos quais pretendia clarificar e simplificar os processos de Boole, resultaram em grandes complicações. Jevons não

ISBN 978-85-89082-23-5

conseguiu realizar o intento de simplificar o sistema de Boole. (BLANCHÉ, 1985, p. 280-286)

Jonh Venn (1834-1923) foi simpático à lógica de Boole e propôs ilustração da álgebra lógica através de diagramas. Tomou círculos de Euler para fazer interpretação de termos e de proposições, tendo constatado que esses se prestavam para representar ou expressar as operações lógicas, mas não serviam para interpretar raciocínios mais complexos. Afirmou Blanché (1985, p. 289): “A figuração por círculos só convém para a combinação de dois ou três termos, no máximo. Isso basta para o silogismo, mas não já para raciocínios um pouco mais complexos em que o número de termos é maior.”

Na mesma época, além dos círculos de Euler utilizados por Venn, outros diagramas foram propostos. Allan Marquand, em 1881; Alexander MacFarlane, em 1855, e Lewis Carrol,[5] em 1886, propuseram diagramas retangulares que, do cálculo das classes, podiam ser transportados para o cálculo das proposições (BLANCHÉ, 1985, p. 290-291; CARROLL, 1986; GARDNER, 1958). Entretanto, as limitações encontradas no uso dos círculos de Euler causaram o abandono do uso dos diagramas no cálculo dos predicados e das proposições.

L. Wittgenstein e E.L.Post, nos primeiros anos do século XX, resolveram o problema do cálculo das proposições com a tabela-verdade ou matriz de verdade. O uso da tabela-verdade constitui-se num processo de decisão no cálculo das proposições sem recorrência a axiomas. Segundo Blanché (1985, p. 352), “pode-se, com efeito, utilizar essas tabelas para reconhecer, de uma maneira direta que dispensa que se percorra uma cadeia demonstrativa mais ou menos longa, se uma dada fórmula de cálculo é ou não uma lei lógica.”

Da mesma forma que os círculos de Euler mostraram-se inadequados quando o número de termos era grande, por ser difícil a representação, a tabela-verdade é inadequada para uma fórmula proposicional com um grande número de letras proposicionais, por ser

[5] O nome verdadeiro de Lewis Carroll era Charles Lutwidge Dodgson (CARROLL, 1986).

ISBN 978-85-89082-23-5

um trabalho demasiadamente exaustivo. Diante dessa dificuldade, o cálculo algébrico continuou sendo utilizado como o melhor recurso pela maioria dos lógicos.

Entretanto, o uso dos diagramas retangulares, abandonado como recurso para o cálculo de termos e de proposições, tem sido adotado como recurso metodológico no sentido de facilitar o processo de aprendizagem da lógica. É o caso da proposta constante no livro *Lógica,* do Conselho Nacional de Professores de Matemática do México (NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, 1970), no qual se encontra somente a representação das operações lógicas nos diagramas retangulares.

Pedroso (1993, p. 59-60) faz uso desse mesmo instrumental, chamando-o de "gráfico de Gonseth", na álgebra dos interruptores. Da mesma forma que no livro do Conselho Nacional de Professores de Matemática, faz somente a representação dos juntores binários - operadores.

A proposta desse trabalho é utilizar o Diagrama de Marquand não só como recurso metodológico, mas como instrumental eficiente para o cálculo proposicional.

As atividades desenvolvidas na disciplina de Lógica, nos cursos de Matemática e Ciência da Computação, têm servido para demonstrar que o diagrama retangular de Marquand pode ser utilizado com grandes vantagens em relação aos métodos tradicionais.

Construção e uso do diagrama

Construção do diagrama

Permitindo representar a estrutura lógica de fórmulas proposicionais quaisquer, o diagrama de Marquand consiste numa figura retangular que pode ser subdividida conforme o número de letras proposicionais da fórmula a ser representada. Para *n* letras, tem-se um diagrama com 2^n regiões.

Assim, para as fórmulas proposicionais compostas por duas letras, *p* e *q*, tem-se o diagrama dividido em quatro regiões, tal como segue (Fig. 1).

ISBN 978-85-89082-23-5

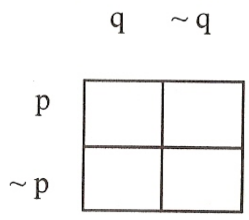

Figura 1: Representação do diagrama de Marquand para fórmulas com duas letras proposicionais.

Observe-se que cada região do diagrama fica bem definida pela disposição das letras, que é feita no sentido horário. A disposição de cada letra e sua respectiva negação

obedecem aos sentidos convencionais da escrita ocidental, na horizontal, da esquerda para a direita e, na vertical, de cima para baixo.

Essa forma de construção aplica-se a fórmulas com qualquer número de letras proposicionais. Por exemplo, para fórmulas com três letras proposicionais *p*, *q* e *r*, tem-se o diagrama conforme representado abaixo na figura 2.

Para facilitar a localização das regiões, procede-se à sua enumeração seguindo o sentido das subdivisões. Fixando a localização da letra *p*, à esquerda do diagrama, tal como nas figuras 1 e 2, a enumeração é feita como segue (Fig. 3).

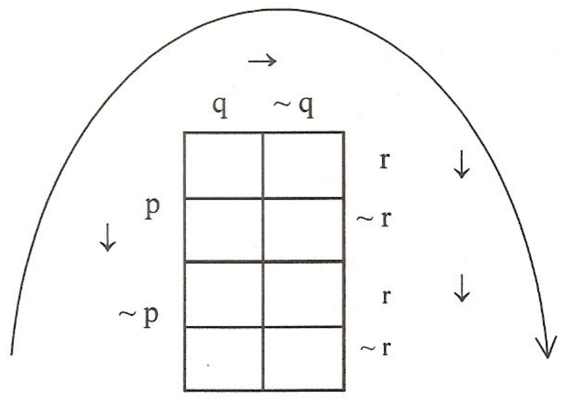

Figura 2: Construção do diagrama para fórmulas com três letras proposicionais.

ISBN 978-85-89082-23-5

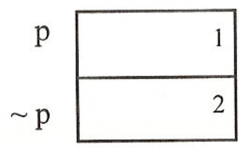

Figura 3: Enumeração do diagrama para representação de fórmulas com uma letra proposicional.

Ou seja, a primeira divisão é realizada no sentido vertical e da mesma forma é feita a enumeração.

A subdivisão orientada pela letra *q* divide cada região horizontalmente e a nova enumeração das regiões do diagrama deve ser feita pela ordem crescente das divisões anteriores, no sentido horizontal, conforme o diagrama ilustrado na Figura 4.

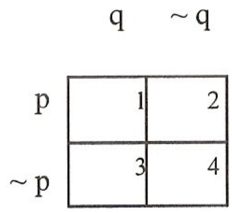

Figura 4: Enumeração do diagrama para representação de fórmulas com duas letras proposicionais.

As demais subdivisões e novas enumerações seguem o mesmo procedimento. Em seguida, apresentam-se as enumerações dos diagramas para fórmulas com três e quatro letras, representados nas Figuras 5a e 5b, respectivamente.

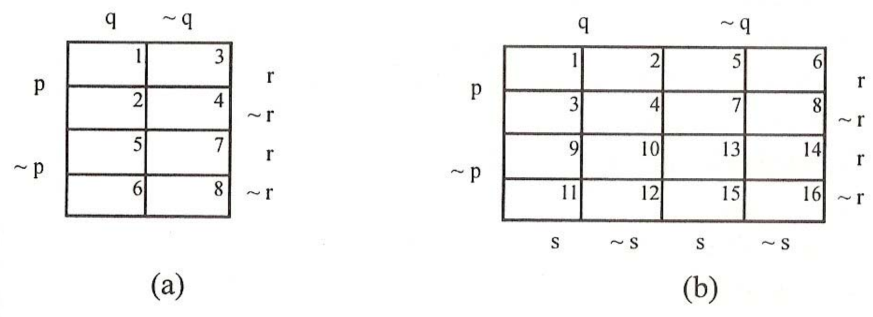

Figura 5: Enumeração de diagramas (a) para representação de fórmulas com três letras proposicionais; (b) para representação de fórmulas com quatro letras proposicionais.

ISBN 978-85-89082-23-5

Uso do Diagrama

Inicialmente, mostra-se como fica representada a estrutura lógica de cada uma das fórmulas proposicionais fundamentais.

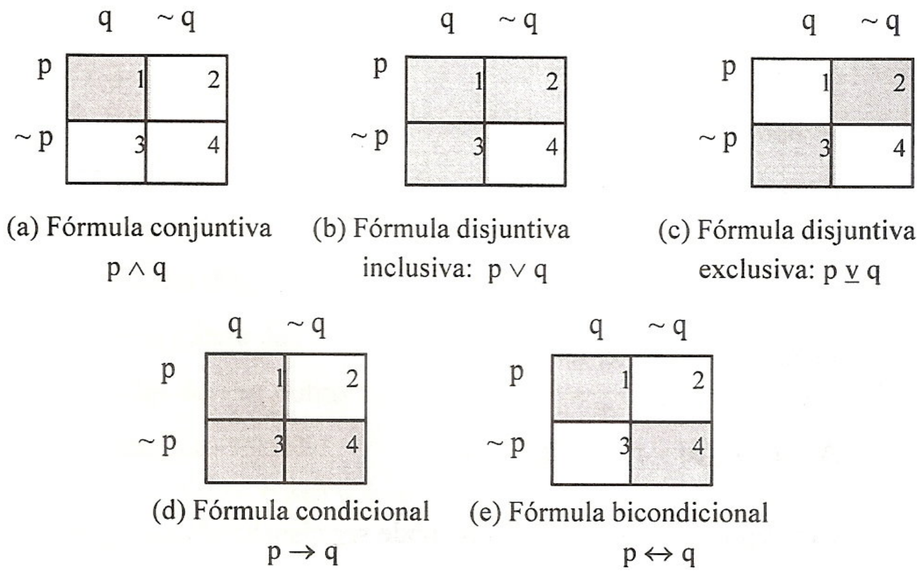

Figura 6: Representação da estrutura das fórmulas proposicionais fundamentais.

Observe-se que as regiões hachuradas num diagrama representam o conteúdo lógico relativo à estrutura lógica de uma respectiva fórmula proposicional, em que o conteúdo lógico é a expressão da situação em que tal estrutura ocorre, ou seja, se verifica.

Para uma fórmula proposicional qualquer, com mais de duas letras proposicionais ou com mais de um conectivo, a representação do conteúdo lógico é realizada em etapas, que obedecem aos sinais de associação, quando existirem, ou à hierarquia das operações lógicas. As etapas são representadas no diagrama através de símbolos, tais como o, +, Δ, □, ∗ e ⊕.

Para ilustrar tal procedimento, representa-se a fórmula proposicional A, assim definida:

$$A: p \rightarrow (q \vee r \leftrightarrow \sim q) \wedge r.$$

ISBN 978-85-89082-23-5

Considerando a hierarquia das operações, podem-se acrescentar em A alguns parênteses, obtendo, A_1: $(p \rightarrow (((q \vee r) \leftrightarrow \sim q) \wedge r))$, a qual é equivalente à fórmula proposicional A.

Seguindo a ordem das operações, definida pelos parênteses, associam-se os seguintes símbolos:

o para $(q \vee r)$

\+ para $(q \vee r) \leftrightarrow \sim q$

Δ para $(q \vee r) \leftrightarrow \sim q) \wedge r$

□ para A_1: $(p \rightarrow (((q \vee r) \leftrightarrow \sim q) \wedge r))$

Esquematicamente, tem-se:

□ o + Δ

A_1: $(p \rightarrow (((q \vee r) \leftrightarrow \sim q) \wedge r))$,

cuja representação no diagrama pode ser visualizada na Figura 7.

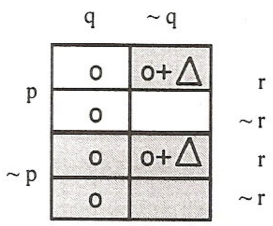

Figura 7: Representação da fórmula proposicional A

O conjunto das regiões hachuradas representa o conteúdo lógico de A.

O conteúdo lógico de A, representado no diagrama da Figura 7, pode ser traduzido por outras fórmulas proposicionais, equivalentes a A, as quais podem ser obtidas através da leitura do diagrama de A. Têm-se, por exemplo, as fórmulas:

A_2: $(p \wedge \sim q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)$, que corresponde à maior fórmula normal disjuntiva (FND) equivalente a A;

ISBN 978-85-89082-23-5

A_3: $\sim p \vee (\sim q \wedge r)$, que corresponde à menor fórmula normal disjuntiva (FND) equivalente a A;

A_4: $\sim ((p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q \wedge \sim r))$;

A_5: $(\sim p \vee \sim q \vee \sim r) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee r) \wedge (\sim p \vee q \vee r)$, que corresponde à maior fórmula normal conjuntiva (FNC) equivalente a A;

A_6: $\sim ((p \wedge q) \vee (p \wedge \sim r))$;

A_7: $(\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee r)$, que corresponde à menor fórmula normal conjuntiva (FNC) equivalente a A.

As fórmulas A_2 e A_3 foram obtidas pela leitura das regiões hachuradas no diagrama de A, ao passo que as fórmulas A_4 e A_6 foram obtidas pela leitura das regiões não hachuradas desse mesmo diagrama.

Além dessas, outras fórmulas podem expressar o conteúdo lógico de A, como por exemplo:

A_8: $(p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$;

A_9: $p \rightarrow (\sim q \wedge r)$;

A_{10}: $((\sim p \leftrightarrow q) \vee \sim p) \wedge \sim (p \wedge \sim q \wedge \sim r)$.

Para expressar A da forma mais simplificada, utilizando apenas as operações binárias de conjunção e disjunção, tomam-se, entre as diversas fórmulas obtidas, as menores FND e FNC equivalentes a ela.

Por outro lado, a tabela-verdade tem sido um valioso instrumental no cálculo proposicional por permitir identificar em que contingências uma dada fórmula proposicional é verdadeira ou é falsa e, portanto, determinar se é válida, contraválida ou indeterminada.

Aquilo a que denominamos como conteúdo lógico na representação da estrutura lógica de uma fórmula proposicional no diagrama de Marquand equivale ao conjunto dos valores de verdade **V's** na tabela-verdade.

É fundamental que se observe a ordem de colocação das letras proposicionais no diagrama, como anteriormente apresentado, e que se considere a ordem alfabética das mesmas na construção da tabela-verdade de uma dada fórmula proposicional para que haja correspondência entre os dois instrumentos.

Para melhor compreender essa correspondência, apresenta-se a tabela-verdade da fórmula A na Tabela 1.

Tabela1: Tabela-verdade de A

(p	$\rightarrow$	(((q	$\vee$	r)	$\leftrightarrow$	~ q)	$\wedge$	r))	
V	F	V	V	V	F	F	F	V	1ª linha
V	F	V	V	F	F	F	F	F	2ª linha
V	V	F	V	V	V	V	V	V	3ª linha
V	F	F	F	F	F	V	F	F	4ª linha
F	V	V	V	V	F	F	F	V	5ª linha
F	V	V	V	F	F	F	F	F	6ª linha
F	V	F	V	V	V	V	V	V	7ª linha
F	V	F	F	F	F	V	F	F	8ª linha

Na tabela-verdade, têm-se oito linhas e, no diagrama, oito regiões. O valor de verdade da fórmula proposicional da 1ª linha corresponde à região 1; a 2ª linha, à região 2, e assim sucessivamente.

A estrutura lógica da fórmula dada pode ser percebida na tabela-verdade pelos valores V's e F's da coluna correspondente aos valores lógicos da mesma; no diagrama, pelas regiões hachuradas e pelas não hachuradas, respectivamente.

Vantagens do uso do diagrama de Marquand

Em relação ao uso da tabela-verdade

Sabendo da correspondência entre a tabela-verdade e o diagrama de uma fórmula proposicional, podem-se verificar as vantagens do uso do diagrama em relação ao uso da tabela-verdade no que diz respeito à obtenção de fórmulas equivalentes (MÜHL, 1989).

Pelo problema de Emil Leon Post, o qual consiste em fazer a leitura da tabela-verdade, obtêm-se as maiores fórmulas normais, disjuntiva (FND) e conjuntiva (FNC), as quais foram obtidas pela leitura do diagrama. No caso da fórmula A, essas duas fórmulas correspondem a A_2 e A_5, respectivamente.

ISBN 978-85-89082-23-5

Pela leitura da tabela-verdade, conseguem-se obter somente as maiores FND e FNC e, pela leitura do diagrama, podem-se obter, além dessas, várias outras fórmulas proposicionais, inclusive as menores FND e FNC, cumprindo, assim, o objetivo de obter a fórmula proposicional mais simplificada possível equivalente a A. Isso acontece para qualquer fórmula proposicional.

Quanto à relação de implicação, a tabela-verdade permite verificar a existência ou não dela; o diagrama também. Todavia, além dessa verificação, o diagrama, e somente ele, permite a construção de fórmulas proposicionais, entre as quais existe relação de implicação. Para ilustrar esse processo de construção, tome-se a fórmula,

A_1: $(p \rightarrow (((q \vee r) \leftrightarrow \sim q) \wedge r))$, já representada na Figura 7.

No uso do diagrama, para haver relação de implicação entre duas fórmulas proposicionais A e B, o conteúdo lógico da fórmula proposicional antecedente, A, deve estar incluso no conteúdo lógico da fórmula conseqüente, B. Isso se deve à definição de relação de implicação.

Portanto, fixando A_1 como antecedente, podem-se ter, entre outras, como conseqüentes as seguintes fórmulas:

$B_1 = \sim p \vee r$; $B_2 = \sim p \vee \sim q$; $B_3 = p \rightarrow \sim q$

Os diagramas das fórmulas B_1, B_2 e B_3 são como segue:

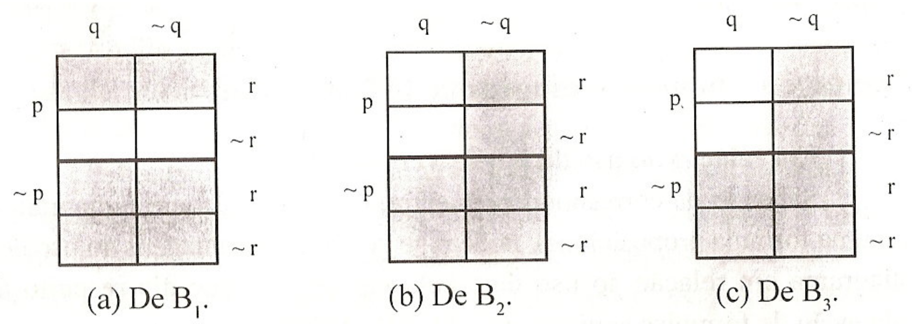

Figura 8: Representação do conteúdo lógico de fórmulas conseqüentes

É fácil observar que o conteúdo lógico de A_1 está incluso no conteúdo lógico das fórmulas conseqüentes criadas.

Pode-se notar que o mesmo processo pode ser feito fixando uma fórmula proposicional como conseqüente, criando-se fórmulas antecedentes.

ISBN 978-85-89082-23-5

Em relação ao uso das propriedades das operações lógicas

O conjunto das propriedades das operações lógicas de conjunção, disjunção inclusiva e negação constitui-se em mais outro valioso instrumental no cálculo proposicional.

O uso das propriedades permite demonstrar equivalências ou obter fórmulas equivalentes a uma dada fórmula proposicional, incluindo o processo de simplificação.

O uso do diagrama também permite demonstrar equivalências ou encontrar a forma mais simplificada de uma fórmula proposicional dada. Porém, apresenta como vantagem a praticidade de identificação, de forma direta, das menores FND e FNC, além de outras, também simplificadas, que incluam as operações de disjunção exclusiva, implicação ou biimplicação, dispensando qualquer manipulação algébrica.

Em relação ao uso das regras de inferência

É sabido que a validade de um argumento pode ser verificada ou demonstrada com o uso da tabela-verdade ou de regras de inferência, entre outros processos. Com o diagrama de Marquand também se pode verificar a validade de um argumento, porém pode-se fazer mais: criar argumentos válidos. Não que não se possam criar argumentos válidos de outra forma. Nesse caso, o referido processo é o mesmo que para a criação de fórmulas proposicionais, entre as quais exista relação de implicação.

Para ilustrar a criação de argumentos válidos, tome-se o seguinte conjunto de premissas:

P_1: $\sim p \rightarrow r$, P_2: $r \rightarrow p \vee q$ e P_3: $p \rightarrow q$.

A conjunção dessas premissas no diagrama de Marquand está representada na Figura 9, onde foram associados os seguintes símbolos para as premissas:

o para $\sim p \rightarrow r$;

$+$ para $r \rightarrow p \vee q$;

Δ $p \rightarrow q$.

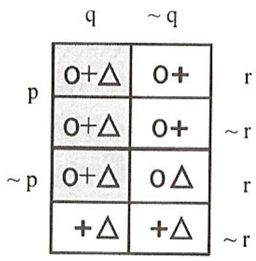

Figura 9: Representação no diagrama da conjunção das premissas P_1, P_2 e P_3.

As conclusões a serem criadas devem conter o conteúdo lógico da conjunção das premissas. Assim têm-se, por exemplo, as fórmulas proposicionais q, $q \vee r$, $p \vee r$ e $p \vee q$ como conclusões, que podem ser visualizadas nas Figuras10(a), 10(b), 10(c) e 10(d), respectivamente.

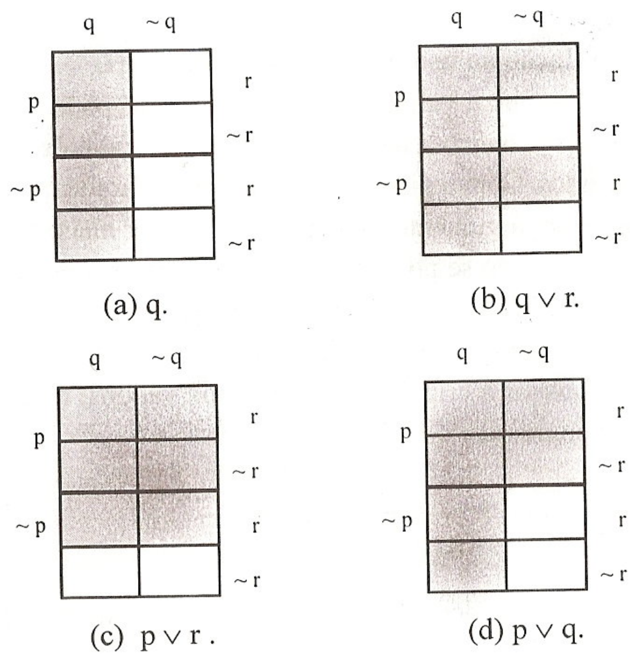

Figura 10: Representação do conteúdo lógico de conclusões.

Conclusões

O processo de representação do conteúdo lógico de fórmulas proposicionais pelo diagrama de Marquand é de fácil compreensão e possibilita obter, de forma direta, através de leitura, as menores fórmulas normais conjuntivas e disjuntivas, analisar relações de equivalência e de implicação entre fórmulas proposicionais, bem como a criação de argumentos válidos. Em todos os casos mencionados, a utilização das propriedades das operações lógicas ou de regras de inferência torna-se desnecessária.

Pelo problema de Post, obtêm-se apenas uma FND e uma FNC equivalentes a uma fórmula proposicional dada, que podem não ser as menores. Nesse caso, para obter as menores, utiliza-se o processo clássico de simplificação usando as propriedades das operações lógicas. Esse processo, dependendo do tipo de fórmula, além de requerer habilidade, pode ser bastante trabalhoso. Com o uso do diagrama é possível obter as mesmas FND e FNC definidas pelo problema de Post e, ainda, outras FND's e FNC's equivalentes à fórmula dada, inclusive as menores, dispensando o processo de simplificação.

A relação de equivalência é possível de ser verificada ou demonstrada construindo tabelas-verdade ou aplicando as propriedades das operações lógicas. Com o uso das propriedades, podem-se também obter fórmulas simplificadas equivalentes a uma fórmula dada. A representação gráfica do conteúdo lógico de uma fórmula proposicional em diagramas de Marquand permite, além da demonstração ou verificação da relação de equivalência, de forma direta, a obtenção de várias fórmulas equivalentes, entre elas as mais simples, também nesse caso dispensando o uso de tabelas-verdade e o processo clássico de manipulação algébrica.

A relação de implicação pode, assim como a relação de equivalência, ser demonstrada ou verificada com o uso de tabelas-verdade ou de diagramas. Porém, o diagrama permite, dada uma fórmula proposicional, criar fórmulas antecedentes ou conseqüentes, conforme se queira considerar. Dessa forma, podem-se construir fórmulas entre as quais exista relação de implicação.

A idéia de relação de implicação é fácil de ser entendida com o uso do diagrama de Marquand, ficando claro que o conteúdo lógico do antecedente deve estar contido no conteúdo lógico do conseqüente. A representação no referido diagrama traduz bem a definição formal da relação de implicação.

Quanto à validade de argumentos, a verificação ou demonstração pode ser feita por tabelas-verdade, regras de inferência ou por diagramas. No entanto, dado um conjunto de premissas, o diagrama de Marquand permite construir conclusões que gerem argumentos válidos, tomando por base a idéia da relação de implicação.

Historicamente, diagramas foram criados na tentativa de substituir o cálculo algébrico. Na época, o seu uso não foi totalmente explorado. Os resultados deste estudo identificam o diagrama de Marquand como uma poderosa ferramenta para o cálculo proposicional.

A eficácia do uso do diagrama no cálculo proposicional leva a crer que também possa ser útil na investigação de novos resultados na área da lógica.

Referências

ALENCAR FILHO, E. **Iniciação à lógica matemática**. São Paulo: Nobel, 1999.

BLANCHÉ, R. **História da lógica de Aristóteles a Bertrand Russell**. Lisboa: Edições 70, 1985.

BOCHENSKI, I.M. **Historia de la lógica formal**. Madrid: Gredos, 1985.

CARROLL, L. **Lewis Carroll**: el juego de la lógica y outros escritos. Madrid: Alianza Editorial, 1986.

GARDNER, M. **Logic machines and diagrams.** USA: McGraw-Hill, 1958.

GARRIDO, M. **Lógica simbólica.** 3. ed. Madrid: Tecnos, 1995.

JONOFON, S. **Raciocínio lógico**. Brasília: Jonofon, 2000.

MÜHL, V. J.L. **Uma proposta alternativa para o ensino de introdução à lógica matemática**. 1989. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) – Instituto de Matemática Estatística e Computação (IMEC), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1989.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Lógica**. México: Editorial F. Trilhas, 1970.

PEDROSO, D. S.. **Iniciação à lógica matemática:** cálculo sentencial, Lukasiewicz's parenthesis-Free notation e árvores lógicas. Porto Alegre: Gráfica e Editora NBS, 1993.