



Contribuições de uma Investigação sobre o Espaço para a Educação Matemática¹

Adlai Ralph Detoni²

Resumo

Neste artigo é apresentada uma discussão no campo da Filosofia da Matemática, sob o olhar da Fenomenologia, que aborda o espaço como fundamento da Geometria. A relevância desse debate para a Filosofia da Educação Matemática é posta em questão tomando a interpretação de dados obtidos em pesquisa realizada na perspectiva do pensamento qualitativo, que se debruça sobre a manifestação pré-reflexiva da espacialidade.

Abstract

This article presents a discussion in the field of Mathematical Philosophy, from the view point of Phenomenology, - which approaches space as the basis of Geometry. The relevance of this to the Philosophy of Mathematics Education is considered through observing the interpretation of data obtained in qualitative study that inquires into the prereflexive manifestation of spatiality.

Introdução

Quando se propõe uma investigação aprofundada e levada a cabo num ambiente com densidade acadêmica, vários mitos são deslocados até desaparecerem como pressuposições.

Por ocasião de meus estudos de doutoramento, pude viver esse processo. Quando o iniciei, trazia de minha prática profissional e de leituras o quadro de dificuldades e incertezas que permeava (e permeia) o Ensino da Geometria. Pensava, à época, que realizar uma pesquisa nesse cenário seria buscar a chave de solução para toda a crise que se vê instaurada no campo didático e pedagógico dessa disciplina. Era um mito que eu trazia.

Os primeiros passos que dei nesses estudos me mostraram a complexidade desse quadro crítico, complexidade que vem da própria estrutura científica e das possibilidades pedagógicas da Geometria³. O mito foi se desfazendo: da chave geral de uma solução, carreei meu olhar para um dos aspectos da riqueza estrutural da

¹ Digitalizado por Edinei Reis e Renato Marcone.

² Professor do Departamento de Fundamentos de Projeto - Universidade Federal de Juiz de Fora.

³ Ver *Perspectives on the teaching of Geometry for the 21st Century*, texto a cargo do ICM1 publicado in: **Educational Studies in Mathematics**, n. 28, 1995.

Geometria; interessei-me pelo aspecto mais fundante: o *espaço*. Isto é, sendo a Geometria a ciência do *espaço*, comecei a interrogar acerca desse fundamento, não só com expectativa puramente filosófica, mas, também, buscando questionar o que essa interrogação teria de validade no âmbito da Educação Matemática: na perspectiva do aluno, na formação do professor, no enredamento de conceitos, etc.

No movimento da escolha do foco de meus estudos, eu já era iniciado no pensamento fenomenológico, principalmente em leituras das obras do filósofo francês Maurice Merleau-Ponty. Essas leituras já causavam expectativas de desconstrução em minhas crenças científicas e pedagógicas pelo apontar de direções críticas à Ciência Ocidental, aos modos de ver o Homem e aos seus métodos de conhecer o mundo.

Interrogar *o que é isto, o espaço?* fazia-me estar com a intenção de retornar ao fenômeno, buscando a originalidade mais radical da questão, por meio do diálogo, a partir desse foco, com filósofos e cientistas que contribuem para sua compreensão, explicitando quando esses pensadores tocavam no entorno da raiz desse fenômeno.

Assim, dentro da extensa gama de pensadores e das correntes de pensamento ocidentais, fiz opções de leituras para o fenômeno em foco, procurando estruturar uma rede econômica, mas significativa, de cada contribuição histórica. Neste artigo, conto como foi construir essa rede, o que se desdobrou em pesquisa ao construí-la e o que resultou possível interpretar sobre esse feito. É um modo de contar o que foi a produção de minha tese de doutorado⁴.

O Caminho da Interrogação

Os pensadores com os quais fizemos nossa interlocução foram escolhidos segundo uma visão teórica - alterando-se no movimento das escolhas - que, inicialmente, aceita as disposições clássicas das correntes de pensamento. O balizamento inicial para as leituras e as primeiras análises foram feitos pelos marcos identificados com o Empirismo, de um lado, e com o Idealismo, do outro.

Essas correntes se definem já no pensamento grego clássico: o atomismo *versus* os 'metafísicos' - especialmente os platônicos. Enfocando esse nascedouro da cultura formal do Ocidente, minhas leituras não se detiveram no primeiro, dado sua parca

⁴ *Investigações acerca do espaço como modo da existência e da Geometria que ocorre no pré-reflexivo*, tese de doutorado defendida em dezembro de 2000 junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP de Rio Claro; orientação da Prof. Maria Bicudo.

estrutura teórica. Tomei a obra de Euclides como articulação científica idealista e recolhi dela as concepções de *espaço*.

Euclides pode ser visto como o sistematizador da experiência intelectual dos gregos – esta trabalhada por sobre experiências mais práticas de outras culturas matemáticas. O espaço é tridimensional e a Geometria deve ter uma estrutura que dê conta disso. Esse é o que chamamos de espaço espacializante, das formas ideais. Essa estrutura de espaço é tributo nosso aos gregos.

Dessa leitura caminhei para outro expoente idealista: Descartes, que se põe numa clara conexão intelectualista. Vimos que ser cartesiano subentende ser euclidiano. Quando investiga os princípios filosóficos, Descartes, para decepção de quem o queria ver revolver os princípios greco-ocidentais da filosofia, diz que o espaço é isso mesmo que a cultura nos traz: largura, altura e profundidade, homogeneamente descritas. Esse filósofo é mais preocupado em dotar a ciência de uma linguagem mais fluente para tratar do fenômeno espacial, uma tarefa que afasta o conhecimento o mais possível da empiria do mundo, mas que nos lembra que, também falando, espacializamos.

O idealismo fecha um ciclo em Kant. Esse filósofo é atento às críticas empiristas sobre o dogmatismo idealista e parte para reestruturar esse modo de pensar o mundo assentando as possibilidades da razão pura junto - mas não amalgamada - da existência sensível.

Kant credita ao sujeito, ainda que universal - como a Matemática -, a gênese do espaço, dizendo que as formas de conhecimento do mundo acontecem em sua intuição. Consegue esse filósofo desviar o foco idealista das formas puras para uma retomada por aquele que as pensa, inclusive considerando que elas só fazem sentido se aplicadas a experiência sensível.

Como herdeiro da tradição grega, com essas reflexões, Kant ratifica o modelo euclidiano como o modo universal de organização espacial do mundo.

No veio empirista, fui direto, em minhas leituras, ao quadro moderno apresentado no pensamento inglês, já que, como foi dito acima, antes desse, o empirismo nunca tinha apresentado um sistema bem articulado, apesar de vários e significativos exemplos isolados de dissidentes da metafísica.

Podemos ver que as diferenças entre as duas correntes de concepções de *espaço* acabam não sendo tão profundas a ponto de gerar um irreconciliável conflito que

impediria um diálogo, ou, até, programas didáticos de Geometria com vários pontos em comum, na Inglaterra e no Continente. Mas as contribuições empiristas são características: notadamente, o desejo de medir o *espaço*, de maneira que sua ideia seja equivalente à *distância*. As jardas e as polegadas são exemplos nessa direção, uma direção que comporta a primazia inglesa em fazer uma revolução industrial.

Como já dissemos, ha uma concordância bastante ampla entre o empirismo e o idealismo acerca do que é o *espaço* e de como deveria ser sua ciência, a Geometria. Se olharmos por volta do ano de 1800, em resumo veríamos o *espaço* - pensado ou real - em suas três dimensões, e a Geometria Euclidiana como a arquitetura do pensar que daria conta da compreensão desse *espaço*,

O século XIX foi pródigo em refundamentações de todos os pensares. Para a Geometria, foi a época das grandes revoluções. Lobachevsky, Boliay, Riemann, entre outros, não só mexeram em sua estrutura tradicional, criando novos objetos geométricos, como trouxeram de novo à tona o questionamento **do que e o espaço**. Em minha pesquisa, preferi dar um salto cronológico à frente e tomar a visão de dois grandes matemáticos com inserções na filosofia sobre esse processo histórico.

Em primeiro lugar, tomei Russel. O interesse primeiro deu-se ao saber que sua tese de doutoramento versava sobre Geometria, ele que produziu extensa obra voltada para a Lógica. Esse seu trabalho pode ser tomado como uma obra ainda não madura, mas traz indicações significativas para a compreensão do estágio da Geometria em sua época e para uma investigação acerca do *espaço*. Podemos dizer que Russel promove uma renovação do pensamento kantiano, pondo-o em bases mais atuais.

O filósofo lança um olhar qualitativo sobre o espaço geométrico, percebendo essa característica na Geometria Projetiva que, enfim, se estruturava em bases matemáticas mais completas, e ajuda-nos a compreender que a Geometria de então se esforçava por desincumbir-se do apelo forternente quantitativo que vinha do euclidiano, com a ajuda do empirismo. No entanto, o espaço em Russel continua a ser tornado como um *a priori* da experiência, valorizando o homem lógico.

Outra visão temos na obra filosófica de Poincaré. Não é fácil inserí-lo em uma corrente filosófica, primeiro, por não ser ele um filósofo profissional, segundo, porque a originalidade de seu pensamento leva ao rompimento com as barreiras tradicionais entre as correntes filosóficas. Podemos considerá-lo um empirista, mas devemos reconhecer

um grau superior de refinamento que suas reflexões de matemático trazem, se o compararmos com um empirismo mais ingênuo. Quando ele discute o olhar matemático sobre o contínuo físico, a razão trabalha junto com os sentidos: não há mais uma razão, que estipula apoditicamente o que é um fato da realidade, pois o homem locomove-se no mundo, seus músculos mudam e geram mudanças, seu olhar e motricidade.

Para Poincaré, o espaço não é dado, nem tampouco é um *a priori* para o sujeito. O movimento é a origem do espaço. Essa máxima vai ser depois muito trabalhada na Educação Matemática do século XX; ela reflete, também, a atualidade de então da Geometria, sendo tratada como transformações e compreendida na ideia de Grupos.

Em suas duas principais obras filosóficas, Poincaré tece uma longa crítica à tradição geométrica e seus pressupostos, que encaminham o pensamento geométrico para a crença no edifício lógico de sua ciência, tornando genético o que é resultado de proposições. De outra maneira, Poincaré considera que todo conhecimento constante dessa Geometria vem de um convencionalismo cultural-científico que o Ocidente não toma explicitamente. Essa consideração deu pulso à nossa pesquisa, fortalecendo nossa intenção de revolver pressupostos.

Apesar de Poincaré não aprofundar suas próprias considerações, sua visão do espaço que nasce a partir do mover de um corpo que vive geometricamente, dá as contribuições para uma discussão do conhecimento científico e de um saber cotidiano, pois marca muito claramente que a ciência é uma visada de segunda ordem do mundo.

Em minhas leituras, já abarcando a contribuição de Educadores Matemáticos sobre o tema do espaço, entendi haver uma projeção do pensamento de Poincaré na obra de Piaget, quando este sustenta a origem perceptiva do conhecimento no sensorio-motor. A ideia de que não haveria Geometria para um corpo estático e densamente trabalhada pelo pensador genebrino.

Em sua obra mais específica sobre o espaço - A representação do Espaço na criança, junto com Inhelder -, Piaget aplica suas teses gerais da psicogênese do conhecimento, mapeando as fases perceptiva, representativa e intelectual de elaboração do espaço pelo sujeito. O processo sensorio-motriz é o fundamento de toda essa trajetória, e mesmo as articulações mais elevadas são abstrações que guardam seus traços. A pesquisa de Piaget é profunda metodologicamente e nos leva a ver como o sujeito vai construindo as formas que se universalizam *a posteriori* da experiência

sensível e molora.

A forte preocupação em mostrar os níveis psicogenéticos, valorizando o sujeito epistêmico, faz balizar níveis da inteligência com as estruturas conceituais da Geometria, que Piaget e Inhelder tomam numa certa ordem também genética. Esse apego, no entanto, faz-nos buscar outras ideias, ao vermos que ele nos afasta de nossa interrogação, pois a questão de fundo não é posta em discussão. Ou seja, aquela concernente ao espaço e possibilidades de expressão de compreensões possíveis sobre ele.

Procurando retornar ao espaço como fenômeno ainda pré-conceitual, encontramos as ideias de Hans Freudenthal, educador matemático alemão radicado na Holanda, em torno do nascer da Geometria. Suas obras críticas ao estabelecido como padrão didático para a Matemática põem significativas questões. Ele critica os que falam de espaço praticando uma Geometria que enfatiza conceitos; do próprio Euclides, ele lembra que nada ou quase nada de seus Elementos profere a palavra espaço, apesar dessa ideia subjazer a todo o pensamento lá esboçado.

Freudenthal é interessante para nosso trabalho em dois momentos: quando nos encoraja a buscar o espaço na vivência cotidiana, nas experiências pré-conceituais, e quando indica os pensadores fenomenólogos em proximidade com a Geometria, fazendo-nos encontrar frontalmente suas ideias com nossa interrogação.

A fenomenologia nasce com Husserl com o intuito de ser uma terceira vertente além das que aqui chamamos clássicas. Para tanto, ela vai em busca da *coisa mesma*, isto é, não tendo o objeto, mas a suspeição do fenômeno, ela busca avizinhar-se deste para testemunhar, vivendo, suas manifestações segundo o olhar que o tenta focar. Essa é a sua busca pelo rigor. Dela, metodologicamente falando, faz parte a '*epoché*', quando o investigador põe entre parênteses tudo o que já conhece do fenômeno, isto é, livra-se de pressupostos.

Essa atitude metodológica tomou lugar em nossas investigações, ao descobrirmos a afinidade dela com o que já vínhamos trilhando ao fazer retornar o espaço ao estatuto de fenômeno, quando buscamos olhar desconstrutivamente para a ideia que nos é oferecida pelo pensamento ocidental. Esta está impregnada em nós não só ao lidarmos com a Geometria, mas também profundamente infiltrada em nossa cultura linguística, arquitetônica, artística e tantas outras manifestações.

Heidegger, um dos fenomenólogos de que lançamos mão, diz da dificuldade da desconstrução de uma tradição que pensa o espaço, mas, por outro lado, da importância de cada referência, científica ou não, acerca do espaço, como modo de vê-lo se manifestar. Assim, por exemplo, a pintura renascentista é uma fonte de manifestação do espaço na interpretação de seus artistas; resta, no entanto, não tomarmos o espaço renascentista como modelo de organização espacial universal do mundo.

Em sua obra *Ser e tempo*, Heidegger nos leva a fazer todo o exercício ontológico da espacialidade. O filósofo alemão prefere esse termo, referindo-se ao modo original do ser-em-presença, em detrimento de 'espaço', que remontaria a tradição em suas entificações - os diversos modos de aparecer, as manifestações ônticas. A diferença entre as ontologias tradicionais, como a cartesiana e a heideggeriana é que aquelas confirmam, para o espaço, as leituras históricas da ciência, especialmente da Geometria, enquanto a segunda desautoriza que essa ciência possa dar conta do que é o mundo espacial, o mundo vivido espacialmente.

Na fenomenologia de Heidegger, o ser-da-presença, enquanto espacialidade, está vinculado a mundaneidade - o mundo em suas fontes primeiras, o fundo de todas as possibilidades de se falar de mundo - e à circunvisão, o mundo que se faz ao sujeito, enquanto este o alcança olhando-o, sentindo. Na presença, e ontológico o aproximar-se e o direcionar-se; com isso, Heidegger afirma a originalidade do espaço: ter uma distância e uma direção, não ações provenientes de relações exteriores com os objetos do mundo, mas condições existenciais nas quais o sujeito afirma-se como tal e afirma o mundo. Esses são dois modos de espacializar e estão na ordem da atentividade do sujeito ao outro e ao mundo: antes de geométricamente se direcionar, ele se dirige a.

Heidegger abriu uma perspectiva totalmente nova para o nosso olhar de pesquisador, ao repor o espaço como fenômeno existencial. Nessa perspectiva, cresceu nossa interrogação para o que seria esse ser do espaço, ser-no-espaço, rompendo, ao mesmo tempo, com a exterioridade do sujeito ao mundo espacial - característica incontestada da ciência e da pedagogia usual - e com uma sequente religação, simplesmente lida no epistemológico, de ambos.

O espaço, então, não é um fenômeno apenas para o conhecimento. É do ser do sujeito organizar o seu mundo, e a espacialidade é um modo original de organização. Segundo Heidegger, o exercício do ser é o de abarcar os sentidos que o mundo oferece,

e o sujeito parte para a compreensão dos sentidos, tomando o mundo. Nessa tomada, ele necessita articular o compreendido, o que faz interpretando o que viveu na compreensão, para torná-la pertinente a ele. Por fim, mas coexistente a toda compreensão, o sujeito necessita comunicar suas articulações para si e para seus companheiros no mundo, num processo conjugado de constituição de inteligibilidade; assim, toda organização de mundo, a espacialidade como tal, é intersubjetiva.

Do movimento à linguagem, como vimos, constitui-se a espacialidade do sujeito. O gesto é um termo-chave aqui. Para estender nossas análises e dar conta da presença do sujeito no ato total do espacializar, em sua ação e pensamento, seguimos uma indicação do próprio Heidegger: essas análises se completam na corporeidade. Ele mesmo não as aprofunda nesta direção, e encontramos em Merleau-Ponty as reflexões que abarcam esse aspecto do sujeito.

Para Merleau-Ponty, o estar-no-mundo, a realização da existência, é feito no corpo-próprio, corpo físico e biológico, mas também cultural, e que carrega a historicidade do sujeito. Nessa história, o espaço está no nascer do sujeito e se faz em relações orgânicas primordiais, anteriores a distinção entre forma e conteúdo, portanto sem a prioridade kantiana da intuição pura. Corpo-próprio é o que torna possíveis as ações, não as que possibilitariam ao sujeito ocupar um lugar no espaço, mas estar ali, harmoniosamente, com suas tarefas no mundo.

O espaço originário não é tema primordial de uma compreensão geométrica, é âmbito da percepção e vivência. A vivência se dá no nível do ante-predicativo, isto é, ela não segue determinações conceituais; é a sua riqueza de exploração que permite a grandeza posterior de um pensamento geométrico. É exatamente esse clareamento que Merleau-Ponty permite sobre o espaço e a ciência geométrica que fez guiar todas as ações posteriores em nossa tese, especialmente ao conceber as atividades de campo para a pesquisa.

Também essa postura faz-nos constituir um olhar pedagógico que implica a compreensão que o sujeito constrói da Geometria, na qualidade da vivência de sua espacialidade. Nesse ponto, Merleau-Ponty faz-nos voltar ao que Husserl nos fala, em *A origem da Geometria*, da diferença entre um aprendizado meramente passivo e um aprendizado autônomo e significativo da ciência.

Com a abertura que nos deu a fenomenologia, a primeira interrogação nossa, o

que é o espaço, objeto da Geometria, ampliou-se para: *como o espaço se faz ao sujeito e como o mundo da Geometria se abre como estruturante de sua compreensão de mundo?* Na busca do clareamento dessa interrogação, iniciamos o encontro com sujeitos que deveríamos buscar em estado nascente de expressão de suas organizações de mundo. Para dar conta desse encontro, partimos para uma metodologia qualitativa de pesquisa feita em bases fenomenológicas.

Uma Metodologia para dar conta da Interrogação

Entendemos que o pensamento qualitativo seria o conveniente para nos pormos no necessário estado de perplexidade frente nosso pré-desconhecimento dos aspectos estruturantes do que seria a vivência da espacialidade. Não se tratava de uma opção que simplesmente descartaria qualquer abordagem quantitativa; simplesmente não tínhamos nada a mensurar. Estava, assim, delineado um caminhar em exercícios de ouvir os sujeitos no nível mais originário da manifestação de suas espacialidades.

As bases fenomenológicas de uma pesquisa indicam a atitude de, antes de qualquer interpretação, descrever o fenômeno em sua multiperspectividade. Teríamos, por essa tomada, de suspender todo o nosso conhecimento geométrico, deixando-o latente, e as concepções estabelecidas acerca do que é o espaço que nos oferta nossa cultura ocidental.

Em vista da necessária abertura as manifestações dos sujeitos, as atividades da pesquisa de campo foram arquitetadas de forma não estruturada, isto é, com pouca diretriz do que poderia vir a acontecer. Havia apenas a escolha de um material ou mesmo um mote inicial. Essa arquitetura requer bastante atenciosidade do pesquisador que, através de variações, prepara-se para estar presente a toda manifestação possível a vir. Esse modo de preparação encontra ressonância no pensamento sobre Currículo, de que o pensador Joel Martins cuida, ao refletir sobre a Educação como *poíesis*.

As atividades foram levadas para uma sala de aula de pré-escola, com crianças de 5 e 6 anos de idade. A escolha de crianças não se deu por uma necessidade tipológica, pois entendemos que o domínio do pré-reflexivo não é exclusivo de uma faixa etária, não sendo, por exemplo, o equivalente teórico da fase perceptiva tal como em Piaget. Apenas consideramos que o discurso de sujeitos não educados formalmente em Geometria resultaria em manifestações mais diretas ao vivido nas experiências, sem

a interferência de conceitos já estruturados.

Foram projetadas nove atividades para a produção de dados que incitariam posteriores reflexões: barbante - fios de barbante e elástico abertos e fechados para receberem os corpos em movimento das crianças; sólidos - formas sólidas diversas, dispostas a organizações possíveis pelas crianças; cone - exploração motora e gráfica do rolamento peculiar dos cones; quesólido - os mesmos sólidos para a exploração de suas características descritas oralmente pelas crianças; pátio - círculos desenhados no chão para receberem cada criança, como vértices formando aproximadamente um heptágono regular; exploraram-se direcionamentos, posicionamentos e organizações; cubo - varetas de churrasco, juntadas em vértices feitos com tubos de borrachas de garrote, permitiram organizações poliédricas, dentre as quais um cubo previamente desenhado foi a principal; desconstrução - o mesmo material retornou para exploração desconstrutiva do nome 'cubo'; tesoura - a Tesoura de Nürenberg foi planejada com palitos de picolé furados nas pontas - e articulados com pequenas porcas e parafusos, e permitiu explorar direções, ângulos, rigidez, sombras, entre outros aspectos do material multiarticulado; gol - atividade feita a partir do gráfico, com base em um projeto de traves para a escola; do gráfico chegou-se até movimentos.

Em todas as atividades, preocupou-se em fazer o mínimo de indicações para dirigir as ações. Apresentava-se o material, o que, em geral, já era o bastante para que as crianças deslanchassem em explorações. Algumas vezes uma ação do pesquisador ajudava a criar o entorno, como o contar de uma história relativa a tesoura, nesta atividade. O sol que veio brilhar na janela sobre a mesa, quando já se preparava para guardar o material de uma atividade, reiniciou o envolvimento das crianças, que passaram a explorar semelhanças e distinções projetivas. A atividade gol não foi projetada: ela aconteceu em troca de outra planejada para um dia no qual as crianças estavam excitadas com as finais do campeonato paulista de futebol.

O tratamento dos dados obtidos em gravações audiovisuais se iniciava com a descrição das informações tal como estavam gravadas. Foi um processo lento, já que se premiou o aproveitamento de todo gesto, movimento, grafismos, fala e feições de todas as crianças em cena. Esse aproveitamento, uma opção metodológica afim a atitude fenomenológica, acabou levando a organização dos dados para um tratamento

especialmente desenvolvido para este trabalho⁵.

Esse tratamento de dados recebeu a denominação de Cenas Significativas. Elas permitem que se captem os significados atribuídos pelos sujeitos num movimento mais global, quando unidades de significado (uma fala, um gesto, etc.) enfatizadas não dão conta das manifestações intersectadas que brotam de ações em grupo. Em inúmeros exemplos dos dados de nossa pesquisa de campo, o gesto de uma criança tinha complementaridade numa fala, numa reticência, num silêncio de outra.

Em decorrência disso, as manifestações da espacialidade das crianças não foram interpretadas de forma cristalizada. Mesmo com um sentido comum tornando compreensivo o diálogo entre duas crianças, as vezes, ocorreu de uma criança estar no campo epistemológico do euclidiano e outra estar no projetivo. Essas mostrações convergentes foram corriqueiras e deram um tom para as análises empreendidas na tese, diferenciando-a das investigações que procuram as marcações cronológicas do pensamento geométrico em suas várias formas de acontecer. Em outras palavras, as crianças investigadas não abdicam, no domínio do pré-reflexivo, de nenhuma das formas epistemológicas - que conhecemos como afins, topológicas, euclidianas e projetivas - para dar conta de suas organizações espaciais do mundo em que vivem, para compreendê-las e comunicá-las aos outros.

Essas manifestações das crianças foram geradoras das ideias que apresentavam os seus modos de espacialização, segundo nosso discernimento. Com a riqueza delas no espaço vivido em que foram produzidos os dados, os apontamentos da nossa interpretação não se dirigiram apenas a esfera do geométrico. Junto com organizações espaciais como germens antepredicativos de uma articulação geométrica - tais como ângulos, rotações, paralelas, semelhanças, etc. -, os movimentos, o tempo do falar e do agir, a posição e a direção do corpo-próprio, entre outras caracterizações, apontavam para a dimensão do espaço vivido no ambiente de diálogo das atividades, numa íntima proximidade com o estar presente de cada um nas ações; essas caracterizações, presentes continuamente nos dados, mostrararn o fundamento existencial das crianças que espacializavam, ao se porem como referenda própria, ao se dirigirem ao outro, ao se aproximarem ou se afastarem do outro, enfim, ao construirem um espaço real,

⁵ Também junto ao trabalho da professora Rosa Monteiro Paulo. Os estudos e resultados estão em DETONI, A. R. & PAULO, R. M. *A organização dos dados da pesquisa em cena*. In: BICUDO, M. A. V. **Fenomenologia, confrontos e avanços** (op. cit.), p. 141 a i 67.

contemporâneo ao conhecimento dele.

São essas ideias, vividas nas atividades, que tomamos como convergências em direção ao clareamento da interrogação que norteou a pesquisa. Na pesquisa qualitativa, feita em bases fenomenológicas, preferimos chamar essas convergências de **categorias abertas**; não são categorias que se descobre serem elementos constitutivos do fenômeno buscado. Não são todas as categorias, pois o pesquisador não tem certeza de que conseguiu discernir a totalidade do fenômeno, nem são universais, no sentido de que o mesmo fenômeno, a outro olhar, poderia favorecer outras interpretações. Apenas elas contribuem para que o pesquisador atribua novos significados às suas inquietações. O fenômeno interrogado passa a ser compreendido em um nível mais alto, e a trajetória do desvelamento desse salto e a contribuição que o pesquisador fenomenólogo tem a dar para a sua comunidade científica.

Interpretações abertas pelos dados da Pesquisa

As análises de nossa pesquisa apontaram para três grupos de convergências: o existencial, o das formas pré-geométricas mais gerais e o das formas mais específicas. No primeiro grupo, estão as caracterizações espaciais do ser da *pré-sença*, que vimos como inexoráveis ao corpo-próprio que se faz no mundo em organização espacial. As categorias abertas desse grupo nos mostram o pano de fundo para a espacialidade, apontando atitudes que podem ser explicitadas nos métodos criados para essa organização, a partir da qual o ser que se localiza, se direciona a algo, ao outro, que está consigo na experiência vivida; essa experiência cria seu tempo próprio, vivido em movimentos harmônicos, harmonia com as falas que nomeiam sem conceituar e com as expressões gráficas; falas e desenhos que não conseguimos analisar senão imbricados de gestos e movimentos.

As caracterizações são existenciais porque os sujeitos estão se fazendo enquanto espacializam. Assim, nunca tomamos as expressões gráficas das crianças pesquisadas como apenas *representações*, como se elas, por esse meio, apenas buscassem o retrato epistemológico da experiência da espacialização. O espaço gráfico, que tem seu movimento e tempo próprios, é peculiar e afim à caracterização geral da *pré-sença*.

Nossa ênfase ao ver o espaço se fazendo junto com o sujeito que se presencia nesse ato fez-nos pôr em relevância as nomeações das crianças. Sendo presente em

quase todas as pesquisas, o ato de nomear, para nós, nunca foi conceitual ou peremptório. Como diz Merleau-Ponty, as crianças sempre praticavam a *fala autêntica*, isto é, um discurso em *pro-jeto*, testando sua compreensão, falando junto ao colega, espacializando nessa fala, que também é um *gesto*.

Enquanto as categorias abertas do primeiro grupo mais se aproximam de atitudes, as do segundo grupo já podem ser discernidas como *formas*, segundo o que nosso olhar e nossa cultura científica permitem.

Essas formas mais gerais do pré-geométrico se manifestam na intenção de as crianças articularem, compreendendo e comunicando umas as outras as organizações espaciais em suas ações. Comparações são efetuadas no jogo intuitivo que busca invariações nos fenômenos espaciais vividos; para fazê-las, as crianças lançam mão de suas experiências já vividas ou as que vêm no diálogo com o outro. Em várias atividades aconteceram convergências de comparações de distintas naturezas, por exemplo, o convívio de discernimentos topológicos com euclidianos, mostrando algumas faces de um determinado objeto focado, o que possibilita um salto em termos de organização espacial.

Enfatizamos, também, a correspondência como uma categoria aberta por seu poder de multiplicação da espacialidade sentida. A homologia, por exemplo, é um exercício de correspondência vivida, quando uma criança localiza no colega a posição estendida de seu corpo-próprio, enquanto os dois estabelecem tensões espaciais aproximadas. Outro exemplo é a biunivocidade, ou a percepção de relações par-a-par, momento de convergir duas estruturas para um salto comum a um nível mais articulado de compreensões. Como todas as manifestações ocorridas na pesquisa, nenhuma explicitação conceitual foi necessária para esse exercício das crianças.

Outro aspecto pré-geométrico manifesto nos dados da pesquisa foi o modo como as crianças vivenciaram a regularidade; são movimentos, gestos, falas e desenhos que nos mostram a compreensão dessa atitude por elas, quando corpos convivendo em uma mesma configuração tensionam-se para buscar a regularidade poligonal ou circular, ou mãos livres riscam paralelas no ar. Reconhecemos, nas crianças de nossa pesquisa, os germes pré-reflexivos de toda elaboração futura para os objetos geométricos que se destacam por suas regularidades.

Outra forma pré-geométrica mais geral que destacamos foi a planicidade;

mesmo não podendo definir o que é um piano, todas as crianças tacitamente acordam pela bidimensão quando uma atividade assim o requer. Em outros momentos, a função metodológica de um piano se manifesta em novas especializações envolvidas com seções projetivas.

As crianças explicitam, ainda que não conceitualmente, quando uma ação requer o discernimento da profundidade. Esta não é uma mera dimensão geométrica: ela indica um novo campo de atribuição de significados - inclusive de novos movimentos - quando é pertinente, isto é, nunca é uma terceira dimensão somada a outras duas e derivada delas.

No terceiro grupo de convergências, enfatizamos categorias abertas da espacialidade que encontram *formas* mais específicas da nossa cultura geométrica. Longe de querer fazer coincidir os discursos das crianças com essa cultura, o que tencionamos foi mostrar como crianças não educadas formalmente em Geometria já articulavam sua organização espacial em formas pré-reflexivas. Com essa ênfase, entre outras análises possíveis, pudemos contribuir para o descrédito das opções didático-pedagógicas que privilegiam o ensino da Geometria pela via conceitual, que se desfaz dessa base construída no vivido.

Situações envolvendo a ideia de ângulo foram expressivamente vividas em gestos e movimentos, sempre que essa ideia era uma articulação essencial nas atividades de pesquisa. O paralelismo nunca emergiu como tema proposto; nas ações empreendidas pelas crianças, ele aparece sem ser necessário se correlacionar com a equidistância, por exemplo: muito antes de seu conceito, ele foi um correr macio de mãos, indicando direções ou regularidades.

As crianças manifestaram originalmente a igualdade, quando esse modo de espacializar se prenunciava, em momentos poligonais, angulares, de proximidade e de direção; muitas vezes, a igualdade se mostrava como método, semelhantemente ao esforço de Euclides em formular sua sistemática teórica. Com a mesma desenvoltura, elas apresentaram as possibilidades da homotetia, explorando, assistematicamente, os posicionamentos homólogos e avançando bem tipicamente nas formulações que são vistas no ensino da Geometria.

As atividades de pesquisa puderam ratificar a relevância que a ciência geométrica dá à circularidade. As crianças confirmaram, no domínio do pré-reflexivo,

como esse aspecto do espaço e de seu cotidiano, vindo a ser, de múltiplos modos - em características euclidianas e projetivas - um fundamento de expressividade do corpo-próprio. O olhar de pesquisador teve de estar atento a manifestações não óbvias, como quando uma criança, lidando nas mãos com um poliedro regular, dizia: "ele gira", como a dizer: "não é esfera, mas admite uma circunscrita".

Por diversas vezes as crianças tomaram como método ações empregadas no ensino regular da Geometria. Enfatizamos a simetria e a rotação, impressionados com a maneira pela qual os sentidos dessas transformações alcançavam articulações de alto nível. As crianças não só identificaram simétricos e rotacionados como operaram com seus invariantes; mesmo sem falar em eixos, centros e medidas, atribuíram significados, às vezes, além desses elementos.

Por fim, colhemos manifestações de projetividade e de topologia. Nossos dados descaracterizaram análises que ensejam uma cronologia genética para essas manifestações e o campo do euclidiano: em vários momentos, tendo uma mesma ação em foco, crianças diversas se pronunciavam em cada um desses campos, aparecendo eles como dimensões complementares para dar conta da complexidade da ação.

Sínteses Transitórias

As interpretações possibilitadas pelo trabalho teórico e de pesquisa de campo que empreendemos se encaminharam para contribuições no âmbito da Filosofia da Educação Matemática. Fortemente sugeridas nas análises, as formas elaboradas da espacialização no domínio do pré-reflexivo, muito antes de direcionarem propostas didáticas específicas, delineiam um campo de opções para o professor de Matemática notadamente, mas sem restrições ao que lida com as séries mais iniciais da carreira matemática escolar do aluno.

Ao tomar o **espaço** como objeto da ciência com a qual lida, o professor deve fazer sua opção pedagógica por um começo e por um processo de construção didática. A opção mais formalista, a que se ampara na construção histórica euclidiana do corpo axiomático-conceitual, dita *tradicional*, é um posicionamento que baliza os resultados de nossa pesquisa. O tradicional tem uma visada importante para a ciência, se se tem como meta a aquisição pedagógica do patrimônio cultural ocidental da Geometria.

Como contribuição, mostramos que a construção do pensamento geométrico tem

outra história, tão rica e significativa como a patrimonial: a historicidade dos sujeitos, que espacializam contemporaneamente ao tempo e ao espaço vividos. A grande vantagem dessa visão, para uma opção pedagógica, é que ela vai encontrar o aluno no ato de construção do conhecimento, que se dá junto ao ato de construção da realidade. Dessa maneira, a Matemática que nasce não vem exterior a pessoa, isto é, não é um tributo do aluno à cultura. Nesse caminho, o conhecimento recupera a dimensão ética, pois que é um constructo intersubjetivo, portanto, inexoravelmente contextualizado, sem necessidade de vetores impertinentes ao discurso que cria.

Por fim, nesse modo de conceber a Educação Geométrica, ampliamos a questão do ensino de Geometria para além dos aspectos puramente epistemológicos, que - acertadamente - cuidam do que e como aprender, chegando ao ser cognoscente, isto é, o ser que se constitui como complexa subjetividade enquanto conhece.

Referencias Bibliográficas:

BICUDO, M A V. & ESPOSITO, V H C. (org.). **Pesquisa qualitativa em Educação: um enfoque fenomenológico**. Piracicaba: Ed. Unimep, 1990.

BICUDO, M A V. **Fenomenologia, confrontos e avanços**, são Paulo, Cortez. 2000.

FREUDENTHAL, H. **Didactical phenomenology of Mathematics structures**. Dordrecht: D, Reidel Publishing, 1983.

HEIDEGGER, M. Ser e tempo. Petropolis: Vozes, 1999. v.1 e v. 2.

HUSSERL, E. Origin of Geometry, in: DERRIDA, J. **Edmund Husserl's Origin of Geometry: an introduction**. Lincoln: University of Nebraska Press, 1989.

MARTINS, J. **Um enfoque fenomenológico do currículo: Educação como póiesis**. São Paulo: Cortez, 1992.

MERLEAU-PONTY, M. **Fenomenologia da Percepção**. Rio de Janeiro: Freitas Bastos, 1971.

PIAGET, J. & INHELDER, B. **A representação do espaço na criança**. Porto Alegre: Artes Medicas, 1993.

POINCARÉ, H. **O valor da ciência**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1988.