ISBN 978-85-89082-23-5

Funções: Significados Circulantes na Formação de Professores[1][2]

Vera Clotilde Carneiro[3]

Patrícia da C. Fantinel[4]

Rute Henrique da Silva[5]

Resumo

Este texto relata um estudo de caso desenvolvido no Instituto de Matemática da UFRGS, com o objetivo de identificar e descrever diferentes significados para a noção de "função", produzidos e circulantes no interior do Curso de Licenciatura. A pesquisa tem como teoria de base o Modelo Teórico dos Campos Semânticos e analisa a produção de significados em dois contextos diferentes: leitura e análise de material indicado ou produzido pelos professores do Curso e informações de alunos formandos. Emergem das análises Campos Semânticos com maiores limites epistemológicos - Campo das Representações, Campo das Aplicações e Campo dos Diagramas - e outros mais amplos - Campo da Relação Unívoca entre Variáveis, Campo Elemento/Conjunto e Campo da Transformação - considerados campos preferenciais e que dão conta da maioria das questões relativas a noção de função.

Abstract

This article reports on a case study developed in the Institute of Mathematics of the Federal University of Rio Grande do Sul, Brazil, that aims to identify and describe different Semantic Fields about the function notion, produced during activities pre-service education for mathematics theachers. The theoretical basis for this research is the Semantic Fields Theory Model. The analysis is centered on teaching materials and students information. The results show some limited fields, like the Representation, the Application and the Diagrams Semantic Fields. Otherwise, other fields are described and considered preferential in teachers education. They are the Variables Semantic Field, the Element/Set Semantic Field and the Transformation Field.

Introdução

A investigação se justifica quando questionamos a respeito do conhecimento que os professores estão produzindo durante sua formação, ligados a tópicos concretos de Matemática. Entre estes, optamos por enfocar a noção de "função", um "*conceito vivo*", nas palavras de Garcia Blanco (1998, p.9), dos mais importantes e centrais em todos os níveis. Nesta linha, muitos educadores matemáticos, hoje, preocupam-se com os

---

[1] Digitalizado por Edinei Reis e Renato Marcone.
[2] Projeto GPA-MAT-UFRGS, com apoio FAPERGS
[3] Doutora em Educação, Mestre em Matemática, Professora do Instituto de Matemática da UFRGS, veraclot@vortex.ufrgs.br
[4] Mestre em Educação Matemática, Professora do Centra Universitário La Salle, RS
[5] Mestre em Educação Matemática, Professora do Centra Universitário La Salle, RS

processos de ensino e aprendizagem de funções (PONTE,1990; SILVA, 1992; CARNEIRO, 1995; ZUFFI, 2001).

A presente pesquisa teve origem em dois grupos de questões norteadoras: mais gerais e mais específicas. As questões mais gerais dizem respeito às possibilidades de realização de uma pesquisa educativa[6] em Educação Matemática no interior do Instituto de Matemática. As questões mais específicas nasceram na sala de aula, lugar de origem natural de todas as pesquisas educativas. Percebemos que alunos da disciplina Matemática Elementar, primeiro semestre do curso de Licenciatura, após muitas aulas no tema funções, resolviam alguns tipos de questões, justificando a resolução, mas não resolviam outros, como se tratasse ali de outro conhecimento.

Em geral, para o professor de Matemática, na Universidade, quem entende a definição mais geral de função deveria estar apto a responder a qualquer questão a respeito do tema. Os erros dos alunos seriam, assim, devidos a falta de compreensão do conceito. Por outro lado, acreditamos que o professor da área de Educação Matemática irá analisar e tentar entender o erro e perguntar pelas contradições. No que consiste uma definição dita "mais geral"? Isso quer dizer que existem diferentes definições? Diferentes definições encerram **diferentes significados**? Quando se fala de **conhecimento e de significado**, do que estamos falando? Qual a relação entre conhecimento, significado, ensino e aprendizagem de uma determinada noção matemática, como a noção de funções? Que significados são atribuídos ao objeto "função", durante a formação de professores de Matemática, no curso de Licenciatura, da UFRGS?

Na tentativa de desenvolver uma pesquisa, atendendo as questões gerais e particulares, colocadas acima, o Modelo Teórico dos Campos Semânticos (MTCS) surgiu como teoria forte, já validada, adequada e coerente. A pedra fundamental desta teoria está nas noções de conhecimento e de significado, termos bem definidos, com sentido diferente daqueles emprestados pelo senso comum. Além disso, o MTCS

[6] Entendemos por pesquisa educativa aquela que educa, cujos resultados podem vir a causar alguma transformação no ensino/aprendizagem na sala de aula, alvo da pesquisa. Neste caso, sala de aula do Curso de Licenciatura em Matemática, numa disciplina de conteúdo específico. Para garantir algum efeito, neste meio, uma pesquisa deste tipo, tem que ter garantia de cientificidade. Que requisitos são estes numa pesquisa educativa em Educação Matemática? Acreditamos que uma pesquisa deve estar baseada numa teoria forte, que já tenha sido validada pela comunidade de Educação Matemática, coerente, autônoma, completa. Um outro requisito e a reprodutibilidade. A metodologia deve poder ser aprimorada e repetida, em outros contextos/conteúdos/questões, contribuindo para construção de um conjunto de resultados amplo e coerente.

também sugere caminhos para aplicar resultados da pesquisa para modificação da sala de aula e do processo de ensino e aprendizagem.

Produto extra desta pesquisa, deu-se a apropriação do MTCS como ferramenta de investigação. Assimilando os conceitos e a linguagem, a teoria foi adaptada aos objetivos do grupo e no interesse maior de causar efetiva mudança na formação de professores de Matemática. Desenvolvemos uma metodologia própria de pesquisa, que pode ser reproduzida em outras situações e útil para se fazer a análise dos múltiplos saberes e conteúdos que fazem parte do currículo especifico do Curso de Licenciatura.

Modelo Teórico dos Campos Semânticos

Na base deste Modelo esta uma concepção muito particular de CONHECIMENTO: conhecimento é um par, formado por uma crença/afirmação - que é uma crença que é afirmada - junto com uma justificativa para ela. Crenças semelhantes, com justificativas diferentes, formam conhecimentos diferentes.

Uma segunda chave para o MTCS é a compreensão do que e SIGNIFICADO: significado é a relação entre a crença/afirmação e a justificativa, num certo conhecimento. É a maneira de manter juntos crença e justificativa.

Um CAMPO SEMÂNTICO é um modo de produzir significado; corresponde a possibilidade de produzir justificativas e de enunciar crenças. Uma mesma crença/afirmação pode ser justificada dentro de diferentes Campos Semânticos, porém para cada justificativa corresponde a diferentes conhecimentos.

O conceito de CAMPO SEMÂNTICO indica que qualquer objeto é, em princípio, vazio de significado, mas, culturalmente, existem situações que podem ser mais fortemente associadas com algum Campo Semântico do que outras. Os diferentes significados constituem conhecimentos separados entre si. Não são necessariamente alcançados como efeito de um esforço de abstração do estudante, que é apresentado à definição formal de "função".

Nesta pesquisa, apresentamos aos estudantes/informantes situação variadas que dizem ou não respeito a funções. Justificativas foram elaboradas pelos sujeitos envolvidos na atividade de produzir significado para o texto "*Esta situação diz respeito à função*". Cada situação pode ser pensada como um texto que é colocado como demanda para a produção de significados.

Na análise deste material, consideramos cada resposta (falsa ou verdadeira, não importa) como um enunciado, uma crença-afirmação – "Isto é ou não função". Vinculando crença-afirmação com a justificativa do estudante, extraímos um conjunto de Campos Semânticos para a noção de função.

A metodologia de análise, para esta pesquisa, foi delineada a partir de um esquema básico, inspirado nas recomendações de Lins (1994), Lins e Gimenez (1997) e na Dissertação de Mestrado de Silva (1997). Primeiramente tentamos identificar os **objetos** que são constituídos pelo informante quando formulam **frases geradoras** para a noção de função, do tipo: "*Função é...*" ou "*Isto é função porque...*". O conjunto de objetos forma um **núcleo**. A atividade de atribuir significado à noção de função, no interior deste núcleo, usando os objetos ali presentes, e o **Campo Semântico**. Consideramos **estipulações locais**, próprias deste núcleo, as noções que são apresentadas linearmente, precedendo a noção de função, e que são constitutivas dessa noção. Quando objetos são constituídos, existe uma particular **lógica de operações** que se aplica a eles, um modo peculiar de manipular os objetos, coisas que se podem fazer com eles, no interior do núcleo. **Campos preferenciais** são campos que parecem encerrar os significados desejáveis para um professor de Matemática. **Limite epistemológico** do Campo refere-se à impossibilidade de produzir significado para um dado enunciado, utilizando apenas os objetos daquele núcleo. **Obstáculo epistemológico** do informante refere-se a limitações pessoais, não inerentes ao Campo.

Por que esta teoria e não outra? Na verdade, não são muitas as teorias fortes, bem acabadas, coerentes, envolvendo os conceitos de conhecimento, aprendizagem e significado, que sejam adequadas e já tenham sido utilizadas na pesquisa em Educação Matemática, ou seja, já avalizadas pela comunidade da área.

Podaríamos ter recorrido a teoria do Pensamento Matemático Avançado, seguindo os trabalhos de Tall e Vinner, nos quais são introduzidos os conceitos de imagem conceitual e definição conceitual. Segundo os autores, para que um conceito seja compreendido não basta a definição conceitual, é necessário que o sujeito tenha imagens conceituais, e vice-versa. Salientam a difícil transição do pensamento intuitivo (constituído de imagens) para o avançado (caracterizado por definições matemáticas precisas e deduções lógicas de teoremas baseados nelas).

Poderíamos ter seguido a linha proposta por Zuffi (2000), que utiliza concepções de ação, processo e objeto para o conceito de função, e analisa quais delas são enfatizadas pelo professor, através da linguagem matemática explicita que ele constrói para funções.

Optamos pelo MTCS, porque institui conceitos que se adaptam muito bem às questões específicas da pesquisa, aquelas que tratam de conhecimento e de significados. Diferentemente de Tall e de Zuffi, para Lins, o objeto não e pré-existente e, sim, constituído pelo sujeito, o que a nosso ver, incentiva o professor a ouvir o aluno entendendo-o como um sujeito único, produtor de conhecimento. Além disso, um professor que trabalha seguindo as linhas desta teoria pode vir a desenvolver ideias diferentes das tradicionais a respeito da pratica docente, da sala de aula, dos papéis do professor e do aluno e da própria concepção de erro.

Objetivos da Pesquisa

O estudo desenvolveu-se com dois objetivos principais:

a) apropriar-se dos conceitos presentes no MTCS, aplicando-os numa pesquisa de âmbito restrito;

b) identificar e descrever alguns dos campos semânticos que mais se destacam, entre os estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS, e que constituem o objeto "função matemática" de diferentes modos.

Desenvolvimento da Pesquisa

Uma pesquisa que tem o MTCS como teoria de base traz como ponto de partida perguntas relativas aos significados:

a) Num Curso de formação de professores, que frases podem estar sendo geradas para a noção de função?

b) Os campos semânticos preferenciais do professor, em uma dada disciplina, incluem os significados que ele espera que seus alunos venham a produzir. São estes os significados produzidos por um aluno ao fim do curso?

A pesquisa analisa a produção de significados para a noção de função, em dois contextos diferentes: leitura e análise de material indicado ou produzido pelos professores do Curso; coleta de informações com estudantes, com formandos do ano de 1999 e com recém diplomados, ouvidos no ano 2000.

A investigação se desenvolveu em etapas:

1 - estudantes do Curso ministraram aulas de introdução ao tema função e demonstraram que atribuem diferentes significados a esta noção. Intuiu-se, então, a existência de diferentes Campos Semânticos;

2 - estudantes formandos de 1999 responderam um conjunto de questões (anexo) que possibilitaram gerar frases do tipo: "*Esta situação envolve função porque...*". "*Isto e uma função porque...*". Estas frases geram diferentes Campos Semânticos;

3 - análise de bibliografia e apostilas produzidas ou recomendadas nas disciplinas de Matemática Elementar, Geometria, Cálculo Diferencial e Integral, Equações Diferenciais e Álgebra levando a descrição de possíveis Campos Semânticos constituídos ao longo do curso;

4 - reflexão sobre os processos de ensino e de aprendizagem da noção de funções com elaboração de contribuições para o currículo de um Curso de formação de professores.

Aulas para Introdução da Noção de Função

Numa primeira etapa, ouvimos alunos do Curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS, num ensaio do que seria uma aula, em nível médio, para introduzir o conceito de função. Todos mostraram conhecer e dar preferência para a definição formal de função que parte de conjuntos e elementos: "*Dados dois conjuntos A e B, uma função de A em B e uma relação que associa a cada elemento de A um, e só um, elemento de B.*"

Para exemplificar, todos partiram de diagramas de setas.

Na sequência, os informantes demonstraram ter campos de significados distintos para a noção de função:

1) dando exemplo de função como relação unívoca entre conjuntos discretos, listando pares ordenados;

2) apresentando aplicações em situações do cotidiano, colocadas verbalmente, identificando variáveis, elaborando a partir dali tabelas, gráficos e expressões algébricas para expressar relações entre elas;

ISBN 978-85-89082-23-5

3) enfatizando a noção de função como máquina que transforma um número em outro e recorrendo a metáforas “*se entra laranja, sal suco; se entra tijolo, sai pó*” ; e

4) falando de função como sendo uma equação, enfatizando exemplos algébricos, construção e análise de gráficos.

Os contra-exemplos ficaram restritos ao do diagrama de setas, como se fosse mais difícil apresentar uma relação que não fosse função do que uma relação funcional.

Esta primeira coleta de informações trouxe importantes reflexões. Pareceu-nos que:

a) repetir corretamente uma definição formal de função não significa ter conhecimento sobre funções; b) deter conhecimento amplo e sólido sobre funções significa dar conta dos diferentes significados que podem ser atribuídos a esta noção matemática, e ser capaz de, conscientemente, utilizar um ou outro para atender a diferentes situações/problemas ou para criar diferentes exemplos, em situação de ensino; c) uma “boa” aula de funções, em nível médio exige a construção de muitas situações, ricas de significado, indo além dos diagramas de seta e da mera identificação de pares ordenados; d) um professor de Matemática precisa produzir, durante seu curso, conscientemente, uma coleção de significados para função, devidamente identificados e exemplificados; e) o professor deve dar-se conta da complexidade e da multiplicidade de conhecimentos que estão presentes no processo de ensino/aprendizagem deste conteúdo.

Campos Semânticos Produzidos pelos Estudantes

O **Campo Semântico das Representações** é produzido por vários informantes. Destacamos Alfa que, em dez das onze questões, constitui os seguintes objetos: variáveis, relação entre variáveis, correspondência unívoca, diagrama, gráficos, tabelas e equações. Apenas na questão 4, para analisar diagramas de setas, Alfa constitui outro Núcleo.

As estipulações locais relacionam os objetos, reunindo-os no mesmo Núcleo. No caso de Alfa, encontramos as seguintes: 1 - “*construindo diagramas, gráficos e equações, posso justificar se uma certa relação entre duas variáveis continuas e ou não uma função*”; 2 - “*construindo tabelas, posso identificar padrões, encontrar um termo geral, por meio de uma equação e, assim, justificar se uma certa sequência discreta e* *ou não uma função*"; 3 - "*dada uma equação do tipo y =f(x), para verificar se e uma função, faço o gráfico*"; 4 - "*analiso gráficos vendo se para cada valor no domínio existe apenas um correspondente na imagem*".

Neste Campo, a frase geradora da noção de função relaciona-a com sua representação: *função e uma relação entre variáveis tal que a cada valor da variável de partida corresponde apenas um valor na chegada, e que pode ser expressa em diagramas, gráficos, tabelas ou equações*.

Na sua lógica de operações, Alfa trata de situações aplicadas ou verbais, sempre do mesmo modo; identifica duas variáveis, procura estabelecer relação. Nos problemas de variável continua, busca diagramas, gráficos cartesianos bidimensionais e equações com duas variáveis. Nos problemas de variável discreta, elabora tabelas, identifica padrões e busca o termo geral de uma sequência. Em ambos os casos, o caminho e buscar uma representação para cada situação. Nessa linha, no entanto, aparece uma hierarquia entre as operações, sendo mais importante encontrar a equação.

Alfa recorre à definição de função - para cada valor de x existe um só valor de y - apenas no caso de relações que já estão apresentadas por gráfico cartesiano ou por equação matemática.

Para exemplificar, vejamos a questão 6. A situação é um caso de relação entre duas variáveis - área e perímetro - que não é caracterizada como função. Uma possível justificativa, utilizando objetos constituídos pela fala de Alfa, seria tentar representar esta relação por uma tabela de pontos, construída a partir de vários exemplos de retângulos diferentes, alguns com mesma área, outros com mesmo perímetro. Pode-se, assim, chegar à conclusão que a um mesmo valor de área pode-se associar dois valores diferentes perímetros, e a um mesmo valor de perímetro, podem-se associar dois valores de área. Ou seja, área não é função do perímetro, assim como, perímetro não é função de área. No entanto, na lógica operacional de Alfa, o objetivo principal é equacionar a situação. Nessa direção, identifica variáveis, faz um esboço de um gráfico, desiste dele porque não consegue ali informações conclusivas, procura uma equação relacionando área e perímetro, recorrendo a fórmulas de área e perímetro de retângulos, da Geometria. Após um esforço algébrico infrutífero, presume que a função não existe, mas não tem certeza.

Podemos intuir algo sobre os obstáculos epistemológicos de Alfa, no Campo Semântico das Representações: textos que dizem respeito a relações não funcionais, com variáveis contínuas, como o caso das áreas e perímetros, não tem significado, pois resistem ao esforço de equacionamento. Quando não encontra uma equação ou gráfico, Alfa não consegue atribuir significado para a situação. Pode-se destacar o enunciado de maior status no discurso de Alfa: *Nesta situação posso identificar duas (ou ires) variáveis e construir uma equação para relacioná-las, então eu tenho uma função*, Ou, ainda: *função é uma relação entre duas (ou três) variáveis que pode ser expressa por uma equação matemática do tipo y =-f(x) ou z =f(x,y).*

Esse obstáculo de Alfa não se configura como um limite epistemológico do Campo das Representações, pois o reconhecimento de uma relação nao funcional poderia ser justificada com a construção de uma tabela ou gráfico. Nos limites epistemológicos do Campo, parecem estar textos que se referem a relações entre conjuntos abstratos, textos que se referem a transformações geométricas e funções que resistem a qualquer tipo de representação.

O informante Beta constitui o **Campo das Aplicações**, cujo Núcleo inclui variáveis, relação entre variáveis, modelo e modelagem, exemplos da Física.

Como exemplo, analisando um gráfico que não representa função, Beta elabora o seguinte par crença-afirmação/justificativa: "*O gráfico pode representar uma função porque podemos imaginar que a função descreve a velocidade de um móvel*". Pensando na definição usual de função, um professor poderia dizer que Beta comete um erro. O gráfico não representa uma função, pois, para um mesmo valor de x, existem dois valores de y. Para ele, esta condição não é o mais importante. Importante é encontrar algum exemplo concreto/aplicado que se adapte ao texto.

Nesta fala, as estipulações locais dizem respeito à atividade de modelagem matemática, uma espécie de esforço para matematização dos fenômenos das outras ciências. Beta utiliza as expressões "modelagem" e "modelar" no sentido de encontrar uma expressão matemática para uma função: "*modelar é encontrar uma fórmula matemática para uma situação real, com variáveis conhecidas*".

Por exemplo, na situação 6, a respeito da relação entre perímetros e áreas de retângulos diversos, Beta afirma que área é função de perímetro, justificando-se com a modelagem: "*para comprovar devemos modelar a função*" .

ISBN 978-85-89082-23-5

Os objetos aqui apresentados constituem um núcleo, que denominamos **Núcleo das Aplicações**. À atividade de produzir significado em relação ao Núcleo das Aplicações, chamamos de Campo Semântico das Aplicações. A frase geradora da noção de função, neste Campo, como foi formulada por Beta, refere-se a ideia "*função é uma relação entre variáveis que pode ser pensada como modelo matemático para alguma situação real*".

Na lógica de operações evidenciada por Beta, o primeiro passo é dar-se conta que o texto pode ser relacionado com algum exemplo da Física ou de outras ciências. Reconhecendo um exemplo concreto, Beta identifica variáveis e, ao que parece, qualquer relação entre elas é uma função: "*podemos encontrar uma relação (função) que venha a relacionar as medidas e áreas de diversos retângulos com seus perímetros, para isso devemos modelar a função*".

Evidencia-se, na fala de Beta, a construção de significados não desejáveis, que entram em conflito com as definições usuais de função. Para Beta, encontrada uma situação real e identificadas as variáveis, parece que sempre é possível obter uma função. É como se todo esforço de modelagem levasse a uma função, e toda relação concreta, exemplificada, fosse uma função. Beta sai dos limites do Campo e analisa as questões que expressam relações por meio de diagramas e de gráfico, tratando toda relação como função. Todos os diagramas, para ele, representam funções. Igualmente, todos os gráficos. Conforme suas próprias palavras, "*função é o que relaciona duas variáveis*", "*variável é uma grandeza física que assume diferentes valores*".

Temos consciência de que estamos definindo um Campo Semântico para a noção de função que descaracteriza este conceito, do modo como o tratamos na academia. Deixamos este Campo emergir neste trabalho para sermos fiéis à produção de significados do estudante Beta. Este é professor diplomado no curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS. É preciso dar conta do discurso por ele produzido, que pode ser um efeito de uma tendência atual de supervalorização das aplicações da Matemática como possibilidade para um ensino contextualizado dessa disciplina. Nessa linha, são selecionados, para o ensino, os conteúdos matemáticos que são úteis no mundo das aplicações. Ao pensar no ensino de funções, por exemplo, são postos de lado os exemplos mais abstratos ou que não fazem parte da Matemática utilitária. Essa tendência pode estar contribuindo para a construção de significados que de certa forma negam os conceitos fundamentais.

Os limites epistemológicos do Campo Semântico das Aplicações estão nos textos que se referem: a) as funções da Matemática Pura, para as quais não se encontram exemplos concretos, funções que não se referem a aplicações da Matemática. b) as relações cuja análise não envolve identificação de variáveis, como, por exemplo, as transformações geométricas e os diagramas de setas.

Analisando textos em forma de diagramas de setas, os informantes foram unânimes em constituir os seguintes objetos: elemento, conjunto, conjunto de chegada, conjunto de partida, associação entre elementos, correspondência entre elementos, restritos ao mundo dos conjuntos finitos, representados por diagramas. Importa destacar que em nenhum outro dos textos propostos houve referenda a estes objetos.

Esses objetos constituem núcleo que denominamos **Núcleo dos Diagramas**. À atividade de atribuir significados em relação a este núcleo, chamamos de **Campo Semântico dos Diagramas**. Estipulações locais referem-se às características do conjunto de partida e às setas que partem dai. Contam-se os elementos, contam-se as setas.

Os alunos informantes da pesquisa analisaram um diagrama de setas, e afirmaram: "*Isto é uma função*", com a seguinte justificativa: "*a cada elemento do conjunto de partida é associado/corresponde um e só um elemento do conjunto de chegada*".

Neste Campo, a frase geradora envolve conjuntos: "*função é uma relação entre dois conjuntos A e B, tal que a cada elemento de A corresponde um e só um elemento de B*".

A lógica das operações inclui identificar conjunto de partida, examinar elementos, verificar se todos são pontos de partida de setas, e se de cada um dos elementos só parte uma seta.

Os informantes demonstraram familiaridade com este tipo de texto, sem evidenciar obstáculos. A análise de diagramas de setas é usual, iniciando-se no Ensino Fundamental, na introdução às noções de função. Os limites do Campo estão nas situações que não são expressas por diagramas de setas.

O **Campo da Relação Unívoca entre as Variáveis** é produzido nas falas de diferentes estudantes. Destacamos as informações de Gama, que atribuiu significados a dez dos doze textos propostos, constituindo os seguintes objetos: variáveis, valores, relação entre variáveis, relação unívoca, existência.

Para Gama, qualquer um desses textos pode ser interpretado identificando variáveis x e y, verificando que para cada valor de x existe um único valor de y correspondente. Esses objetos constituem um núcleo que denominamos Núcleo das Variáveis. À atividade de produzir significados, no interior deste Núcleo, denominamos **Campo Semântico da Relação Unívoca entre Variáveis**.

Nesse Campo, a frase que gera a noção de função é aquela que consta em muitos livros de Cálculo: *função é uma relação entre duas variáveis, x e y tal que para cada valor de x existe um único valor de y correspondente*. Para Gama, este é o enunciado predominante, muitas vezes repetido. Por exemplo, para Gama, a questão 6 "*não diz respeito à função porque para um valor da área, 20, por exemplo, tem dois valores do perímetro, 18 e 24 (retângulos 4x5 e 2x10)*".

Neste Campo, a lógica operacional envolve a identificação das variáveis e a indagação a respeito da univocidade da relação entre elas. Não é importante encontrar uma equação ou gráfico, mas, no caso em que eles são dados, faz-se sempre a mesma pergunta - para cada x existe um só y? - não excluindo, ai, as variáveis de R^2 ou R^3.

Este Campo pode ser encontrado nos livros de Cálculo Diferencial e Integral, na bibliografia de Matemática Elementar e em diversos textos relativos a aplicações da Matemática. Os limites do Campo estão nas situações que exigem referência a conjuntos/regiões, elementos/pontos, como, por exemplo, os diagramas de setas e as transformações geométricas. Gama não evidenciou obstáculos próprios pois, diante de questões deste tipo, recorria a outras lógicas de operação.

Campos Preferenciais na Formação de Professores

Optamos, nesta pesquisa, por destacar três campos preferenciais para a noção de função, produzidos e circulantes no curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS, considerando, além das falas dos estudantes, a bibliografia recomendada pelos professores em diferentes disciplinas do curso. Levamos, também, em conta resultados de uma experiência de ensino implementada com alunos de primeiro semestre do Curso, em 2001.

Essa experiência se desenvolveu no interior da disciplina de Matemática Elementar I, num programa que visava a dar oportunidades para os alunos produzirem diferentes significados para a noção de função, mostrando as diferenças, deixando emergir e salientando as lógicas de operações e os limites epistemológicos de cada um deles. Procurou-se enfatizar que existem funções que resistem a qualquer tipo de representação e outras que resistem a qualquer tipo de tentativa de aplicação a um exemplo concreto. Trabalhamos algumas das funções básicas a partir de situações-problema, típicas das disciplinas das áreas de Cálculo e Álgebra, do currículo do Curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS, salientando o(s) Campo(s) Semântico(s) no(s) qual(is) estas questões adquirem significado e podem ser resolvidas. Um dos objetivos foi ampliar os significados usuais atribuídos para as funções elementares, ampliando seus domínios e imagens para dimensões maiores, introduzindo funções complexas de variável complexa e relacionando-as com transformações geométricas.

Das análises, emergiram três campos de significados:

1. Campo Semântico da Relação Unívoca entre Variáveis: Dadas duas variáveis x e y, y é função de x se cada valor de x determina exatamente um único valor de y.

2. Campo Semântico Elemento/Conjunto: Dados dois conjuntos, A e B, uma função f e uma correspondência de A em B que associa a cada elemento x de A um e só um elemento y de B.

3. Campo Semântico das Transformações: Dada uma figura geométrica F (conjunto contínuo de pontos do plano ou do espaço) uma função pode ser vista como uma transformação de F em outra figura T(f) (a imagem da função), através de certas regras.

O **Campo da Relação Unívoca entre Variáveis** já foi descrito anteriormente.

O **Campo Elemento/Conjunto** emerge das definições dos livros de Álgebra. Também aparece na introdução ao tema das funções, em alguns livros de Cálculo, mas esta primeira definição é logo abandonada, dando-se preferência a exemplos e explicações que só tem significado no Campo Semântico da Relação Unívoca entre Variáveis. O Núcleo deste Campo inclui conjunto, elemento, produto cartesiano, par ordenado, relação Unívoca entre conjuntos, correspondência Unívoca entre conjuntos, associação entre conjuntos, aplicação, diagramas sagitais, conjunto de partida, conjunto de chegada, domínio, contradomínio, imagem, gráfico.

As frases geradoras da noção de função, deste Campo se formam com as variações dos termos relação, correspondência e associação: "*função é uma relação (correspondência, associação) entre dois conjuntos A e B tal que a cada elemento de A associa (corresponde) um e só um elemento de B*".

No Campo Elemento/conjunto, as Estipulações locais dizem respeito à noção de relação entre conjuntos, produto cartesiano, igualdade de pares ordenados. Ao se defrontar com uma situação e explicar que ela envolve uma função, o informante vai procurar, identificar e descrever os conjuntos de partida e de chegada, identificar pares ordenados construídos com elementos do conjunto de partida e de chegada, e verificar se para cada elemento de partida existe um e só um elemento na chegada.

As questões que envolvem análise de diagramas de setas adquirem sentido aqui. Num primeiro momento, parecia-nos que as questões que envolvem transformações de figuras geométricas e funções complexas (vistas como transformações de regiões do plano complexo) também poderiam ser atendidas neste Campo, porém o trabalho em sala de aula demonstrou que os alunos que atribuem as funções o sentido de correspondência ou relação entre conjuntos adotam uma "lógica operacional discreta", que não é valida para analisar transformações geométricas. Quando tratam de conjuntos contínuos, eles se restringem às funções com domínio e imagem real. Dada uma função real de uma variável, representada por equação ou gráfico, o caminho de análise é, muitas vezes, o gráfico, e este é visto como um conjunto de pares ordenados de pontos. Alguns destes pontos são destacados, discretizando o gráfico e a própria função. Desta análise discreta, conclui-se que a situação diz respeito a uma função porque a cada elemento do domínio é associado um único elemento no contradomínio. Esta lógica de análise, que denominamos de "lógica discreta", é repetida em outros lugares: no Campo Gráfico Geométrico, ao selecionar alguns pontos do eixo XX para traçar retas verticais e buscar suas interseções com a curva-gráfico; no Campo das Aplicações e no Campo das Representações, ao deduzir uma equação como possível modelo matemático para uma situação concreta, partindo de uma tabela discreta de valores para as variáveis x e y, identificando um padrão e ampliando a relação encontrada, numa hipótese implícita que deve continuar válida para o mundo contínuo. Esta lógica, muitas vezes testada, parece sempre válida e parece dar conta de todas as questões, no entanto, ela não se aplica às questões que apresentam o "problema da compreensão do infinito-contínuo", que vamos logo descrever.

Das análises, emergem limites epistemológicos do Campo Elemento/Conjunto, em três tipos de questões: a) questões da Matemática Aplicada, aquelas que exigem o reconhecimento e definição das variáveis envolvidas; b) questões que envolvem funções entre conjuntos contínuos com dimensões maiores que um, como, por exemplo, funções de variável complexa e transformações geométricas de figuras planas e espaciais; c) questões onde esta presente o desafio de se atribuir sentido a correspondências entre conjuntos contínuos, infinitos e limitados.

O "problema do infinito contínuo" não consegue ser resolvido com a "lógica operacional discreta". Como exemplo, podemos analisar as duas questões seguintes: a) Mostre que a cardinalidade do intervalo (0,1) é a mesma da reta real; b) Encontre uma fonação que transforme um quarto de círculo de raio 1, C1, num meio círculo de raio 1, C2.

Com a lógica discreta, parece que o número de pontos num subconjunto discreto do intervalo (0,1) é sempre superável por algum subconjunto discreto contido na reta real, o que impede a construção de funções bijetoras entre os dois conjuntos. Analogamente, parece que, para cada ponto do destacado no conjunto C1, sempre existirão duas imagens no conjunto C2. O Campo Conjunto/Elemento, como é construído nas atividades propostas pelos livros didáticos da área de Álgebra, não leva a este tipo de questão, não deixa emergir os limites da lógica discreta e propicia a construção de limites epistemológicos marcados pelo problema do infinito-contínuo, em uma ou mais dimensões.

O **Campo Semântico das Transformações** inclui em seu Núcleo as noções de figuras geométricas plana e espacial, transformações geométricas, números complexos, regiões complexas, função complexa e as noções de conjuntos infinitos, contínuos e limitados.

A frase geradora da noção de função institui a ideia de transformação: "*função é uma transformação de uma figura geométrica T em outra f(T), tal que para cada ponto de T corresponde um único ponto em f(T)*".

Neste Campo, as Estipulações locais dizem respeito as noções de transformação geométrica e funções complexas. Ao se defrontar com uma situação e explicar que ela envolve uma função, a lógica operacional do informante consiste em representar de alguma forma os conjuntos de partida e de chegada e analisar a transformação ocorrida, a partir de conhecimento prévio sobre transformações geométricas — translação, rotação, homotetia, reflexão. Se estes são figuras geométricas planas ou espaciais, tenta-se um esboço e/ou uma descrição algébrica com conjunto de pares, números complexos ou ternos. Por exemplo, na questão 2, o conjunto de partida é uma figura geométrica qualquer. Poderíamos esboçar um paralelogramo, por exemplo. A figura é movimentada, sem alteração. Ou seja, ocorre um movimento de translação. A função em pauta é uma translação no plano.

O “problema do infinito contínuo” pode ser resolvido quando se opera neste Campo de significado, porque nas Estipulações locais e no Núcleo encontram-se as noções básicas das transformações da Geometria. A noção de homotetia traz em si a ideia de ampliação das figuras. Nesta ótica, um quadrado de lado 1 pode ser transformado num quadrado de lado 2. Indo mais além na ideia de ampliação, um quarto de círculo de raio 1, CI, pode ser transformado num meio círculo, C2. Nesta ótica, o intervalo (0,1) pode ser ampliado e transformado na reta real. A transformação de “ampliação” é uma função que não é analisável na lógica discreta. Os limites epistemológicos do Campo das Transformações estão justamente nas questões que resistem à representação geométrica e que não envolvem transformações geométricas.

Nesta pesquisa, fica claro que a relação entre transformação geométrica e função não é feita nas disciplinas de Geometria do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS. Para os estudantes informantes, função e correspondência, associação, relação, mas não é transformação.

Considerações Finais e Sugestões para a Formação de Professores

Estes são os Campos Semânticos que emergiram em nossa pesquisa. Cabe salientar que podem existir outros, pois se trata de um estudo de caso. Dentre os informantes, escolhemos três, por considerar que sua fala encerra as contribuições dos demais e permite identificar e descrever diferentes Campos Semânticos, denominados no decorrer do trabalho: a) Campo das Representações; b) Campo das Aplicações; c)

Campo dos Diagramas d) Campo da Relação Unívoca entre Variáveis. Destacamos três Campos Preferenciais na Formação de professores: a) o Campo da Relação Unívoca entre Variáveis; b) o Campo dos Elementos/Conjuntos; c) o Campo das Transformações. Estes três últimos Campos juntos, a nosso ver, dão conta de grande parte dos textos relacionados com função.

Na análise da bibliografia recomendada no Curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS, definimos três grandes áreas: Cálculo; Álgebra; Geometria. Identificamos o Campo Semântico preferencial da Relação Unívoca entre Variáveis com o significado preferencial da área de Cálculo, o Campo Semântico Elemento/Conjunto com aquele priorizado na área de Álgebra, e o Campo das Transformações como sendo produzido nos textos da Geometria.

Percebemos que estes seriam significados que os professores do Curso gostariam que fossem produzidos em suas disciplinas, embora fique claro que os estudantes estão produzindo significados próprios, alguns não desejáveis, como o Campo Semântico das Aplicações, que descaracteriza o conceito acadêmico usual de função. Acreditamos que na Formação do professor todos os possíveis significados devem ser trabalhados, salientados e produzidos, para que o professor fique consciente de tudo que pode ser dito sobre função.

O professor que se da conta dos diferentes Campos Semânticos associados a uma mesma noção pode desenvolver uma concepção diferenciada e atualizada de Educação Matemática, vindo a contribuir na mudança do ensino da Matemática. A sala de aula é lugar de dialogo, o professor é alguém que ouve e o estudante é alguém que fala ou de algum modo comunica seu pensamento. Com relação a avaliação, no MTCS, “acertar” significa que o aluno produziu significado para função coerente com o núcleo de objetos que ele constitui e “errar” significa que a justificativa dada para certa resposta não é coerente com o Campo por ele mesmo produzido. O professor, ouvindo, pode se dar conta de que o Campo de significados do aluno não é desejável, este Campo pode até mesmo contrariar a definição acadêmica formal. E função do professor propor questões que levem à constituição de um novo Campo.

Questionar-se, a respeito do conhecimento que o aluno possui é saudável e inovador. O aluno pode ter um determinado conhecimento e não outro. Um texto pode ter significado para o sujeito que está trabalhando num certo núcleo, e outro texto pode não ter significado, pois, para ser interpretado, o sujeito deveria ter outro núcleo à sua disposição. Cabe ao professor providenciar e dispor das ferramentas necessárias para a construção dos diferentes significados, salientando as diferenças, sem supor que haja trânsito entre eles.

Bibliografia

CARNEIRO, V. Reconstrução de Conceitos: O Uso de Disparadores no Estudo de Funções. **Revista Zetetike**, publicação do Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educação Matemática da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, 1995, ano 3, n° 3, p. 105-112.

GARCIA BLANCO, M. M. **Conocimiento profesional del profesor de Matemáticas. El concepto de función como objeto de enseñanza-aprendizaje**. Grupo de Investigación en Educación Matemática. Universidade de Sevilla, 1998.

L1NS, Romulo. **Eliciting the meanings for algebra produced by students**: knowledge, justification and Semantic Fields. Anais do PME, 1994.

LINS, Romulo e GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

PONTE, Pedro. **O conceito de função no currículo de Matemática**. *Educação e Matemática*, Lisboa, n. 15, 1990, p.3-9.

SILVA, Amarildo Melchiades da. **Uma Análise da Produção de Significados para a Noção de Base em Álgebra Linear**. Dissertação de Mestrado. Departamento de Educação Matemática. Universidade de Santa Úrsula, Rio de Janeiro, 1997.

SILVA, Circe M. Silva da. **O Conceito de Variável e Função**. 1992, 12 p. (fotocopia).

TALL, David, The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof. In: **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. New York: NCTM, 1992, cap.20, pp.495-510,

ZUFFI, Edna. **Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função**. Educação Matemática em Revista, ano 8, n 9/10, abril, 2001, pp. 10-16.

ISBN 978-85-89082-23-5

Anexo

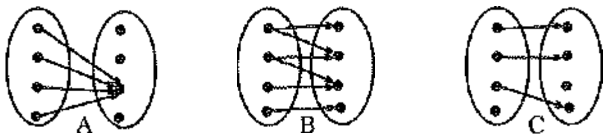
Quais situações abaixo referem-se ao conceito de função e por quê? Nos casos afirmativos, explicite a função. Justifique sua resposta.

1. Um carro se move, numa certa rodovia. O motorista, a cada posto de pedágio, anota a distância percorrida e o tempo de percurso.

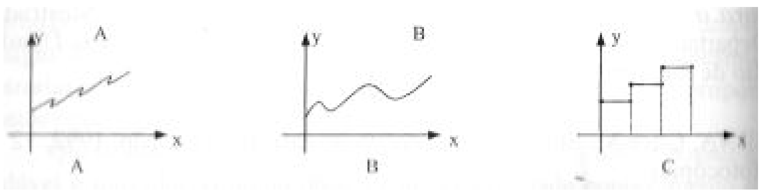
2. Um estudante mostra, na tela de um computador, como movimentar uma figura geométrica, sem alterá-la.

3. Um estudante multiplica, na tela do computador, uma pequena figura, formando um mosaico.

4.



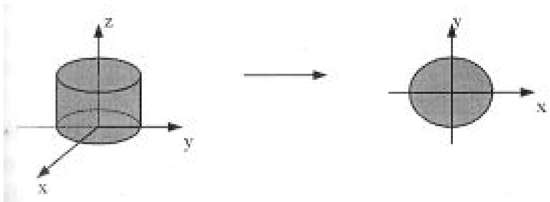
5.



6. Um estudante elabora tabela para relacionar as medidas de área de diversos retângulos com seus perímetros.

7. Um cientista elabora tabela para representar o crescimento de uma certa população de animais, sob observação.

8.



ISBN 978-85-89082-23-5

9. Numa seção eleitoral constatou-se que ninguém votou nulo ou em branco. Considere a correspondência que associa cada candidato ao seu votante.

10. A relação f: R → R

$$\begin{cases} -3x^2 + 3, x \geq 0 \\ 5, x < 0 \end{cases}$$

11. Seta T: $R^2 \rightarrow R^2$ onde