ISBN 978-85-89082-23-5

O Uso de Espelhos e Caleidoscópios em Atividades Educacionais de Geometria para 7ª e 8ª séries[1]

Claudemir Murari[2]

Geraldo Perez[3]

Resumo

Neste artigo, são sugeridas algumas atividades educacionais para 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental, empregando o método de ensino Resolução de Problemas. Espelhos e caleidoscópios são utilizados como instrumentos facilitadores no ensino-aprendizagem de alguns conceitos de Geometria, especialmente simetria, polígonos regulares e pavimentações do plano. Inicia-se trabalhando com um e dois espelhos, cuja seqüência de atividades está relacionada à necessidade de apreensão de conceitos preliminares para o estudo do tema final "pavimentação do plano por polígonos regulares", através de caleidoscópios com três e quatro espelhos, respectivamente.

Abstract

In this article are suggested some educational activities for 7th and 8th grades, in which mirrors and caleidoscopes are used as facilitating tools for the teaching and learning of some concepts of geometry, in particular symmetry, regular polygons and paviment of the plane. The work starts with one and two mirrors, in which the activity is related to the need of apprehension of preliminary concepts for the study of the final theme "paviment of the plane" through caleidoscopes with three and four mirrors.

Introdução

O problema central deste trabalho consiste em apresentar algumas atividades educacionais à luz de uma prática pedagógica diferente da tradicional, fundamentada no método de ensino Resolução de Problemas, em que utilizamos espelhos e caleidoscópios no ensino-aprendizagem de alguns conceitos de Geometria para o Ensino Fundamental.

Compilamos alguns trabalhos utilizados em experiências com alunos na rede estadual de ensino, minicursos e comunicações, cujas atividades estão baseadas, em parte, em resultados matemáticos originais, presentes em uma tese de doutorado e em artigos divulgados em revistas científicas constantes da bibliografia.

O uso destes instrumentos no ensino de Geometria não é recente e tem sido

---

[1] Digitalizado por Lucieli M. Trivizoli e Marco A. Escher.

[2] Professor da Pós-Graduação em Educação Matemática e do Departamento de Matemática, IGCE, UNESP – Rio Claro/SP.

[3] Professor da Pós-Graduação em Educação Matemática e do Departamento de Matemática, IGCE, UNESP – Rio Claro/SP.

recomendado por vários pesquisadores interessados no assunto, como por exemplo, Kingston (1957), Coxeter (1961), Marion Walter (1966), Jacobs (1974), Alspaugh (1976), Daffer and Clemens (1977), Barbosa (1993) e Murari (1999).

Através do trabalho com espelhos, o ensino decorre de ações concretas, possibilitando um desenvolvimento da aprendizagem superior àquele produzido por um ensino verbal e métodos dedutivos. Como veremos, muitas são as vantagens da utilização desse tipo de material, mas queremos ressaltar a possibilidade de realizar as atividades em grupos, aplicar o método de Resolução de Problemas e proporcionar experiências concretas, através das quais o aprendizado é construído. Destaca-se, também, a possibilidade da visualização, fator tão importante na apreensão e na construção das relações dos conceitos geométricos.

A estratégia de ensino da Matemática através da Resolução de Problemas pareceu-nos a mais indicada para nossas atividades, já que coloca o aluno em situação privilegiada. Ela tem sua origem nos trabalhos de G. Polya[4], o qual afirma: "a resolução de problemas foi e é a coluna vertebral da instrução matemática desde o Papiro de Rhind". Ainda podemos citar educadores como Charles e Lester (1982), Dante (1991) e Branca (1997), dentre outros, que têm destinado especial atenção ao estudo e implicações da Resolução de Problemas na aprendizagem matemática.

Mas, pergunta-se: O que é resolver um problema? Polya[5] nos responde: "Resolver um problema é encontrar os meios desconhecidos para um fim nitidamente imaginado... Resolver um problema é encontrar um caminho onde nenhum outro é conhecido de antemão, encontrar um caminho a partir de uma dificuldade, encontrar um caminho que contorne um obstáculo, para alcançar um fim desejado, mas não alcançável imediatamente, por meios adequados".

Dante[6] define que um problema matemático "é qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar conhecimentos matemáticos para solucioná-lo". Afirma ainda que, além de tornar as aulas de Matemática mais interessantes, com a utilização de Resolução de Problemas muitos objetivos são alcançados, dos quais destacamos: fazer o

---

[4] POLYA, G., IN: DANTE, L.R., Didática da resolução de problemas de Matemática, 1ª. edição, São Paulo, Ática, 1991, p.7.

[5] POLYA, G., Sobre a resolução de problemas de matemática na "high school" IN: A Resolução de Problemas na Matemática Escolar, org. Stephen Krulik e Robert E. Reys, São Paulo, Atual, 1997, p.1/2.

[6] DANTE, L.R., Didática da resolução de problemas de Matemática, 1ª. edição, São Paulo, Ática, 1991, p.10.

aluno pensar produtivamente, desenvolver seu raciocínio e acostumá-lo a defrontar-se com situações novas.

Gazire[7], ao trabalhar com Resolução de Problemas em Educação Matemática dentro da sala de aula, distingue três perspectivas:

Resolução de problemas: Um novo conteúdo: Baseia-se na convicção de que "levar o aluno ao conhecimento de várias técnicas e estratégias de Resolução de Problemas contribui para desenvolver nele sua habilidade em resolver problemas".

Resolução de Problemas: Aplicação de Conteúdos: Fundamenta-se na idéia de que "aprende-se melhor um conteúdo quando ele é aplicado".

Resolução de Problemas: Um Meio de Ensinar Matemática: Apóia-se na concepção de que "se todo conteúdo a ser aprendido for iniciado numa situação de aprendizagem, através de um problema-desafio, ocorrerá uma construção interiorizada do conhecimento a ser adquirido".

A nossa interpretação sobre Resolução de Problemas coincide com a de Gazire, especialmente nessa última perspectiva, na qual, dentro do possível, nosso trabalho foi conduzido. É a que melhor promove uma interação entre aluno e professor, porque, através da apresentação de uma situação desafiadora, os alunos são encorajados a pensar de maneira autônoma, a criar, a experimentar, a estabelecer as estratégias para chegar às soluções. As intervenções do professor ocorrem somente quando o aluno não consegue organizar seus pensamentos e verbalizar sua idéia. É importante lembrar que a análise das soluções deve ser feita conjuntamente onde todos os resultados são considerados.

Dessa interação professor/alunos, podem surgir problemas cujas soluções venham a exigir amplas discussões, gerando grande aprendizado. Quando as tarefas tem significado para os alunos, eles sentem-se encorajados a ser criativos e a desenvolver estratégias para realizá-las, resultando na assimilação dos conceitos e algoritmos necessários para a resolução de seus problemas.

Uma das preocupações do professor deve ser a de preparar o aluno para viver numa sociedade repleta de situações novas, que muda de valores constantemente. Deve-se, portanto, criar condições para que ele possa desenvolver características como iniciativa, espírito explorador, criatividade e originalidade. A propósito, Nachbin[8]

[7] GAZIRE, E. IN: SILVA, M.G.P., Resolução de Problemas: uma perspectiva de trabalho em sala de aula, Dissertação de Mestrado, UNESP, Rio Claro, 1989, p.21.
[8] NACHBIN, L. IN RODRIGUES, V., Resolução de problemas como estratégia para incentivar e

afirma que "... o talento, a criatividade e a expressão são elementos vitais na formação de um indivíduo, em todos os seus níveis e nas suas diversas formas".

As atividades que se seguem representam, geralmente, situações de ensino-aprendizagem desafiadoras. Nelas, procuramos utilizar vocábulos e conceitos apropriados de modo que o aluno possa construir uma linguagem adequada para descrever o que foi estudado. Havendo interesse de aplicação, nossa proposta deve ser analisada a partir dos conhecimentos conceituais que os alunos possuem e, se necessário, devem ser feitas adaptações metodológicas e de sequências didáticas para que o processo de ensino-aprendizagem se realize.

Atividades

Os conceitos e propriedades geométricas trabalhados não foram por nós definidos por entendermos serem plenamente conhecidos. Algumas informações complementares e orientações são fornecidas através de *"notas"* ao professor. Apenas o tema "Pavimentação do Piano" mereceu, de nossa parte, uma explanação a título de informações necessárias para realização das tarefas.

Vários objetivos educacionais podem ser explorados quando são utilizados espelhos pianos e caleidoscópios, como veremos no desenrolar das atividades. Iniciaremos por aquelas que utilizam um espelho.

Utilizando um espelho

O uso de apenas um espelho permite situações de aprendizagem interessantes, envolvendo resolução de problemas, onde o ensino desenvolve-se de uma maneira informal e, às vezes, até de maneira lúdica, promovendo e aguçando a visualização do espaço. Conteúdos como ponto simétrico, eixo de simetria, figuras simétricas, congruência de figuras geométricas e transformações geométricas (reflexão, translação e rotação) podem ser muito bem trabalhados.

Para essas atividades utilizamos pedaços de espelhos, de dimensões opcionais e, se possível, em número de dois (no mínimo), para cada grupo. Os espelhos devem conter uma fita gomada na parte superior de seu contorno, para evitar acidentes quando de sua manipulação. Sugerimos, em alguns casos, o uso de papel quadriculado, por ser

---

desenvolver a criatividade dos alunos na prática educativa matemática, Dissertação Mestrado - UNESP, Rio Claro, 1992, p.25.

ISBN 978-85-89082-23-5

um recurso interessante, pois dá, com um certo rigor, noções de medida, distância e ângulo de 90°.

Reflexão de um ponto

Atividade: Sobre um pedaço de papel quadriculado, marcar um ponto qualquer atribuindo-lhe a letra *A*. Reforçar uma das linhas verticais para que ali seja colocado o espelho. Obtida a imagem desse ponto, marque-o no papel quadriculado e denote-o como *B*. O ponto *B* será a imagem ou reflexão de *A*.

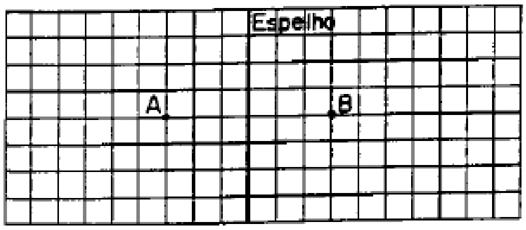


Figura 1

Nota: É conveniente solicitar que os alunos coloquem um objeto qualquer à frente do espelho para que possam também ser trabalhados os conceitos de rotação e translação, cujas transformações não podem ser obtidas com apenas um espelho.

- ✓ **Eixo Simétrico**

Atividade: Dada a figura 2, pergunta-se:
É possível, com o uso do espelho, obter-se a figura 3?
Existe alguma maneira de comprovar sua resposta?
Temos algum ângulo entre o espelho e a reta que contém os pontos P e Q? Qual?

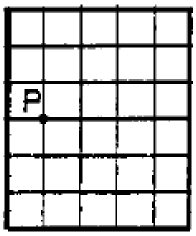


Figura 2

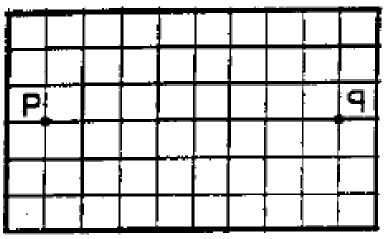


Figura 3

Nota: A resposta para (b) pode ser: contando os quadradinhos. O Professor poderá aproveitar a oportunidade para já conceituar *Ponto Simétrico*. Destacar que o lugar onde foi colocado o espelho na figura 2, para formar a figura 3, é chamado de *Eixo de Simetria,* o qual divide-a em duas figuras simétricas. Assim, quando todos os pontos de uma figura geométrica têm seu simétrico em relação a uma reta *r* (espelho), dizemos que a figura formada pelos simétricos é *simétrica* em relação à figura original.

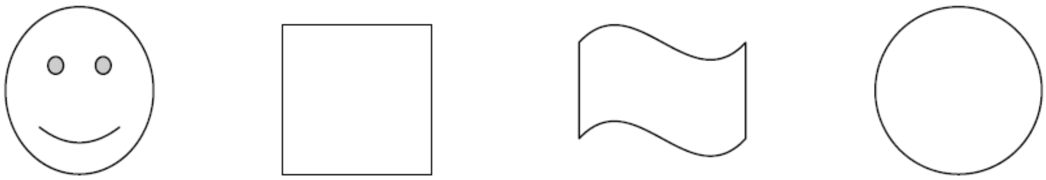
✓ **Figuras Simétricas:**

Atividade:

a) Considerando "eixo de simetria" a linha formada pelo espelho sobre as figuras geométricas abaixo, determine o eixo de simetria de cada uma delas.

b) Será que uma figura pode possuir mais que um eixo de simetria?

c) Se a resposta para (b) for afirmativa, marque abaixo de cada figura o número de eixos de simetria que ela possui.



✓ **Figuras Geométricas**

Atividade:

- <u>Círculo</u>: dado um semicírculo, descobrir em qual posição deverá ser colocado o espelho para obtenção do círculo completo.

Nota: Aproveita-se a oportunidade para explicitar *diâmetro* e *corda.*

- <u>Losango</u>: descobrir quais posições do espelho fornecerão a imagem do losango.

Trabalhando com figuras geométricas, podemos lançar desafios para descobrir como obterem-se determinados resultados. Podem ser criadas situações semelhantes às de um jogo, como mostra a atividade com cartões (figura 4). É também indicado acrescentar cores nas regiões formadas pelas figuras, o que torna o exercício agradável aos olhos, desperta prazer e encoraja a criatividade.

Atividade com cartões: Desenhar em papel resistente algumas figuras geométricas e recortá-las na forma de cartões (circulares ou retangulares), como mostramos abaixo.

ISBN 978-85-89082-23-5

Devem ser criadas situações possíveis e também as impossíveis, as quais geram boas discussões. A atividade consiste em buscar, no menor número de tentativas, a posigao correta do espelho sobre um cartão para obter-se o seu correspondente.

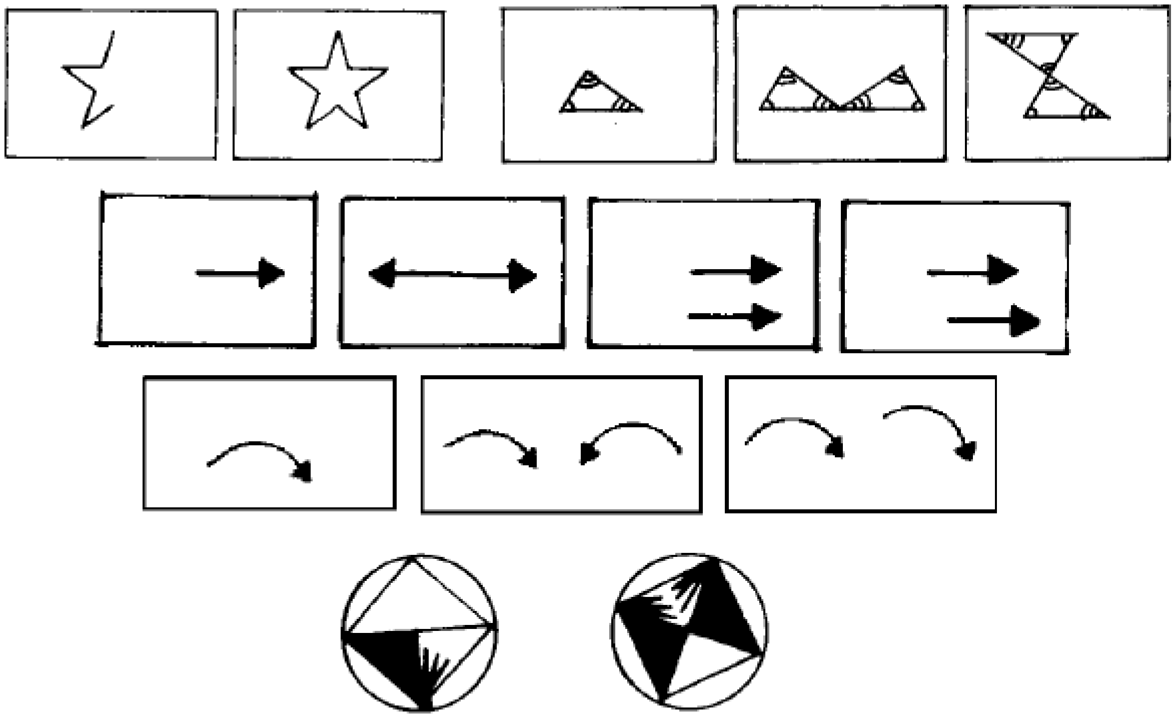


Figura 4

Nota: As figuras podem ser desenhadas em cartolina, pintadas, e a atividade se processar na forma de um jogo, com normas determinadas pelos próprios alunos. O aspecto lúdico da tarefa acaba despertando, estimulando e envolvendo o aluno, mesmo o mais desinteressado, pois, ao mesmo tempo, ele estará brincando, colorindo e aprendendo. Como é uma maneira informal de ensinar, não se exige muita precisão nos resultados, e deve-se encorajar os alunos a manifestarem suas opiniões, testá-las, argumentá-las e corrigi-las, se necessário, para que adquiram autoconfiança e entendimento das expressões tratadas.

Utilizando dois espelhos

Nestas atividades, os dois espelhos podem ser dispostos de duas maneiras diferentes:

1) Dois espelhos planos, verticais e paralelos

Os conceitos de Reflexão, Orientação e Translação podem ser abordados em atividades semelhantes à que se segue.

Material mínimo para cada grupo: Dois espelhos e uma folha contendo dois traços paralelos para direcionar a colocação dos espelhos.

Atividade:

a) Colocar entre as duas linhas paralelas um objeto qualquer.

b) Fixar um espelho sobre uma das linhas paralelas. O que você vê?

c) Agora coloque o outro espelho sobre a outra linha e observe. Registre as diferenças observadas entre (b) e (c).

d) A primeira imagem do objeto em (c) (em qualquer um dos espelhos) pode ser conceituada como Reflexão do objeto?

e) E a segunda imagem? Você poderia dizer que houve como que um deslizamento do objeto, sem girar, através de uma linha imaginária?

f) Você sabe o que é uma Translação?

Nota: Se forem confeccionados triângulos em isopor, com suas faces pintadas de cores distintas, o trabalho fica bastante interessante e os conceitos podem ser bem esclarecidos.

2) Dois espelhos articulados para formação de ângulos

Para facilitar o manuseio, os espelhos poderão ser unidos por uma fita gomada ou colados num pedaço de papelão, na dimensão dos espelhos, acrescida de aproximadamente 1cm para o vão central (para articulação dos mesmos). Podemos elaborar atividades que envolvam noções de polígonos regulares, simetria, rotação, reflexão, etc., como algumas que destacamos:

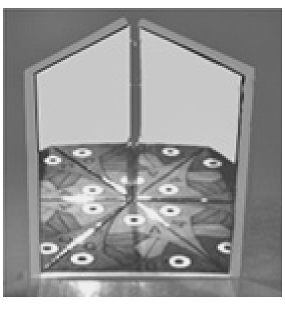


Figura 5

ISBN 978-85-89082-23-5

✓ **Obtenção de polígonos:**

Atividade:

Material para cada grupo:

- Um conjunto de espelhos articulados (temos utilizado espelhos de 22cm x 25cm, mas as dimensões são opcionais).

- Palitos de madeira (do tipo para churrasco) ou fitas coloridas (podem ser recortadas em cartolina) ou canudinhos (do tipo usado para beber refrigerante) ou mesmo uma régua.

- Uma folha-transferidor (pode ser obtida tirando-se uma cópia xerográfica do transferidor).

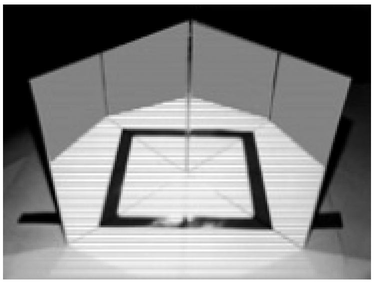


Figura 6

Atividade:

a) Abra os espelhos num ângulo qualquer.

b) Coloque o material fornecido (canudinho, palito ou fita) sob os espelhos e considere-o como um segmento. Qual foi o visual obtido? Se foi um polígono, saberia nomeá-lo?

c) Diminua a abertura dos espelhos. Obteve outro tipo de polígono? O que este novo polígono tem de diferente em relação ao obtido em (b)? Considerando a maior ou menor abertura dos ângulos dos espelhos e o número de lados dos polígonos obtidos, você poderia arriscar uma conclusão?

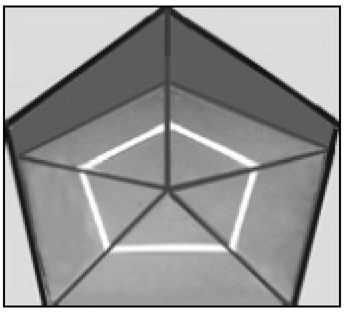


Figura 7

ISBN 978-85-89082-23-5

d) As aberturas feitas até agora ocorreram de maneira aleatória e os polígonos encontrados foram, na sua maioria, irregulares. Entretanto, se você colocar a folha transferidor sob os espelhos, abri-los em ângulos de 30°, 45°, 60°, 90° e 120° e mantiver sempre um triângulo isósceles, formado pelo segmento (canudinho, palito ou fita) e os espelhos, obterá polígonos regulares. Tente fazer uma tabela relacionando ângulos, número de imagens do segmento e o polígono regular obtido.

Nota: A figura 6 mostra um quadrado obtido considerando uma fita de papel como segmento; na figura 7, o pentágono foi obtido com o canudinho. Recomendamos a utilização de vários tipos de material (canudo, fita, palito, etc.) por proporcionarem em cada indivíduo diferentes estímulos na visualização dos polígonos gerados nas reflexões.

✓ **Rotação**

Material para cada grupo:

- Um conjunto de espelhos articulados
- Uma figura para ser colocada no interior dos espelhos, como mostra o exemplo (figura 8).

Atividade:

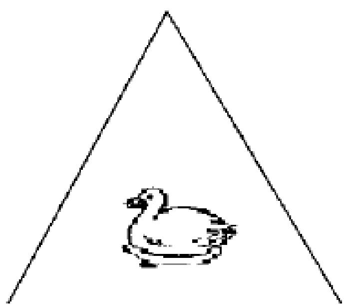
a) Abra os espelhos num ângulo de 60°.

b) Coloque a figura no interior dos espelhos.

c) Observe as 2ª e 4ª imagens da figura. Você vê alguma correspondência entre os pontos da figura original e suas imagens?

d) Você afirmaria que houve um giro da figura original, em relação ao centro dos espelhos, de ângulos de 120°, na segunda imagem e de 240°, na quarta imagem?

e) Que tipo de transformação (reflexão ou translação) representam a 1ª e a 5ª imagens?



ISBN 978-85-89082-23-5

Figura 8

Nota: Ao final dessa atividade, o professor terá condições de conceituar *Rotação,* considerando o encontro dos espelhos como o centro de rotação, e a "coincidência" da imagem com a figura original como condição necessária para ocorrer a rotação.

Utilizando três espelhos

Pavimentação do piano por polígonos regulares é um tema que oferece grande número de atividades, através das quais podemos estudar muitos conceitos geométricos e exercitar várias construções geométricas.

Consideremos a pavimentação uniforme (monoedral), a qual envolve somente polígonos regulares e congruentes, ajustados sem que haja lacunas ou superposições. É sabido que somente três tipos de figuras geométricas satisfazem essa condição: os triângulos equiláteros, os quadrados e os hexágonos regulares. Dizemos que as pavimentações geradas por esses três tipos de polígonos são de configurações (3,3,3,3,3,3), (4,4,4,4) e (6,6,6), respectivamente. Essas notações correspondem a termos três tipos de pavimentações, possuindo em cada vértice (ou nó) da pavimentação: a primeira, *sets triângulos equiláteros;* a segunda, *quatro quadrados,* e a terceira, *três hexágonos regulares.*

✓ **Porção de pavimentação do Plano**

Um recurso muito eficiente no estudo de pavimentações é o conjunto (kit) de polígonos composto por um bom número de polígonos regulares e irregulares (triângulos equiláteros e escalenos, quadrados, quadriláteros irregulares, pentágonos regulares e irregulares, hexágonos regulares, heptágonos regulares, octógonos regulares, decágonos regulares, dodecágonos regulares e pentadecágonos regulares), de mesma medida de lados, recortados em papel resistente, de diversas cores (se possível, com utilização das duas faces), como mostra a figura 9.

ISBN 978-85-89082-23-5

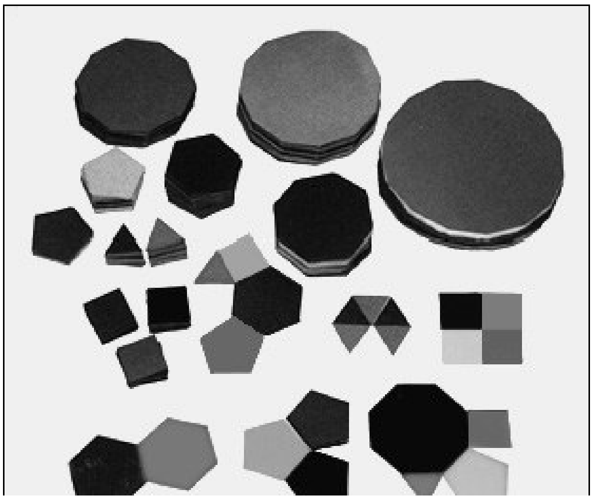


Figura 9

Material para cada grupo:
Kit de polígonos

Atividade:

a) estabelecer normas para realização da atividade (por exemplo: não pode haver lacunas ou sobreposição, utilizar somente polígonos congruentes, os vértices devem coincidir num único ponto, etc.).

b) descobrir quais polígonos regulares pavimentam o plano, obtendo porções de pavimentações. Favor registrar os resultados.

Nota: O resultado será que somente os triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos regulares pavimentarão o plano. Uma variação dessa atividade, e não menos importante, é a alteração nas normas, com a permissão para utilização de polígonos regulares com diferentes número de lados. As duas atividades acabam se complementando, ficando patente a necessidade de saber que a soma dos ângulos internos dos polígonos ao redor de um ponto (nó) deve ser de 360^o. As atividades são realizadas de forma lúdica, assemelhando-se a um jogo de quebra-cabeças. A figura 10 mostra um arranjo, que se não for analisado cuidadosamente, pode levar a uma conclusão errada. A soma dos ângulos internos destes três polígonos (heptágono, hexágono e pentágono) perfaz 356^o 34'. A falta de aproximadamente 3^o pode levar o aluno a "forçar" o ajuste dos polígonos, por atribuir imperfeições nas medidas. Isso

ISBN 978-85-89082-23-5

mostra a necessidade de se comprovar *somando*, paralelamente, cada resultado encontrado. Por outro lado, com essa atividade, aprenderão também a calcular os ângulos vértices de cada polígono.

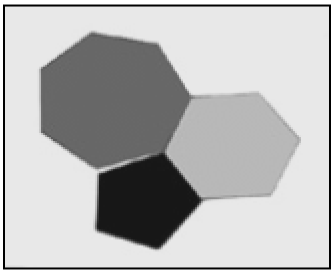


Figura 10

Existem 21 tipos de arranjos de polígonos regulares ao redor de um ponto. Porém, somente 11 tipos estendem-se por todo o plano, gerando uma pavimentação. Uma outra atividade possível é pedir aos alunos que descubram quais são esses onze tipos.

✓ **Caleidoscópios com três espelhos**

É um instrumento educacional formado por dois espelhos articulados, e mais um terceiro, formando uma superfície prismática triangular. É especial para trabalho em grupo, de simples execução e utilização, tanto por professores como pelos alunos, possibilitando amplo emprego em várias atividades educacionais. Detalhes de sua construção são encontrados em Murari [9].

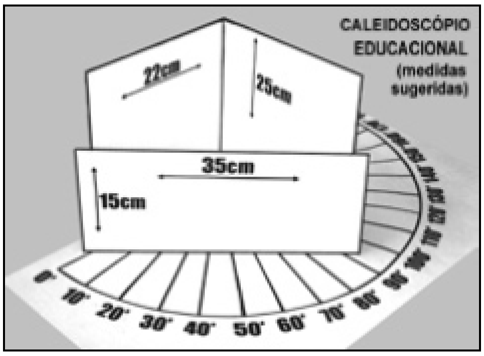


Figura 11

Nos caleidoscópios são formadas imagens múltiplas, pois as obtidas num dos espelhos formam novas imagens nos outros dois, e assim sucessivamente, estendendo-se por todo o plano. Caleidoscópios com três espelhos, que fornecem coincidência perfeita das imagens, são apenas de três tipos: Equilátero (ângulos: 60^o,60^o,60^o), Retangular Isósceles (ângulos: 90^o, 45^o,45^o) e Retangular Escaleno (ângulos: 90^o,60^o,30^o).

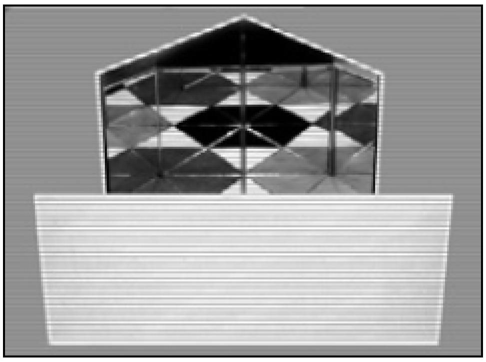


Figura 12

Nesses instrumentos são utilizadas "**bases substituíveis**", que são figuras triangulares, nas quais são construídos, graficamente, segmentos formando regiões (que podem ser coloridas), para que nas reflexões formem a pavimentação pretendida.

As pavimentações que se obtêm nos diversos tipos de caleidoscópios são:

a) No Equilátero: (3,3,3,3,3,3), (3,6,3,6), e (6,6,6)

b) No Isósceles: (4,4,4,4), e (4,8,8)

c) No Escaleno: (3,3,3,3,3,3), (6,6,6), (3,6,3,6), (3,4,6,4), (4,6,12) e (3,12,12)

Uma mesma pavimentação pode possuir várias bases substituíveis, diferindo no número de regiões formadas. Se as regiões forem pintadas, quando refletidas nos espelhos, corresponderão a polígonos-imagens, que terão as mesmas cores das regiões que os formam. A busca de bases para uma mesma pavimentação que ofereça um maior número de cores torna-se uma atividade de natureza matemática e de objetivo educacional de grande importância, pois as construções gráficas dessas bases envolvem vários conceitos geométricos.

Para o desenvolvimento das atividades deverão ser confeccionadas folhas que contenham as tarefas a realizar, que denominamos "folhas-tarefa", nas quais são também construídos triângulos tracejados (com as medidas do caleidoscópio construído), que representarão o contorno da base substituível e o lugar sobre o qual deverão ser colocados os espelhos. No interior desses triângulos é que serão construídos os segmentos apropriados que determinarão os polígonos da pavimentação. À semelhança de quando trabalhamos com dois espelhos, no início das atividades com

ISBN 978-85-89082-23-5

caleidoscópios, podemos utilizar como segmentos canudinhos de plástico colorido, palitos de madeira (que também podem ser pintados), ou ainda tiras de papel colorido. Assim, a atividade se realiza de maneira informal e rápida.

Abaixo, exemplo de atividades envolvendo bases para pavimentações com triângulos equiláteros (de configuração (3,3,3,3,3,3), cujo objetivo é a busca de bases com maior numero de cores.

Material para cada grupo:

- um caleidoscópio
- três folhas-tarefa com triângulos tracejados nas dimensões do caleidoscópio (para construção de bases), contendo em cada uma um dos itens a seguir. Após efetuar o que se pede, o resultado deverá ser visualizado no caleidoscópio, bem como deverá haver um comentário comparativo de cada item.

Atividade:

a) Reforçar todos os lados tracejados da base com uma só cor.

b) reforçar cada lado tracejado da base com uma cor diferente.

c) não reforçar nenhum lado da base, deixá-los tracejados, mas pintar o seu interior com uma única cor.

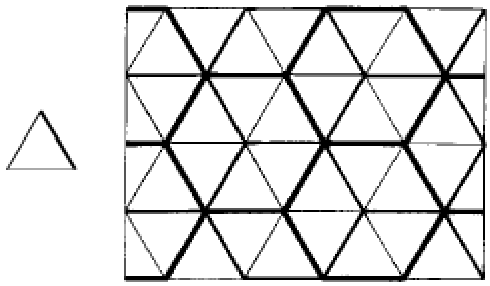


Figura 13

Nota: A figura 13 mostra o resultado de (b), onde temos uma pavimentação cujos triângulos possuem lados de cores distintas, representadas na figura por traços de três espessuras diferentes.

Material para cada grupo:

ISBN 978-85-89082-23-5

- um caleidoscópio
- folha-tarefa
- canudinhos ou palitos ou tiras de papel colorido

Atividade:

a) Colocar o caleidoscópio sobre a folha-tarefa.

b) escolher um dos materiais (canudinho, palito ou tira).

c) encontre um segmento que colocado no interior da base possa produzir a mesma pavimentação (por triângulos) mas com maior número de cores.

d) tendo encontrado o segmento apropriado e sua posição adequada, construí-lo graficamente na folha-tarefa.

e) pintar as regiões encontradas com cores diferentes e visualizar no caleidoscópio.

Nota: Os alunos devem ser incentivados a construir mais que um tipo de segmento (bissetriz, altura, mediana, etc.). O professor deve conduzi-los ao raciocínio de que mais segmentos determinam mais regiões e, assim, encontrar novas soluções (essa seria uma outra atividade). Abaixo, algumas soluções que podem ser encontradas. Além dessas, poderemos ter ainda outras construções que fornecerão um número diferente de cores.

■ Se a bissetriz for o segmento descoberto, teremos uma base para duas cores: A e B, (figura 14).

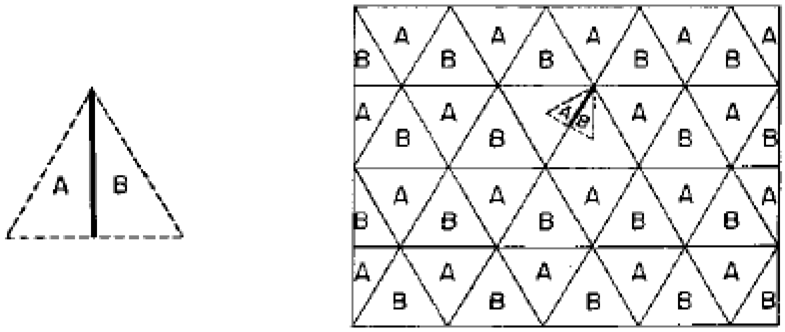


Figura 14

ISBN 978-85-89082-23-5

■ Outra solução é reforçar o contorno da base e unir os três pontos médios dos lados, para obter uma base com quatro cores: A, B, C e D (figura 15).

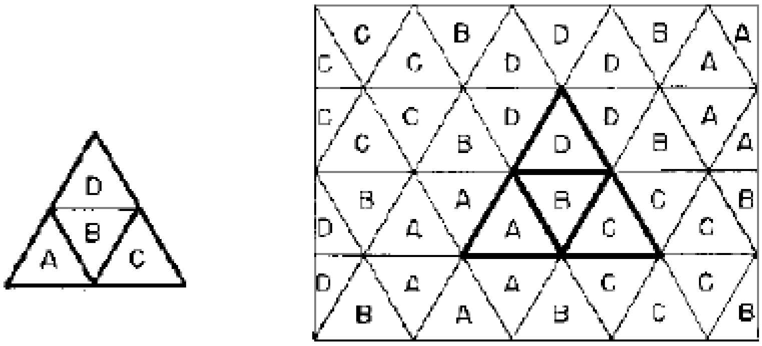


Figura 15

■ Construindo três bissetrizes, obteremos uma base para seis cores: A, B, C, D, E e F, (figura 16).

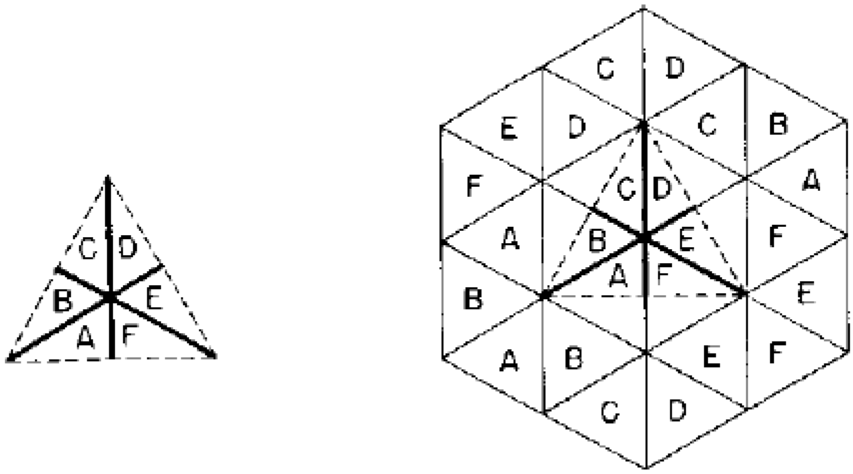


Figura 16

■ Uma construção mais elaborada seria traçar a bissetriz de um ângulo da base triangular e baixar perpendiculares aos lados pelo ponto médio; obteremos uma nova base para quatro cores (o visual caleidoscópico colorido é mostrado na figura 17).

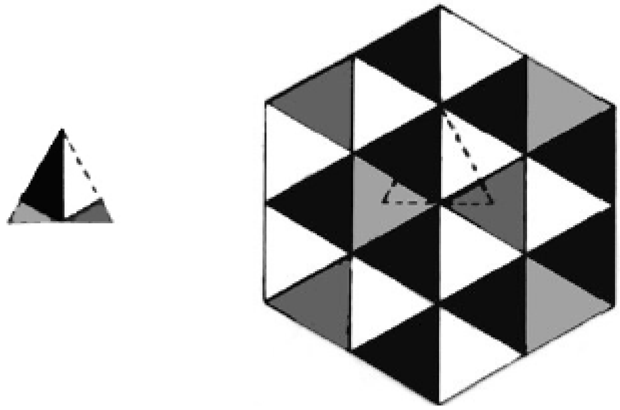


Figura 17

Existem onze pavimentações do piano por polígonos regulares. Com exceção da configuração (3,3,3,3,6), todas as demais podem ser visualizadas em caleidoscópio, a saber:

- Caleidoscópio com três espelhos: (3,3,3,3,3,3), (4,4,4,4), (6,6,6), (3,12,12), (4,6,12), (3,4,6,4), (3,6,3,6) e (4,8,8)

- Caleidoscópio com quatro espelhos: (3,3,4,3,4) e (3,3,3,4,4)

✓ **Pavimentação por quadrados, utilizando caleidoscópio isósceles retângulo**

Temos trabalhado até o momento com caleidoscópios equiláteros. Porém, como já citamos, o mesmo caleidoscópio pode ser utilizado nas versões isósceles e escaleno. Todas as pavimentações obtidas no caleidoscópio escaleno podem ser visualizadas no caleidoscópio equilátero. No caleidoscópio isósceles, temos a opção de trabalhar na determinação de bases substituíveis para as pavimentações de configurações (4,4,4,4) e (4,8,8).

As atividades utilizam o mesmo material e procedimentos dos até agora feitos com o caleidoscópio equilátero. Apresentamos na figura 18 exemplos de algumas bases que podem ser descobertas para a pavimentação de configuração (4,4,4,4). Observe a importância do tipo e posição de cada segmento colocado no interior da base, bem como do tipo do traço de cada lado do contorno da base (tracejado ou contínuo), cujos fatores vão determinar diferentes visuais caleidoscópicos. Também tem-se a opção de colorir as regiões delimitadas na base ou diferenciá-las designando-lhes letras do alfabeto ou

ISBN 978-85-89082-23-5

números.

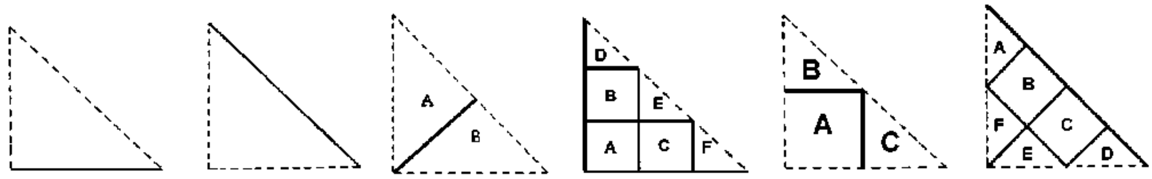


Figura 18

Outras atividades envolvendo noções de simetria reflexional, como a que mostramos abaixo, podem ser desenvolvidas *sem* o auxílio do caleidoscópio.

Material para cada grupo:

- folha-tarefa contendo o desenho (pode ser de tamanho pequeno) de uma base substituível que gere uma pavimentação por quadrados.

Atividade:

a) Observe a base apresentada. Tente construí-la graficamente.

b) Prolongue os pontilhados dos três lados da base, considerando-os como eixos de reflexão.

c) Sem o auxílio do caleidoscópio, por reflexões sucessivas, respeitando também as simetrias reflexionais sucessivas das cores (designadas por letras) tente determinar graficamente o visual caleidoscópico que se obtém através dessa base.

Nota: Para discussão das soluções, ao final, o professor poderá fornecer para cada grupo a base estudada, nas dimensões do caleidoscópio. A fim de facilitar a tarefa, a porção da pavimentação poderá ser traçada sem os instrumentos de desenho, mesmo com imprecisão nas medidas, porque importa o entendimento das simetrias reflexionais sucessivas e não a beleza, a precisão do desenho. Na figura 19, temos a base sugerida e o resultado obtido.

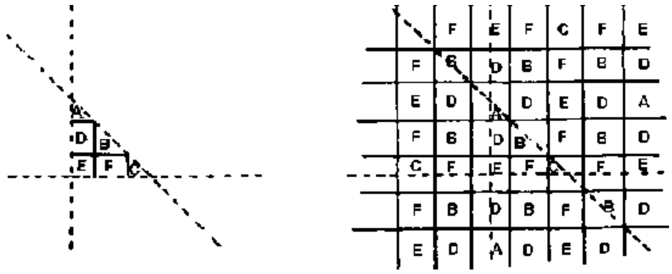


Figura 19

- ✓ **Caleidoscópio com quatro espelhos**

O caleidoscópio com quatro espelhos é de fácil execução, como mostra a figura 20. Ele poderá ser construído aproveitando-se dois conjuntos articulados do caleidoscópio de três espelhos, especialmente utilizado para trabalho em grupo.

Conforme Barbosa & Murari (1998), todo caleidoscópio com quatro espelhos deve formar uma superfície prismática de base retangular. As bases substituíveis nele utilizadas serão quadradas ou retangulares. A descoberta de bases que são visualizadas em caleidoscópio com quatro espelhos é uma tarefa difícil para alunos de 7ª e 8ª séries. Apesar disso, podemos ministrar atividades, como as abaixo, que auxiliam no entendimento de simetria reflexional e promovem a habilidade gráfica.

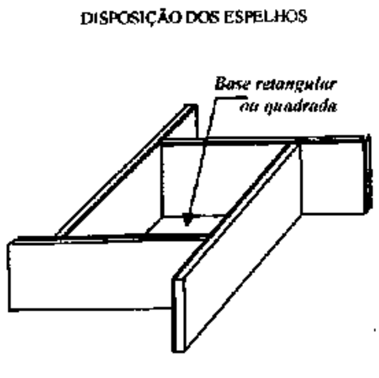


Figura 20

Material para cada grupo:

- caleidoscópio de 4 espelhos
- uma folha contendo uma figura pequena da base da pavimentação de configuração (3,3,4,3,4) como, por exemplo, a mostrada na figura 21.

Atividade:

a) Observe a figura dada (figura 21), onde as cores são representadas por números, e as linhas pontilhadas representam eixos de reflexão (espelhos). Por reflexões sucessivas, observando traços cheios e pontilhados, e respeitando também as simetrias reflexionais sucessivas das cores (designadas por números), tente determinar graficamente os polígonos regulares que serão gerados nas reflexões.

b) Você obteve uma porção de pavimentação do plano. Qual é a configuração dessa pavimentação?

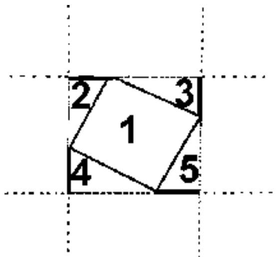


Figura 21

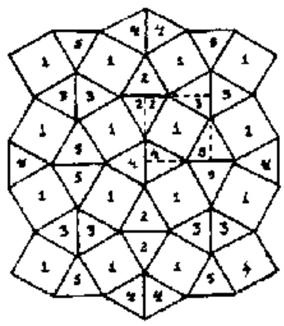


Figura 22

Nota: Ao final da tarefa, o professor poderá fornecer para cada grupo a base estudada e mesmo outras, nas dimensões do caleidoscópio, para verificação dos resultados e também para que os alunos compreendam que existem pavimentações que somente podem ser visualizadas em caleidoscópios com quatro espelhos. O resultado da porção da pavimentação obtida deverá ser o apresentado na figura 22.

Encontram-se em diversas pub1icações, indicadas na bibliografia com números (3), (9) a (11), muitas outras bases que geram pavimentações de configurações distintas das aqui tratadas. O leitor interessado em mais ap1icações poderá recorrer aos trabalhos referenciados e, com procedimentos análogos aos já descritos, desenvolver novas atividades.

O estudo prosseguiria com o desafio de procurar novas bases, com maior número de regiões, para outras pavimentações envolvendo polígonos regulares, o que justifica resumidamente uma das propostas do uso do caleidoscópio como instrumento educacional auxiliar no ensino da Geometria.

Discussão e resultados

Nosso objetivo em trabalhar com caleidoscópios foi o de fazer com que os alunos se apropriassem dos conceitos estudados, através de uma prática educacional diferente das habitualmente utilizadas. Com este método, em que há um estudo preliminar com espelhos e depois com os caleidoscópios, pudemos desenvolver interessantes atividades educacionais de natureza matemática concernentes às propriedades de polígonos, simetrias e construções gráficas.

Discutir cada atividade tornaria o artigo muito extenso, por isso generalizamos os resultados. Quando foram por nós aplicadas, em experiências[9] com alunos e professores, o trabalho foi bastante proveitoso. Divididos em grupo, buscavam democraticamente as soluções. Todas as respostas e estratégias eram discutidas e, às vezes, surgiam alternativas que pareciam momentaneamente errôneas, mas que, ao serem analisadas e discutidas, representavam uma nova solução para o problema. Tivemos o cuidado de colocar de maneira reflexiva todas as idéias que eram apresentadas (mesmo as soluções incorretas). Assim, todos se sentiam valorizados, animando-se a se pronunciar em outras oportunidades e a se envolver com as atividades.

A utilização de espelhos e caleidoscópios como suporte visual teve um bom efeito, auxiliando professores e alunos na organização das informações em modelos mentais com significado e beneficiando na resolução dos problemas.

Em ações simples, como numa articulação de dois espelhos, podia-se compreender noções de ângulo, polígono, figura geométrica e espelhos virtuais. Solicitávamos que abrissem os espelhos num ângulo de 60°, sem o auxílio do transferidor. Isso era possível contando o número de espelhos virtuais, que deveria ser quatro, produzindo seis regiões angulares congruentes. Desse modo, identificavam o polígono obtido (hexágono) e a figura geométrica (triângulo equilátero) formada pelos espelhos e o piano, além da noção de ângulo central. Com a inserção de um objeto nesses espelhos, acrescentavam-se noções de rotação e reflexão. Então, a rapidez nas constatações e descobertas dava dinamismo ao ambiente de aprendizagem.

Para a solução dos problemas, os alunos utilizavam instrumentos de desenho (compasso, régua, transferidor), aplicavam noções de simetria, de conceitos geométricos (como bissetriz, perpendicular, ponto médio, etc.), os quais iam sendo adquiridos de

---

[9] Ver detalhes em MURARI, C., Ensino-Aprendizagem de Geometria nas 7ª e 8ª séries, via caleidoscópios, Tese Doutorado, Vol. I e II, UNESP/IGCE, Rio Claro, 1999.

ISBN 978-85-89082-23-5

maneira gradativa, numa seqüência de conteúdos, ao tempo em que iam desenvolvendo e estimulando suas habilidades gráficas. O fato de os caleidoscópios se "materializarem" diante deles, ainda que de maneira virtual, uma imagem construída e colorida por eles mesmos atraía-os a buscar soluções criativas para os problemas. Outros resultados podem ser encontrados em artigos[10] publicados pelos autores, que particularizam as atividades aqui apresentadas.

Enfim, além dos já citados, outros objetivos podem ser alcançados através do uso de espelhos, como por exemplo, a integração multidisciplinar, o desenvolvimento da percepção espacial, do senso estético (relativamente a contrastes e harmonia de cores) e criatividade. O êxito de nossa proposta está ancorado na metodologia de ensino Resolução de Problemas, que permitiu preparar as atividades de modo a estabelecer um ambiente propício à aprendizagem. Trabalhando em grupo, criando e coordenando as relações e os pontos de vista entre si, confrontando e argumentando em favor de suas idéias, num trabalho integrado, partilhando responsabilidades, as crianças estarão construindo seu conhecimento e sendo encorajadas a pensar de maneira crítica, autônoma e reflexiva. Sabemos, entretanto, que embora haja limitações na utilização desses instrumentos, no tema "pavimentações do plano", por exemplo, objeto de nosso estudo, os resultados foram altamente satisfatórios.

Bibliografia

ALSPAUGH, C.A., **Kaleidoscope Geometry**, Aritmetic Teacher 17, 1976, 116-117, reprinted in: Readings in Geometry from the Arithmetic Teacher, NCTM (3rd.ed.)/1982.

BARBOSA, R.M., **Descobrindo padrões em mosaicos**, Atual, São Paulo, 1993.

BARBOSA, R.M., Murari, C. **Aprendendo construir novos mosaicos, agora em caleidoscópios com quatro espelhos**, Revista de Educação Matemática, SBEM-SP, Ano 6, n º 4, jul/98, p.57-66.

COXETER, H.S.M., **Introduction to Geometry**, N.Y., John Wiley & Sons, Inc., 1961.

DAFFER, E. R., Clemens, R. S., **Geometry: an investigative approach**, Addison-Wesley,

[10] MURARI, C. e PEREZ, G., A Geometria na ótica do caleidoscópio, Revista de Educação Matemática, SBEM-SP, Ano 6, nº 5, dez/99, p.43-50.
MURARI, C., PEREZ, G., e BARBOSA, R. M., Caleidoscopios Educacionales: Coloraciones Múltiples, Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas, Graó, Barcelona, Ano VIII, n. 27, p. 7-20, 2001.
BARBOSA, R.M., e MURARI, C., Aprendendo construir novos mosaicos, agora em caleidoscópios com quatro espelhos, Revista de Educação Matemática, SBEM-SP, Ano 6, n º 4, jul/98, p.57-66.

Menlo Park, 1977.

DANTE, L.R., **Didática da resolução de problemas de Matemática**, 1ª. edição, São Paulo, Ática, 1991.

JACOBS, H.J., **Geometry**, W. H. Freeman and Company, New York, San Francisco, 1974.

KINGSTON, M., **Mosaics by reflection**, Mathematics Teacher , 50, 1957, p.280-286.

MURARI, C., **Um caleidoscópio educacional modificado para trabalho em grupo**, Revista Educação Matemática / SBEM – SP, Ano 3, n º 2, 1995, p.11-15.

MURARI, C., **Ensino-Aprendizagem de Geometria nas 7ª e 8ª séries, via caleidoscópios**, Tese Doutorado, Vol. I e II, UNESP/IGCE, Rio Claro, 1999.

MURARI, C., Perez G., **A Geometria na ótica do caleidoscópio**, Revista de Educação Matemática, SBEM-SP, Ano 6, nº 5, dez/99, p.43-50.

MURARI, C. Perez, G., Barbosa, R. M., **Caleidoscopios Educacionales: Co1oraciones Múltiples**, Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas, Graó, Barcelona, Ano VIII, n.27, p. 7-20, 2001.

RODRIGUES, V., **Resolução de problemas como estratégia para incentivar e desenvolver a criatividade dos alunos na prática educativa matemática,** Dissertação Mestrado – UNESP, Rio Claro, 1992.

SILVA, M.G.P., **Resolução de Problemas: uma perspectiva de trabalho em sala de aula,** Dissertação de Mestrado – UNESP, Rio Claro, 1989.

WALTER, M., **An example of informal geometry: Mirror cards**, The Arithmetic Teacher, v.13, n º 6 (1966).