ISBN 978-85-89082-23-5

A Demonstração com Informática Aplicada à Educação[1]

Marcos Luiz Lourenço[2]

Resumo

Neste texto procuramos mostrar que, embora a prova em Matemática seja de grande importância, a forma segundo a qual ela tem se reproduzido, sobretudo quando se trata de ensino, deve ser revista. Procuramos destacar a importância do uso de figuras na indução do raciocínio formal e a facilidade que o uso de softwares educacionais pode oferecer quando se tem interesse no fortalecimento da compreensão de resultados. Procuramos também mostrar que o uso de softwares pode, e em geral consegue, instigar os estudantes, abrindo perspectivas de investigações e busca de resultados que são induzidos pelas construções dinâmicas. Não fazemos a apologia da não-demonstração, mas destacamos a importância do convencimento, ainda que de maneira informal.

Abstract

In this paper we are aiming to present that although the mathematical proof is really important, the way it has been presented, mainly when considering the teaching, must be discussed. We desired to emphasize the importance of using figures on the formal reasoning induction and the facility that the educational softwares use can offer when the interest is on the results understanding. We also aimed to show that the softwares use can, in a general way, incite the students, creating investigations perspectives and results searching that are induced by the dynamic constructions. We are not creating the non-demonstration apology, but we detach the persuasion importance, even if it is presented on an informal way.

Introdução

Falar em provas, no sentido de se demonstrar um fato em Matemática, não é tarefa fácil por várias razões. Entre elas, a que diz respeito ao fato em si mesmo, isto é, o que é provar um fato. É deduzi-lo a partir de outros (ou de um conceito tornado como verdadeiro) utilizando raciocínio lógico? Ou é convencer o interlocutor, utilizando também fatos verdadeiros? Ao meditar sobre isso, voltam à memória acontecimentos ocorridos em meu tempo de estudante, principalmente quando aluno da escola hoje chamada de fundamental e média e, em especial, observando os professores - professores de Matemática - que demonstravam com mestria, teoremas e corolários que eu, como todos os outros, não conseguíamos entender. Para demonstrar teoremas, em geral, o professor concebia idéias e artifícios extraordinários, **tirados de não sei onde**, e, magicamente, concluía, escrevendo c.q.d.

---

[1] Digitalizado por Lucieli M. Trivizoli e Marco A. Escher.

[2] Professor Assistente Doutor, aposentado IBILCE/UNESP- São José do Rio Preto, Coordenador de curso de Licenciatura em Matemática da FAFICA – Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Catanduva – SP.

Colegas que considerávamos muito inteligentes e dedicados, com grande sucesso em todas as disciplinas, quase sempre esbarravam nas demonstrações de teoremas, enquanto que outros, medíocres em quase tudo, freqüentemente se destacavam, pois reproduziam as argumentações e cálculos contidos nos livros e fielmente repetidos pelos professores nas aulas. É certo que existiam alguns colegas que conseguiam, em alguns casos, decodificar os símbolos e mostrar, em situações informais, os teoremas ou as propriedades estudadas, e isso, quase sempre, despertava algum interesse nos demais estudantes.

Na escola daquele tempo, em geral, atribuía-se o fracasso na aprendizagem da Matemática à falta de aptidão do estudante *(supostamente necessária quase que exclusivamente para a Matemática)* e aqueles considerados **inaptos** jamais teriam possibilidade de compreender a Ciência. Hoje, trabalhando com Educação Matemática, não posso afirmar, pelo menos com segurança, se a suposição é ou não real.

A necessidade de se provar resultados parece ser de reconhecida importância, entretanto, a forma segundo a qual se faz, na medida do possível, deve ser revista, sobretudo quando se trata de ensino, uma vez que a simples observação constata que essas demonstrações se mostram destituídas de significado para os estudantes. A Matemática tem se caracterizado por ser a disciplina escolar que mais causa indignação. É, sem dúvida, aquela que tem maior número de rejeição e que ainda causa pavor. A rejeição, entretanto, parece se fixar mais na forma segundo a qual ela é apresentada do que nos fatos, raciocínios e procedimentos que a caracterizam. Embora não seja compreendida, a Matemática continua sendo motivo de admiração geral, talvez pelo fato de aparecer tão seguidamente em nossas vidas e ser capaz de explicar e até de dominar os fenômenos naturais.

A Matemática, segundo meu ponto de vista, é uma construção mental, obra do pensamento puro. Traduzir este pensamento em fórmulas, símbolos e relações demonstráveis é tarefa do matemático e talvez seja uma tarefa difícil, mas conhecer a Matemática ou ter dela uma idéia significativa não é sinônimo de dominar sua parte formal e seus algoritmos. Conhecer a Ciência significa, de alguma forma, penetrar na sua essência, na estrutura do pensamento que a caracteriza, é observar sua finalidade sem, necessariamente, dominar todos seus postulados e sutilizas.

A Geometria, por utilizar - **ao menos a Geometria usual** - uma linguagem intuitiva, se aproxima bastante da linguagem comum das pessoas. Seus elementos primitivos - ponto, reta e piano - são, pelo menos aparentemente, conhecidos de todos, com significados muito próximos da concepção dos matemáticos.

A Geometria é, em geral, apresentada como resultado da agrimensura. Heródoto (sec. IV a.C.) indica que a Geometria nasceu no Egito, influenciada pelo rio **Nilo** que, devido às enchentes regulares, impôs o problema da repartição de terras, a partir de *“plantas”* que dividiam os terrenos em retângulos, trapézios e quadrados, que se constituem as primeiras figuras geométricas elementares. Clairaut[3] (Alexis Claude, 1713-1765) falando a respeito do ensino de Geometria, atribui a dificuldade de seu estudo à forma segundo a qual se desenvolvem os cursos, pois se iniciam a partir de um grande número **de definições e postulados que não representam nada para os alunos** que ainda não tem maturidade para compreender idéias abstratas. Ele sugere que, ao estudar Geometria (ensiná-la para iniciantes), se procure considerar a história da humanidade e que se percorra um *caminho semelhante ao percorrido pelo homem na aquisição de conceitos e criação das leis Matemáticas.* Castelnuovo[4], concordando com Clairaut, afirma que o ***desenho de uma figura geométrica não marca o início, mas corresponde a um estágio mais avançado da representação concreta***. Ela afirma que a origem da Geometria deve ser procurada nas primeiras construções e nas primeiras técnicas utilizadas nessas construções. Com este princípio, ela defende que, ao ensinar para crianças, ao invés de oferecer régua, compasso, etc, para início do estudo de Geometria, devem-se oferecer outros materiais tais como tiras de papel, elástico, etc. com os quais as crianças podem fazer construções, manipulando este material. Agindo por tentativas, é possível descobrir (como poderia ter acontecido com o homem primitivo) as propriedades mais significativas das figuras geométricas.

Com o homem primitivo, após a construção das primeiras casas e dos primeiros instrumentos para o trabalho, ocorreram as primeiras comunidades, e nas comunidades se apresentaram problemas, como, por exemplo, a divisão dos campos de cultura em terrenos de áreas iguais no Egito. Assim, Castelnuovo supõe que os fundamentos da Geometria se apresentam relacionados de forma diferente daquela que estamos acostumados a ver, com uma lógica construtivista seguindo o trabalho desenvolvido pela humanidade. Ela afirma ainda que, se desejarmos que os alunos participem do

---

[3] Clairaut, A. C. , *Eléments de Géomètrie*, Paris, 1741.
[4] CASTELNUOVO, EMMA, *Geometria intuitiva* Editorial Labor, S.A. Barcelona, 1966.

trabalho realizado pelo homem na construção do conhecimento matemático, devemos seguir um método construtivo e não o descritivo, e considera que nenhum método pode ser mais eficaz do que aquele que a humanidade percorreu.

Seguindo esta orientação e adaptando-a para o nosso tema, somos levados a pensar que a **melhor prova que se pode oferecer para alguém**, sobre qualquer tema, **é o convencimento de que o fato é real**. No caso da Matemática, tomando como exemplo a Geometria Elementar (lembrando que o que se faz em Geometria pode-se fazer em outros campos) e a ferramenta poderosa que temos hoje à disposição – o microcomputador – o convencimento se torna mais simples. Dispomos na atualidade de inúmeros softwares de construções gráficas, com interface amigável. Entre esses softwares, destacamos o SLOGOW, o GEOMETRICS, o GEOMETER SKETCHPAD e o CABRI GÉOMÈTRE, pela facilidade de apresentação, disponibilidade e acesso.

Vamos observar alguns exemplos e comparar as "***provas***" com as demonstrações usuais que conhecemos.

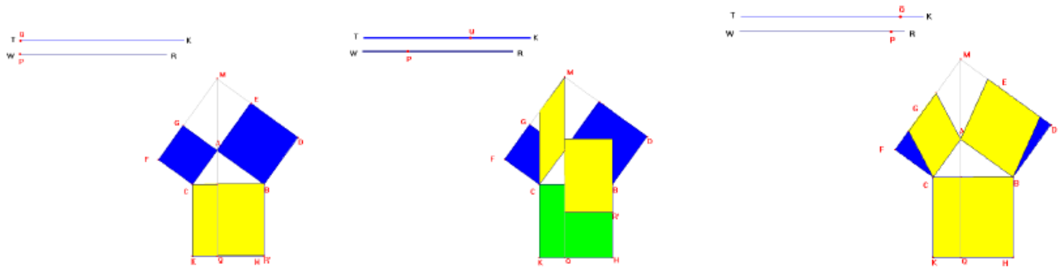
Para este evento, vamos nos prender, por razões pessoais, a trabalhos realizados com o software CABRI GÉOMÈTRE II.

Não podemos nos esquecer de que, em alguns casos, figuras e construções podem ser ilusórias e não conduzir o raciocínio para deduções corretas. Lembramos, entretanto, que, em geral, e quando bem conduzidas, construções, figuras e esboços de gráficos apontam para resultados corretos e até sugerem caminhos que permitem o desenvolvimento de raciocínio lógico. As construções falsas sempre acabam por esbarrar em incongruências que chocam o observador, apresentam conflitos e desmoronam em poucos segundos, principalmente quando se trabalha com construções dinâmicas, ágeis o suficiente para mostrar, em segundos, uma infinidade de *"figuras"*, elaboradas a partir de **propriedades** e não de desenhos. Construções dinâmicas, que hoje se fazem nos computadores, se tornam de tal forma claras e sugestivas, que permitem testes de hipóteses e simulações que, em alguns casos, ultrapassam a imaginação mais fértil. Construções inteligentes mostram, muitas vezes, resultados surpreendentes e incentivam a busca de resultados, a pesquisa e a elaboração de "*teorias*" que comprovem ou desmintam os fatos observados.

Aplicações de Softwares

O Software Educacional como Indutor de Demonstrações

O software Cabri Géomètre, como vários outros, permite a realização de construções geométricas capazes de induzir uma demonstração formal para proposições Matemáticas, principalmente aquelas de nível elementar. Uma construção que pode ser alterada em sua aparência, conservando as propriedades Matemáticas da figura, **quando bem direcionada**, pode sugerir caminhos para trabalho teórico tendente à demonstração formal. Entendemos que, em muitas ocasiões, investigando construções já realizadas ou efetuando novas construções, os estudantes podem inferir resultados, desenvolver a credibilidade e elaborar novas demonstrações que, sem as construções auxiliares, seriam de difícil compreensão e realização. Vejamos um exemplo, utilizando construções no Cabri, e procuremos observar como a interação permitida pelo software pode sugerir demonstrações.



As figuras acima representam três momentos de uma figura feita no Cabri[5] que permitem a movimentação contínua de quadriláteros, sugerindo transformações que preservam áreas e mostram a equivalência existente entre a área do quadrado construído sobre a hipotenusa e as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos do triângulo retângulo ABC. No software, a movimentação *"contínua"*, além de permitir um visual agradável, mostra como os quadriláteros se transformam (retângulos, paralelogramos e quadrados) conservando suas áreas.

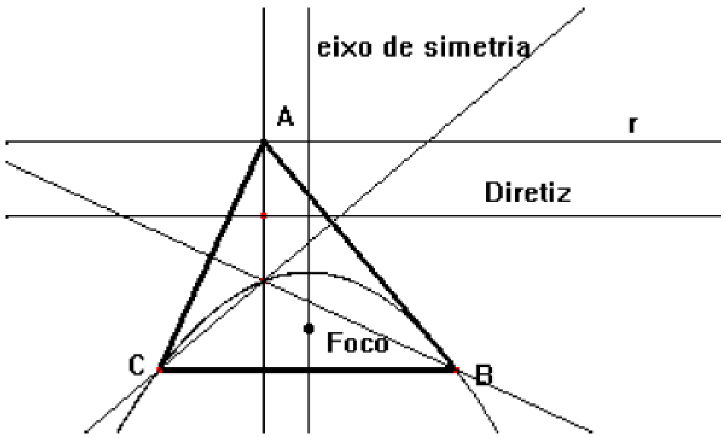
Esta construção pode ser utilizada para sugerir (e esclarecer) a demonstração da relação de Pitágoras através da equivalência de áreas.

[55] LOURENÇO, M. L., **Cabri-Géomètre II: introdução e atividades**, FAFICA, Catanduva SP 2000.

O Software como Elemento Auxiliar na Busca de Resultados

Além de servir, de maneira clara, para a exploração de resultados e para o incentivo de investigações, os softwares educacionais podem sugerir caminhos para a realização de demonstrações desconhecidas, propondo artifícios que, muitas vezes, em demonstrações formais são necessários e de difícil compreensão. Para exemplificar essa possibilidade vamos descrever, sucintamente, o processo por nós utilizado quando, com o uso do Cabri Géomètre, pudemos demonstrar um resultado interessante a respeito do lugar geométrico dos ortocentros de triângulos.

O primeiro trabalho nesse sentido foi o estudo do lugar geométrico dos ortocentros de um triângulo de base fixa e terceiro vértice deslizante sobre uma reta paralela à base. Este resultado já foi apresentado em congressos e em workshops, e o trabalho completo, com a inserção de provas, se encontra publicado na Revista UNIVERSITAS[6].



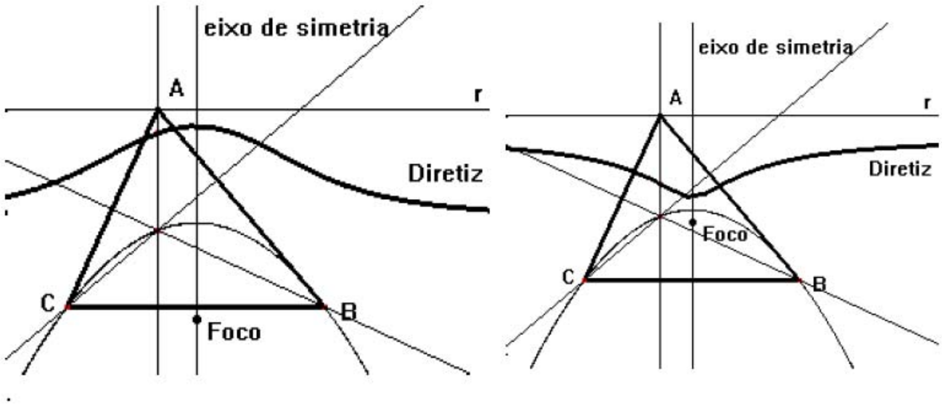
A construção acima, feita no Cabri Géomètre, é tal que, movimentando o ponto **A** sobre a reta **r**, o ortocentro do triângulo percorre uma curva que, antes de ser demonstrado, sugere uma parábola. Inferindo que o eixo de simetria, no caso de se tratar de uma parábola, deveria coincidir com a mediatriz do segmento BC, a diretriz desta curva, caso se trate mesmo de uma parábola, deve ser tal que todo ponto sobre a curva deve ter a propriedade de estar a igual distância de uma reta (ortogonal ao eixo) e de um ponto fixo (F) sobre esse eixo de simetria. Assim, o lugar geométrico (L.G.) dos pontos eqüidistantes de um ponto P que percorre a curva e do "*foco*" F se for uma reta, a curva

[6] LOURENÇO, M. L , Revista UNIVERSITAS: Ciências Exatas, v. 8 – 1, 63-69, 1998.

ISBN 978-85-89082-23-5

satisfará a condição da parábola (parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano que são eqüidistantes de um ponto e de uma reta).

A suspeita de que a curva seja uma parábola tem um grande reforço quando se movimenta o ponto **F** sobre a reta *considerada* eixo de simetria. A movimentação permitida pelo Cabri nos mostra uma variação constante da curva (L.G.). Como a curva apresenta "*concavidade*", que varia de direção (ora "*para cima*", ora "*para baixo*", conforme as figuras em seguida) e considerando que essa variação não apresenta pontos de "*salto*" , é de se supor que em algum instante ela seja uma **reta** (a variação contínua do ponto F sugere que a movimentação da curva também seja contínua). O dinamismo do software apresenta um visual agradável e capaz de incentivar a busca da demonstração de um fato suspeitado por Aracil[7], em 1947.



Incentivador de Pesquisas

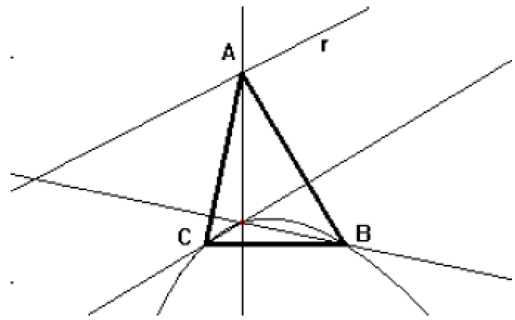
A demonstração de uma proposição adquire grande credibilidade quando é apoiada em fatores visuais. Uma imagem ou uma seqüência de imagens é capaz de convencer até mesmo observadores que não têm grande habilidade em Matemática e pouca familiaridade com artifícios e sutilezas de demonstrações formais. Entre aqueles que possuem uma tendência para a Matemática, a observação de imagens que sugerem resultados torna o trabalho muito mais interessante e, em geral, incentiva o estudante para a realizações de novas investigações As provas no sentido usual, necessárias em muitos casos, em geral satisfazem os matemáticos – e são dirigidas para eles - mas não convencem a maioria dos estudantes que, por não entendê-las, passa a decorar a

[7] ARACIL, C. M. , **Problemas de Geometria Analítica** *(* Coleção de Matemáticas Superiores) Editorial Dossat, S.S. Madri, 1947

ISBN 978-85-89082-23-5

seqüência de palavras, traços e argumentos, e daí a repulsa pela Matemática.

No problema do exemplo anterior, pode-se sugerir imediatamente após a demonstração da propriedade da curva – *descobrindo a parábola* - uma nova investigação: que curva será descrita pelo ortocentro do triângulo quando a reta sobre a qual o vértice (A) desliza não é paralela à base do triângulo?

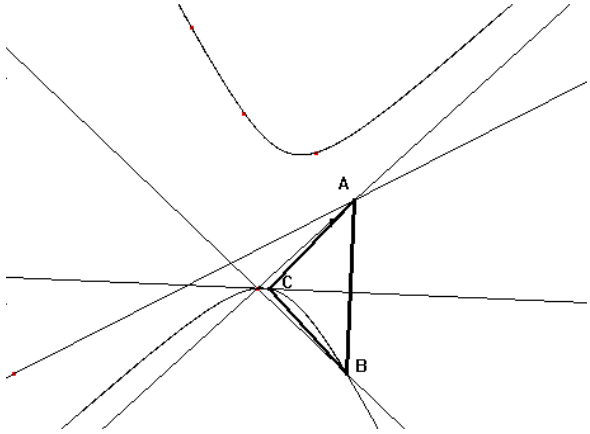


Este aprofundamento, que nos parece natural, foi desenvolvido como um trabalho conjunto com o Prof. Dr. Ruy Madsen Barbosa, com resultado parcial apresentado no I Workshop de Informática Aplicada ao Ensino[8]. O trabalho completo, com descrição detalhada e provas formais, foi encaminhado para publicação (já aceito) em revista apropriada.

Com uma construção simples realizada no Cabri Géomètre II, podemos observar que a curva tem dois ramos aparentemente simétricos. Com base na experiência anterior, podemos "*arriscar*" e inferir que a curva apresentada é uma hipérbole. Com base nesta suposição, podemos procurar detalhes ou propriedades demonstráveis que reforcem a suposição. A cada **detalhe** conseguido, vamos aumentando a credibilidade. A demonstração deste fato talvez não seja compatível com a escola fundamental e média que temos hoje, mas certamente é de interesse para um curso de Geometria Analítica plana, em nível de graduação.

[8] Lourenço, M. L.; Barbosa, R. M. - Workshop de Informática aplicada à Educação - Araraquara, de 10 a 12 de agosto de 2000

ISBN 978-85-89082-23-5

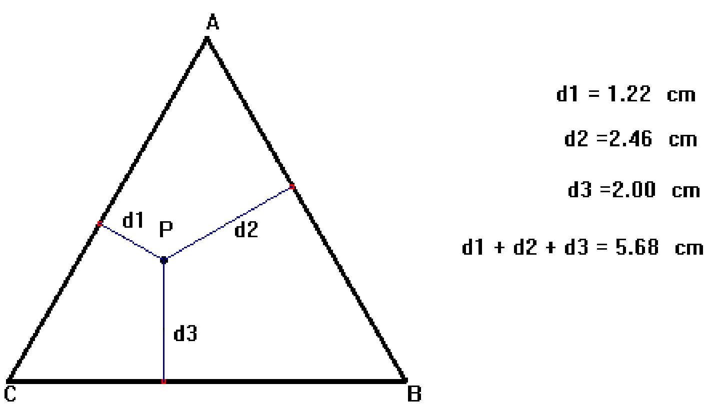


Acreditamos que ***demonstrar é convencer***. Não temos dúvidas de que, **em cada nível**, o convencimento deve se caracterizar pela coerência e compatibilidade com o meio. O que é necessário num momento talvez seja perfeitamente dispensável em outro momento e em outro meio. Em termos educacionais, o que nos parece ter acontecido ao longo dos anos foi uma exagerada preocupação com a forma, ignorando-se, quase que por complete a diferença entre o fazer Matemática e o escrever sobre Matemática. Escreveu-se muito, mas ensinou-se pouco.

Exemplos de Demonstrações *(Mostrações)*

Exemplo 1

Considere um triângulo eqüilátero ABC qualquer, um ponto P em seu interior e as distâncias d_1, d_2 e d_3 do ponto P aos lados AB, AC e BC. Movimente o ponto P no interior do triângulo e verifique o que acontece com a soma das distâncias ($d_1 + d_2 + d_3$).



Um observador atento perceberá que, alterando-se a posição do ponto P, as medidas d_1, d_2 e d_3 se alteram, mas a soma $d_1 + d_2 + d_3$ permanece constante. Parece natural que se faça, tendo em vista a movimentação permitida pelo software, a pergunta: "o que representa a soma $\mathbf{d_1 + d_2 + d_3}$"?

O leitor que dispõe do Cabri Géomètre II pode fazer a construção e movimentar o ponto P alterando os valores dos segmentos d_1, d_2 e d_3. Quando o ponto P coincide com um dos vértices do triângulo, a soma dos três segmentos será facilmente identificada com a altura do triângulo eqüilátero.

A demonstração formal deste fato pode ser feita através da equivalência de áreas (a área do triângulo eqüilátero é igual à soma das áreas de três triângulos obtidos a partir do ponto P).

Convidamos o leitor a fazer uma comparação entre esta visualização da propriedade, pouco conhecida entre os estudantes ($d_1 + d_2 + d_3 = h$), e sua demonstração formal. Qual delas será mais significativa para os alunos?

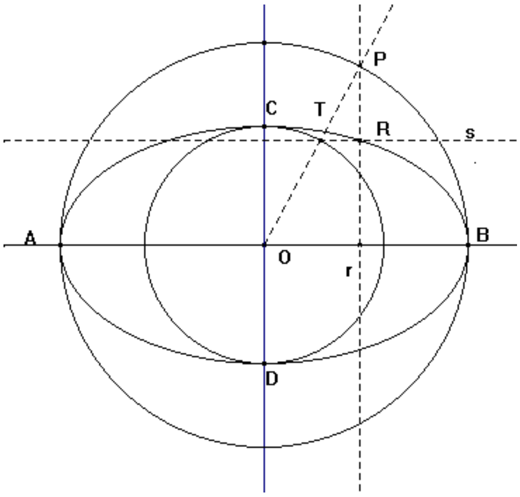
Acreditamos que a "*mostração*" utilizando a movimentação própria do software, expondo as medidas e uma tabela auxiliar, seja muito mais significativa, permitirá fixar o resultado (constatado pela observação) com muito mais intensidade do que a demonstração baseada na subdivisão da área do triângulo ABC, em áreas de três triângulos (ABP, APC e BPC).

Não estamos afirmando que as demonstrações, da forma como conhecemos, sejam desnecessárias em todos os níveis. Afirmamos, entretanto, que, em geral, uma *mostração* é muito mais convincente, pois nos permite "*ver*" a propriedade que desejamos.

Exemplo 2

Construa duas circunferências concêntricas (centro em O) de raios **R** e **r** (R > r) e duas retas perpendiculares entre si pelo ponto O. Construa um ponto **P** sobre a circunferência de raio R e a semi-reta OR. Determine a interseção **T** da semi-reta com a circunferência de raio r. Pelo ponto P, construa a reta r, perpendicular à reta horizontal que passa por O. Pelo ponto T, construa a reta s, perpendicular à reta r, determinando o ponto R (s Ç r). Determine as interseções A, B, C e D das circunferências com as retas e construa a curva determinada pelos pontos A, D, B, R e C (cinco pontos)

ISBN 978-85-89082-23-5



Essa curva é uma elipse?

Dispondo do Cabri II, podemos construir, com centro no ponto D, uma circunferência de raio R, determinando os pontos F e F’ sobre o eixo-x. Podemos, ainda, construir um ponto (P) sobre a curva, medir as distâncias deste ponto aos focos (F e F’) e ***constatar*** que a soma das distâncias assim conseguidas não se alteram quando o ponto P percorre a curva, caracterizando a elipse (figura abaixo).

Convidamos o leitor a demonstrar este resultado com os recursos geométricos usuais.