



VILLAREAL, M. E. **O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas.** 1999. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1999.¹

Por Norma Suely Gomes Allevato²

Não são poucas as dissertações de mestrado ou teses de doutorado que, mesmo tendo sido desenvolvidas na área de Educação, por serem muito teóricas ou desvinculadas da realidade de sala de aula, acabam esquecidas nas prateleiras das bibliotecas, possuindo o único mérito de terem servido de instrumento para a obtenção de um título por aqueles que a desenvolveram. Creio não ser este o caso da tese de doutorado de Mónica Ester Villarreal, intitulada: "O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas".

Já no capítulo 1 de seu trabalho, ao apresentar a gênese de seu projeto e as razões que a levaram à realização de sua pesquisa, Villarreal salienta que essas razões envolvem a necessidade de reflexão da própria prática docente e dos problemas no ensino e no processo de aprendizagem do Cálculo, muito embora tivesse se afastado de suas atividades docentes para dedicar-se à investigação, e "assumir" a posição de pesquisadora. Possivelmente, por possuir essa vivência com o ensino, e por apoiar-se em uma criteriosa opção no que se refere ao campo teórico, o trabalho não perdeu a objetividade e/ou a representatividade tão almejadas pelos leitores, professores ou pesquisadores, que buscam subsídios para aprimorar sua prática.

Este campo teórico foi definido a partir do processo de revisão bibliográfica, que é desenvolvido desde o início da pesquisa, e acompanha todo o processo de investigação. A mesma revisão guiou a elaboração da pergunta que orientou a pesquisa, apresentada no capítulo 1, que é: "Como caracterizar os processos de pensamento dos

¹ Digitalizado por Cláudia Laus e Viviane Cristina Almada de Oliveira.

² Doutoranda em Educação Matemática – UNESP – Rio Claro/SP. Ainda que não sejam responsáveis pelo conteúdo desta resenha, gostaria de agradecer à Profa. Dra. Lourdes de La Rosa Onuchic e aos membros do GPIMEM – Grupo de Pesquisa em Informática, Outras Mídias e Educação Matemática (UNESP – Rio Claro/SP) pelos comentários à versão preliminar.

estudantes ao trabalharmos questões matemáticas relacionadas com o conceito de derivada em um ambiente computacional?"

O segundo capítulo é dedicado à apresentação da revisão bibliográfica sobre Cálculo, computadores e visualização. Ao iniciar o capítulo, Villarreal apresenta autores que tratam da aprendizagem do Cálculo. Estudos sobre as concepções dos estudantes e das possíveis formas de abordar o Cálculo, trabalhos que tratam das concepções e habilidades relacionadas ao conceito de derivada e suas diversas formas de representação; teorias que tratam das "*misconceptions*" (concepções errôneas) nas suas várias interpretações, dos obstáculos epistemológicos, do modelo dos campos semânticos, da proposta metodológica da assimilação solidária, entre outras, são apresentadas. Com isso, a pesquisadora pretende destacar alguns aspectos que, segundo sua compreensão, referem-se às dificuldades na aprendizagem ou propõem alternativas para mudar o quadro de fracasso em que se apresenta o ensino do Cálculo. Também foram analisados trabalhos que tratam especificamente do ensino de Cálculo, alguns criticando o ensino tradicional vigente, outros valorizando a fala do aluno e a necessidade de entender sua perspectiva, outros propondo estratégias de ensino, como a Modelagem Matemática e, ainda, os que tratam de estabelecer paralelos entre a prática pedagógica e a prática científica do professor-pesquisador.

A seguir, apresenta a bibliografia consultada sobre o uso da tecnologia na Educação Matemática. Ela indica que a tecnologia conduz à necessidade de mudanças nos conteúdos matemáticos que são ensinados, na dinâmica do trabalho em sala de aula, e nos papéis desempenhados por professores e alunos nesta dinâmica. Considerado como um instrumento didático, o computador leva à reflexão em torno de novos valores e objetivos para o ensino de Matemática, assim como a falta de reflexão sobre sua incorporação ao ambiente educacional pode atrapalhar o processo de construção do conhecimento matemático.

Em um terceiro momento deste capítulo, encontram-se referências a pesquisas realizadas em ambientes de ensino e aprendizagem de Cálculo, com o uso de tecnologia (calculadoras gráficas ou computadores). Alguns autores enumeram vantagens, outros dificuldades, mas todos reconhecem que a incorporação de tecnologias transforma a realidade de sala de aula, de modo que é preciso considerar aspectos anteriormente pouco, ou nunca, considerados. A investigação, a experimentação, a formulação de

hipóteses, a compreensão conceitual, em vez da aprendizagem de técnicas e a combinação das abordagens gráfica, numérica e analítica se fazem, agora, fortemente presentes.

Nesse cenário se insere a discussão em torno da visualização como essencial, ou não, à aprendizagem da Matemática. O levantamento bibliográfico a este respeito mostra que há diferenças entre o que os autores entendem por visualização e qual deve ser seu *status* na Educação Matemática: alguns educadores matemáticos reconhecem-na como relevante, outros advertem que imagens "incontroláveis" podem constituir-se em barreiras à construção de significados matemáticos. Segundo Villarreal, de qualquer modo, o processo de visualização é favorecido pelas múltiplas possibilidades que o computador oferece em termos de representações gráficas, sendo assim preciso considerá-lo nas pesquisas que relacionam Cálculo e computadores.

Encerrando o capítulo, a autora localiza seu estudo no âmbito da revisão bibliográfica apresentada e faz, a priori, opções pelos enfoques de alguns autores, que darão suporte à análise dos dados.

No terceiro capítulo, Villarreal descreve sua metodologia de pesquisa. A opção foi por uma metodologia do tipo qualitativa, baseada principalmente na realização de experimentos de ensino construtivistas, trabalhando com duplas de estudantes em um ambiente computacional. A decisão de trabalhar com duplas de alunos baseou-se, principalmente, na crença de que os diálogos mostrariam os processos seguidos, ao resolver um problema de modo mais espontâneo e nas vantagens destacadas por Fontana e Frey, que são: proporcionar maior riqueza de dados, propiciar o auxílio mútuo e estimular os participantes. Entretanto, Villarreal também reconhece e aponta algumas dificuldades.

Três duplas de estudantes participaram da pesquisa, tendo sido realizados quatro encontros com cada dupla. No primeiro encontro, foi dedicado um tempo inicial à familiarização com os comandos do programa escolhido para a realização dos experimentos: o *Derive*. Os critérios para a escolha deste *software* foram: a facilidade na sua manipulação, a possibilidade de abordar os conteúdos matemáticos propostos e a disponibilidade do software na Unesp, onde foram realizados os experimentos.

Nos experimentos, a pesquisadora propôs atividades relacionadas ao estudo de funções e derivadas, tais como: traçar o gráfico da derivada a partir do gráfico da

função, discutir a relação entre a monotonicidade da função e o sinal da sua derivada, e entre os zeros da derivada e os extremos das funções, traçar e relacionar o gráfico da função com o gráfico da derivada e com o gráfico de retas tangentes à função. Funções e derivadas eram conteúdos já abordados na sala de aula da disciplina Matemática Aplicada, no curso de Biologia, do qual as participantes eram alunas. Durante a realização dos experimentos, Villarreal tentaria intervir apenas quando fosse necessário estimular a experimentação ou levantar questões apropriadas; não fornecer respostas prontas às perguntas, mas fomentar atitudes de investigação nas estudantes.

Desses experimentos, que foram vídeogravados, foram escolhidas passagens relevantes, as quais Villarreal chamou "episódios", à medida que oferecessem possíveis respostas para a pergunta da pesquisa, ou que fossem interessantes pelas estratégias desenvolvidas pelas estudantes para realizar as atividades propostas e/ou pelas dúvidas suscitadas, ou que evidenciassem situações típicas do ambiente computacional. A partir desses episódios, foi realizada a análise dos dados.

Com o quarto capítulo, configuram-se os experimentos bem como os episódios. Nele encontramos, para cada experimento, primeiramente uma breve descrição das estudantes participantes dos experimentos, e suas concepções prévias sobre retas tangentes e derivada; em seguida, Villarreal apresenta detalhadamente os episódios selecionados, entremeados de transcrições das falas das estudantes e da pesquisadora e de análises e interpretações dos episódios. Uma análise da entrevista final de avaliação, realizada com cada dupla, encerra a seção.

O capítulo é estruturado como um hipertexto, oferecendo a possibilidade de que a leitura seja feita de diferentes maneiras; tanto os experimentos como os episódios têm duas opções de leitura: a versão detalhada ou a versão resumida. Ao todo foram relatados doze episódios e foram desenvolvidas extensas análises.

Os relatos e análises dos episódios evidenciam, entre outros elementos, o pensamento matemático das estudantes. Observou-se que há conflito entre o conceito de derivada da função e a reta tangente ao gráfico da função, e que a forma usada por elas para resolver um conflito gerado pelo computador, em geral, é algébrica. Villarreal comenta que isso pode ser decorrente da vivência que as estudantes têm com um ensino de Matemática realizado, historicamente, de forma essencialmente algébrica. Os relatos e análises dos episódios sugerem ao leitor que a abordagem visual proporcionada pelo

computador não é natural para as alunas, que recorriam, com freqüência, ao lápis-e-papel para resolver alguns conflitos. Entretanto, elas passaram a pensar mais nos conceitos e não ficaram só a repetir algoritmos.

Algumas mudanças observadas e destacadas por Villarreal neste ambiente computacional poderiam ser classificadas como vantagens. O computador favorece as representações múltiplas à medida que oferece a oportunidade de pensar e resolver problemas de novas formas, propiciando maior compreensão dos conceitos de Cálculo, ilustrando e reforçando conceitos básicos. Isso ocorre porque, com ele, é possível estabelecer a inter-relação entre abordagem gráfica e rotinas numéricas e analíticas no estudo de funções e derivadas. O computador oferece imagens que, de outra forma, seriam inacessíveis para os estudantes e comunica novas idéias visual e experimentalmente.

A partir da investigação e da experimentação, as alunas formulavam, reformulavam e rejeitavam hipóteses, lançavam novas questões e apresentavam dúvidas em contextos não previstos pela pesquisadora e que não surgiriam em outro ambiente. Os experimentos conduziam-se, por vezes, por caminhos inesperados, configurando uma forma de aprender e pensar como "rede", tornando possível estabelecer conexões e novas relações de significados na aprendizagem.

Inevitavelmente, este fator de imprevisibilidade, gerado pela presença do computador, trouxe algumas dificuldades, pois evidenciou ambigüidades e limitações de algumas representações visuais - Villarreal aponta que essas ambigüidades são inerentes a esse recurso. Dificuldades apresentadas pelas alunas, ao lidar com questões relativas à escala e ao espectro do plano cartesiano, que é apresentado na tela, e dificuldades da pesquisadora em aproveitar/explorar os recursos do computador, também foram sentidas nos experimentos.

Enfim, muitos elementos foram primorosamente analisados por Villarreal neste capítulo. Nele percebemos, realmente, a voz da pesquisadora que, embora apoiada em outros investigadores, manifesta seus próprios sentimentos, suas compreensões, suas percepções e, até mesmo, seus deslizes entre as funções de pesquisadora e "professora-explicadora".

Estas compreensões são re-elaboradas e é apresentada uma nova perspectiva de análise dos dados quando, no quinto capítulo, a autora relaciona as idéias e os fatos

emergentes dos dados obtidos dos experimentos com a literatura pesquisada a respeito, descrita no capítulo 2. Alguns autores são escolhidos e destacados, configurando-se definitivamente o quadro teórico sobre o qual se apóiam as análises.

Quando o computador é integrado às atividades de ensino surge, inevitavelmente, a necessidade de coordenar as abordagens visual e algébrica. Para tratar do aspecto da visualização, Villarreal apóia-se nas importantes contribuições do trabalho de Presmeg, assim como em Borba e Confrey, cujos estudos mostram como os softwares de representações múltiplas conduzem os estudantes a um movimento de idas e vindas, da abordagem visual à algébrica, na construção de idéias matemáticas.

Assim, a relação ser humano - computador leva as estudantes a reorganizarem sua forma de pensar, conforme explica Villarreal, baseada nas idéias de Tikhomirov. Estas estudantes integram o computador ao conjunto dos instrumentos que freqüentemente usam, como o lápis e o papel. Configura-se um sistema envolvendo pessoas e instrumentos que condiciona a forma de expressão, ou mesmo de construção, do pensamento. No caso desta pesquisa, insere-se neste sistema a pesquisadora, de modo que se estabelece um "coletivo pensante", uma nova "ecologia cognitiva" - para desenvolver estas análises, a pesquisadora toma como referência os estudos de Levy.

Quando da verificação de que, entre os aspectos emergentes do ensino em ambiente computacional, estavam fortemente presentes a experimentação e a elaboração de conjeturas e refutações caracterizando os processos de (construção do) pensamento da estudantes, Villarreal recorre aos estudos de Lakatos. No vaivém destas conjeturas e refutações, não mais se consegue a linearidade ou o encadeamento das tarefas e conteúdos em uma seqüência lógica característica da concepção cartesiana do conhecimento. São inseridas, então, as idéias de Machado, quando da verificação de que o ensino se dirige por caminhos inesperados, estabelecendo *links* e nós, sem hierarquização, entrelaçando idéias como numa rede - uma "rede cognitiva".

Dirigindo as análises para o ensino do Cálculo, especialmente para as concepções apresentadas pelas estudantes a respeito de retas tangentes, Villarreal aponta as perspectivas de Baldino, Vinner e Cabral. No estudo apresentado na tese, quando foi pedido para traçar o gráfico da derivada conhecendo o gráfico da função, aparecem elementos que indicam que as estudantes assumem semelhanças entre a função e a derivada. A pesquisadora destaca que estudos nesta linha foram também desenvolvidos

por Nemirovsky e Rubin.

Finalizando a tese, Villarreal apresenta sua compreensão sobre os limites, o alcance e as perspectivas do seu trabalho. Expõe também suas reflexões sobre as contribuições que seu trabalho trouxe, ou trará, à Educação Matemática.

Não se pode deixar de salientar, entre os aspectos relevantes do trabalho de Villarreal, o levantamento bibliográfico, apresentado no capítulo 2, que é riquíssimo e pode ser de grande valia aos que se dedicam à docência ou a pesquisas sobre o ensino de Cálculo ou sobre a incorporação de tecnologias ao ensino da Matemática.

O procedimento de coleta de dados, adotado para pesquisa, na forma de experimentos de ensino, creio ter sido muito bem explorado e aproveitado pela pesquisadora. Os episódios selecionados são muito interessantes e fornecem importantes informações a respeito do pensamento matemático das estudantes envolvidas nos experimentos. Entretanto, vale ressaltar que a pesquisadora relata que também fez observações em sala de aula, bem como aplicou questionários e realizou entrevistas, porém, quase não se vê, no texto da tese, referências aos dados obtidos dessas observações de aula ou do questionário 3, aplicado pela pesquisadora, sobre calculadoras gráficas, passando a impressão de que tiveram pouca influência nos resultados da pesquisa. Trabalhos de investigação, realizados em ambiente de laboratório, normalmente tratam de atividades muito localizadas, enquanto que experiências realizadas em sala de aula mostram melhor o que acontece no cenário real do processo de ensino-aprendizagem (PONTE, 1991). Acrescente-se a isso que, considerando várias fontes de dados, Villarreal estaria levando a cabo uma forma de *triangulação* (ALVES-MAZZOTTI, 2001) bastante recomendável em pesquisas qualitativas, e que conferiria maior representatividade aos seus dados.

A redação da tese é bastante longa (402 páginas) e apresenta em detalhes todos os passos da pesquisa. Contém descrições sistemáticas e explícitas de todo o processo, da seleção e definição do problema até os resultados finais, permitindo ao leitor uma compreensão bastante clara das especificidades de toda a trajetória percorrida por Villarreal durante a investigação (GOLDENBERG, 1997). Embora seu texto se mostre, por vezes, um pouco repetitivo e a leitura integral cansativa, a estruturação em forma de “hipertexto” também permite uma forma de leitura mais curta e resumida.

De qualquer modo, creio que o trabalho de Villarreal seja bastante útil àqueles

que se dedicam ao ensino de Cálculo, pois representa uma tentativa explícita de relacionar a pesquisa com as questões práticas do ensino. Agrega-se a isso o fato de que é perceptível que a experiência docente da pesquisadora nesta disciplina norteia, mesmo que sutilmente ou sem que a própria pesquisadora se aperceba disso, as percepções, as análises e as posições que assume enquanto realiza a pesquisa.

Aos que se dedicam à pesquisa na linha de novas tecnologias e Educação Matemática, ou de ensino de Cálculo, considero fundamental a leitura desta tese. A pesquisa realizada por Villarreal evidencia que situações educativas em ambiente computacional apresentam características particulares e oportunidades de aprendizagem que caracterizam formas diferentes do pensar matemático e implicam a necessidade de novas discussões.

"É sempre maior o trabalho que fica a ser feito do que aquele que já foi realizado" (Villarreal, p.372).

Bibliografia

ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O Método nas Ciências Naturais e Sociais**. São Paulo: Pioneira, 2001.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar**. Rio de Janeiro: Record. 1997.

PONTE, J. P.; NUNES, F.; VELOSO, E. **Computadores no Ensino da Matemática**. Projeto Minerva, Lisboa: APM. 1991.