ISBN 978-85-89082-23-5

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Gradiva: Lisboa, 2000.[1]

Por Marco Aurélio Kalinke[2]

É possível ensinar Matemática sem a resolução de exercícios ou sem a repetição, que, segundo alguns formalistas, visam ao domínio da técnica? Qual a importância das circunstâncias históricas no desenvolvimento da Matemática? Que concepções filosóficas e visões de Ciência podem ser associadas ao estudo da Matemática? Estas questões, e tantas outras, permeiam a interessante obra de Bento de Jesus Caraça.

Numa época em que muitos apregoam o ensino da Matemática de uma forma prática, voltada "para a vida", contextualizada, costuma-se esquecer que ela possui uma prática própria, que seu contexto pode estar nela mesma, e que o seu estudo pode, ainda que de forma indireta, agregar importantes subsídios ao desenvolvimento da capacidade intelectual dos indivíduos. Bento Caraça estava ciente desses fatos há mais de meio século. Sua obra mais conhecida: "Conceitos Fundamentais da Matemática" foi escrita no final da década de 1930. A edição mais recente, que data de 2000, pela editora portuguesa Gradiva, é apresentada em volume único, dividido em três partes, intituladas: Números, Funções e Continuidade. Por elas, Caraça trafega sem preocupações com uma linearidade histórica inequívoca, e nos espanta com a seqüência de desenvolvimento dos conteúdos que aborda. Sua atenção é dirigida para as discussões – muitas vezes filosóficas – que trouxeram a Matemática a um estágio que consideramos avançado, mas que, segundo o próprio autor, é apenas um dos momentos da caminhada, em avanço contínuo, desta Ciência.

Desenvolvendo um tema considerado árduo, ele persegue um texto claro, objetivo e de leitura agradável, tanto para a Matemática quanto para o leigo. Seu direcionamento não é para o ensino de algoritmos ou regras de cálculo, mas para o entendimento de idéias e conceitos fundamentais. O autor olha para a Matemática com olhos de alguém que a entende como uma Ciência viva, em constante transformação, e

[1] Digitalizado por Cláudia Laus e Viviane Cristina Almada de Oliveira.
[2] Mestrando em Educação, linha de pesquisa em Educação Matemática, UFPR, Curitiba, Paraná.

ligada ao momento histórico em que suas descobertas são realizadas. Ainda que reconheça a falta de aplicabilidade prática e imediata de muitos dos seus conteúdos, ele os analisa como sendo parte de um grande esforço da humanidade para atingir um alto grau de domínio e desenvolvimento das idéias.

O texto contribuiu para modificar o modo como a Matemática era entendida e estudada. Para muitos tratava-se de uma Ciência criada harmoniosamente, sem contradições e com encadeamentos perfeitos. Bento de Jesus Caraça propôs-se a mostrá-la sob outro prisma, e foi muito bem sucedido. Entretanto, houve também críticas ao livro, principalmente quanto ao conteúdo e à forma de tratá-lo ao longo do texto; as mais comuns foram quanto à quebra do rigor e do formalismo então vigentes.

Parte 1: Números

A primeira parte do livro - Números - é composta de seis capítulos: O problema da contagem, O problema da medida, Crítica do problema da medida, Um pouco de história, O campo real e Números relativos. Caraça inicia nos apresentando o surgimento dos campos (ou conjuntos) numéricos dos naturais, racionais, reais e relativos, nesta ordem. Já de início fica evidente a proposta diferenciada do autor. Ele trata os conjuntos numéricos como conseqüência de uma evolução histórica e não como um agrupado de diagramas, modo este muito utilizado por autores nossos contemporâneos.

Merecem destaque também a preocupação evidente com as definições e a utilização da terminologia adequada. A linguagem direta e corriqueira, sem aparatos técnicos, evidencia a tentativa de levar a Matemática ao leigo, sem, contudo, abrir mão do formalismo e rigor, sempre que eles sejam necessários ou indispensáveis.

Caraça prima, também, pela apresentação de uma perspectiva de Ciência e de Matemática, deixando claro que é dentro dessa perspectiva que sua obra acontece:

> Não é em qualquer lugar e sob quaisquer condições que se pode esperar o aparecimento de tais esboços científicos (sobre a inteligibilidade do universo). A sua organização exige uma atitude de cuidadosa observação da Natureza e um esforço de reflexão que não são compatíveis com a vida do homem primitivo, para o qual a luta diária pelo sustento e abrigo imediato absorve todo o tempo e atenção. (p. 63).

ISBN 978-85-89082-23-5

A dinâmica utilizada na apresentação dos conjuntos faz o leitor se interessar pela obra de imediato. Ao fugir da tradicional abordagem: naturais, inteiros, racionais e reais, Caraça procura argumentos históricos e filosóficos. Segundo ele, é mais óbvio pensar num desenvolvimento da Matemática a partir do contexto histórico do que da seqüência lógica que nos leva ao encadeamento tradicional dos assuntos.

Os números naturais teriam surgido devido à necessidade dos homens de efetuar contagens, ainda que muito simples, tanto para controlar suas coisas e objetos, quanto para efetuar pequenas transações comerciais. Com o desenvolvimento da civilização, foram surgindo outros problemas, como os relativos aos cálculos de áreas e comprimentos. Ele parte da premissa que um dos primeiros estudos matemáticos dos povos antigos foi a Geometria. Especialmente na Grécia e no Egito, ela teve um grande destaque. O seu estudo pressupõe uma necessidade de números racionais anterior à necessidade dos números negativos. Ao realizar as medidas de comprimentos ou os cálculos de áreas, observa-se que os números racionais (fracionários) são a regra, ao passo que os números naturais são os casos especiais. Os números negativos sequer são necessários.

Na seqüência desta hipotética linha evolutiva, ao realizar medidas, é preciso comparar segmentos de unidades diferentes e relacioná-los. Ao efetuar estas relações - exemplificadas pela incomensurabilidade entre lado e diagonal de um quadrado -, deparamos com novos números, até então desconhecidos, que são os irracionais. A junção destes conjuntos (naturais, racionais e irracionais) origina o campo dos números reais. Só então o autor aborda os números relativos, ou negativos, acrescentando-os ao conjunto dos reais, pois aqueles mantêm as mesmas propriedades destes.

A ampliação dos conjuntos numéricos é feita pela utilização dos princípios da extensão e economia, duas de suas idéias fundamentais. De acordo com o primeiro princípio, o homem tem tendência a generalizar e estender todas as aquisições do seu pensamento e a procurar o maior rendimento possível dessas generalizações, pela exploração metódica de todas as suas conseqüências; já o princípio da economia é adaptado da seguinte forma: *"convém que as novas definições saiam, o menos possível, dos moldes das antigas, para que a introdução delas no cálculo se faça com o menor dispêndio possível de energia mental, não só no dar da definição, como nas suas conseqüências"* (p. 26). Assim, ao trabalhar com um conjunto, todas as suas operações e

ISBN 978-85-89082-23-5

propriedades são apresentadas e definidas. Paralelamente, a cada novo conjunto, derrubam-se as impossibilidades anteriores, o que leva à organização de um novo campo numérico.

Merece um destaque especial, nesta primeira parte, o capítulo IV: Um pouco de história. Nele, o autor faz uma caminhada pela história do desenvolvimento da Matemática e suas idéias fundamentais. Das primeiras preocupações matemático-filosóficas, respondidas por Thales de Mileto, passando por Anaximandro, Anaxímenes, Heráclito, Pitágoras, Zenão e tantos outros, Caraça nos dá uma mostra de como as idéias foram surgindo e de como os questionamentos foram sendo respondidos. Este processo origina outras dúvidas e outros problemas, numa espiral que vai se alargando e chega até os nossos dias. Ele nos mostra, assim, o constante ir e vir, entre avanços e retrocessos, até que atinjamos um ponto satisfatório de entendimento, a partir do qual se colocam novas dúvidas e questões.

Ao tratar da impossibilidade da radiciação de números negativos, com radicais de índice par, Caraça comenta:

> ... essa dificuldade pode dar origem a um novo campo numérico, que se obterá por negação da negação. Isso é evidentemente realizável, mas, antes de o fazer, ponhamos a seguinte pergunta: - vale a pena? Haverá porventura problemas cuja resolução exija a ultrapassagem da negação mencionada? (p. 98).

É dentro desta linha de conduta que ele trata os problemas matemáticos: eles surgem de uma necessidade, prática ou interna, e são resolvidos, ou não, originando assim outros problemas que seguem a mesma trajetória. Caso não exista a necessidade, eles ficam em estado de hibernação, até que alguém, num outro momento histórico, com outras necessidades e outra visão de mundo, proponha-se a resolvê-los. Nas palavras do autor: *"Deu-se uma gestação lenta, em que a necessidade e instrumento interatuaram, ajudando-se e esclarecendo-se mutuamente"* (p. 118).

Parte 2: Funções

Os quatro capítulos da segunda parte do livro tratam do estudo das funções. De início, o autor se propõe a fornecer o conceito de função, bem como as suas características, noções e definições, sempre permeadas por contextualizações históricas, internas ou filosóficas .

ISBN 978-85-89082-23-5

Ao abordar a representação geométrica das funções, o autor observa que se dá o que ele chama de "A grande unificação", que é a tradução de leis analíticas em leis geométricas, unificando assim os dois campos, que durante mais de vinte séculos tinham sido considerados estanques.

No segundo capítulo, Caraça nos leva a uma digressão técnica, em que são apresentadas algumas funções importantes, tais como as racionais, algébricas, circulares, transcendentes e as sucessões numeráveis. Em seguida, são apresentadas as equações algébricas e suas resoluções, que levam à necessidade, até então inexistente, de se manusear as raízes de índice par de números negativos. O autor, mais uma vez, deixa clara a sua postura filosófica, quando nos afirma que: *"Mas é sempre assim; a Cultura e a Ciência, produtos humanos, acompanham os homens e forjam-se nas suas lutas, nas suas marchas inquietas para fugir ao sofrimento e buscar vida melhor";* e mais adiante: *"Onde não há necessidade não há criação"* (p. 146 e 154).

Esta é uma das passagens de maior destaque no livro, pois, durante os capítulos anteriores, certa impossibilidade para a radiciação havia sido colocada como um ponto problemático a ser futuramente resolvido. Neste momento, com a criação do campo dos números complexos, desaparece esta impossibilidade. A definição e apresentação deste campo, com todas as suas operações, é uma tarefa árdua. Caraça conseguiu desenvolvê-la com sucesso e, salvo pequenas "fugas" dos problemas matematicamente mais complexos, suas explicações são claras e objetivas. Ressalve-se que essas fugas, presentes em alguns pontos do texto, são constantemente assumidas e justificadas pelo autor:

> Temos deixado até agora, propositadamente, de lado essa questão que faz parte mais da técnica das séries do que do conjunto de idéias gerais que lhes estão ligadas. Não é fácil e, às vezes, é mesmo extremamente difícil averiguar se uma série é ou não convergente; os matemáticos possuem, para isso, uma complicada aparelhagem... (p. 256).

No último capítulo desta parte, encontra-se novamente uma excursão ao passado, nos moldes daquela realizada na parte I, agora de âmbito mais filosófico que histórico. Nele, o autor se propõe a apresentar algumas idéias de Platão, Sócrates, Aristóteles, Descartes, Newton e outros. Ele tenta encontrar explicações para alguns desvios de rota e interrupções no desenvolvimento da Matemática; assim o autor deixa claro que os gregos não chegaram à definição de função por não admitirem a noção de movimento na Matemática – o chamado horror ao movimento – que teria surgido em decorrência dos problemas propostos por Zenão, conhecidos como os paradoxos de Zenão.

Ao final do capítulo, o autor salienta que: "*Todas as coisas devem ser estudadas em relação com o seu contexto. É nesse tribunal que devem ser julgados os resultados que os instrumentos analíticos, na sua forma mais geral, permitem adquirir*" (p. 197).

Parte 3: Continuidade

A terceira e última parte do livro é formada por três capítulos: O método dos limites, Um novo instrumento matemático – as séries e O conceito de continuidade. Esta parte é, para o leigo, aquela que apresenta o maior grau de dificuldade. Isso se explica pelo fato de ser, matematicamente, um estudo no qual se exige, usualmente, um cuidado especial com as definições e conceitos. O próprio autor comenta, durante o texto: *"Uma pequena pausa, por favor; parece-me que tenho direito a ela porque estas últimas jornadas têm sido, vamos lá, um pouco ásperas"* (p. 260).

Esse comentário, feito em tom de conversa com o leitor, é uma das surpresas desta terceira parte da obra. Nela, o autor se utiliza do recurso do diálogo com um pretenso leitor, onde idéias são discutidas ou reforçadas.

O objetivo desta parte do livro é apresentar alguns conceitos e definições sobre infinitésimos, limites, séries e continuidade. No trato das séries, em especial, Caraça utiliza outro artifício interessante. Utilizando as operações conhecidas, ele nos leva a alguns absurdos matemáticos, tais como 2 = 1 e 1 = 0. Está implícita a finalidade de mostrar que estas operações são inadequadas para trabalhar com as séries. A partir desses absurdos, ele desenvolve os novos conceitos e as novas operações.

Esta edição termina com uma coletânea de textos, intitulados *Sementes que Vingaram*. São textos de vários autores sobre temas que, durante o livro, Caraça colocou como passíveis de desenvolvimentos futuros e que nos provam, definitivamente, o caráter atual e permanente da obra de Bento de Jesus Caraça.

Finalmente, podemos ficar com a voz do próprio autor, numa passagem que reflete e ilustra a totalidade da sua obra, quando ele nos diz: *"Como é bom ver a Rainha das Ciências aproximar-se dos homens, a recolher aquela dose de humanidade, que é inerente a todas as suas obras!"* (p. 267).