ISBN 978-85-89082-23-5

Desenvolvimento do Pensamento Geométrico – O Modelo de Van Hiele[1]

Ana Maria Kaleff[2]
Almir de Souza Henriques[3]
Duke Monteiro Rei[3]
Luiz Guilherme Figueiredo[3]

Resumo

Nos cursos de graduação em Matemática, observa-se que mesmo alunos cursando os últimos semestres apresentam deficiências no desenvolvimento do pensamento abstrato em geometria. Tais alunos não conseguem relacionar sistemas axiomáticos diversos, como também têm dificuldades em sistematizar o pensamento dentro da própria geometria euclidiana. Buscando entender esta problemática, iniciou-se a pesquisa sobre o Modelo de van Hiele do pensamento geométrico, que é apresentado, na literatura, como guia para aprendizagem em geometria. Apesar da importância que tem sido dada ao Modelo, tem sido pouco pesquisado no Brasil. O Modelo consiste de cinco níveis de compreensão que descrevem as características do processo de pensamento, e de cinco fases seqüenciais de ensino que favorecem a aquisição de um nível de pensamento de um determinado tópico de geometria.

Abstract

In university courses of Mathematics, it can be observed that even students nearing the completion of their studies display deficiency in the development of abstract geometrical thinking. Such students are incapable of relating differing axiomatic systems, not to mention the difficulties they experience when attempting to systematize thought within euclidian geometry. This research, in the effort to get to grips with the problem, is based upon the van Hiele mode of geometrical thinking, generally accepted as a guide to geometrical studies. In spite of the universal acclaim accorded this model, it has attracted but scant attention from researchers here in Brazil. The model specifies five levels of understanding, descriptive of the characteristics of the thought process, and five sequential phases of theaching adapted to the attainment of any given level of thinking upon a specific topic of geometry.

Apresentação

A divulgação do artigo que se segue objetiva levar ao conhecimento de um público mais abrangente e interessado em Educação Matemática um trabalho realizado por alunos do curso de licenciatura em Matemática da Universidade Federal Fluminense (UFF), que participaram, como bolsistas de Iniciação Científica, de um projeto de pesquisa da Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação da UFF, sob

[1] Digitalizado por Adailton Alves da Silva e Marcos Lübeck, alunos do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista, campus de Rio Claro.
[2] Professora do Departamento de Geometria da Universidade Federal Fluminense – UFF – Niterói – RJ. Mestre em Matemática.
[3] Alunos do Curso de Licenciatura em Matemática.

orientação da Professora Ana Maria Kaleff. O trabalho foi apresentado no *2º* Congresso o Nacional de Iniciação Científica em Matemática na Universidade Federal do Rio de Janeiro, em julho de 1989, e consta dos resumos do referido congresso, páginas 9 a 14.

Através desta divulgação, pretende-se chamar a atenção da sociedade acadêmica em geral e, em particular, das instituições de fomento à pesquisa, para a importância do trabalho do bolsista de Iniciação Científica no desenvolvimento da Pesquisa em Educação Matemática. Tal importância se verifica tanto em nível dos resultados das pesquisas, que podem ser do interesse de toda a comunidade acadêmica, como também em nível da formação do futuro pesquisador, que tem a oportunidade de realizar um trabalho acadêmico que enriquecerá a sua própria formação cientifica.

Apesar de corresponder à íntegra do trabalho, escrito em Maio de 1989, o artigo que se segue ainda é uma contribuição atual, pois complementa o conteúdo das poucas publicações sobre o Modelo de van Hiele existentes na literatura brasileira. A não ser por um artigo publicado pela Professora Maria Laura M. L. Lopes no Boletim nº 15 do GEPEM-RJ, em 1983, pelos artigos da Professora Lilian Nasser também publicados nos Boletins do GEPEM, nº 27, de 1990 e nº 29, de 1991 e pelo artigo apresentado pela orientadora deste trabalho e constante dos resumos da 2ª Semana de Matemática, Estatística e Computação da UFF, de maio de 1990, o Modelo de van Hiele não tem sido muito divulgado e pesquisado no Brasil. As características do Modelo são citadas pelo Professor Nilson Jose Machado no livro “Matemática e Língua Materna” da Editora Cortez, publicado em 1990, e uma aplicação do Modelo foi publicada pelo Projeto Fundão, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, em 1992, numa apostila intitulada “Proposta de Geometria segundo a teoria de van Hiele”.

Desenvolvimento do pensamento geométrico: o modelo de van Hiele

Nos cursos de graduação em matemática, observa-se que mesmo alunos que cursam os últimos semestres podem apresentar deficiências na formação do pensamento abstrato em geometria. Tais alunos, muitas vezes, não conseguem relacionar sistemas axiomáticos diversos, por exemplo, não relacionam propriedades comuns a geometrias finitas e a não-euclidianas, como também têm dificuldades em sistematizar o pensamento dentro da própria geometria euclidiana. No entanto, esses alunos cursaram, no mínimo, todo o ciclo básico de matemática. Por que isso ocorre? Podemos inverter a escalada do insucesso no ensino da geometria, que sabidamente é iniciada nos cursos secundários, e que vem se refletindo na universidade?

Visando responder a essas perguntas, iniciou-se o projeto: "Fundamentos de geometria: aspectos práticos dos níveis de pensamento de van Hiele", e o presente trabalho é um resumo da parte introdutória do mesmo.

Histórico do Modelo de van Hiele

Esta pesquisa é baseada nos trabalhos realizados pelos professores holandeses Pierre van Hiele e sua esposa Dina van Hiele-Geldof, que investigaram o desenvolvimento do pensamento em geometria e cujos resultados começaram a ser publicados em 1959. Todavia, como Dina morreu logo após ter publicado os seus trabalhos iniciais, foi seu esposo quem reformulou e desenvolveu a teoria.

Com exceção da União Soviética que reformulou seu currículo de geometria nos anos 60 conforme o assim chamado *Modelo de van Hiele,* este só recentemente vem despertando a atenção internacional. Foi somente em 1976 que um professor americano, Izaak Wirsup, começou a divulgar o Modelo. Ao mesmo tempo, Hans Freudenthal, na Holanda, chamou a atenção sobre o trabalho dos van Hieles em seu livro "Mathematics as an Educational Task" (1973). Ultimamente, com as traduções para o inglês feitas em 1984 por Geddes, Fuys e Tischler, vem crescendo o interesse pelas contribuições do casal.

O Modelo de van Hiele

O Modelo de van Hiele do pensamento geométrico se coloca como guia para aprendizagem e para avaliação das habilidades dos alunos em geometria.

O mesmo consiste de cinco níveis de compreensão, chamados *visualização, análise, dedução informal, dedução formal* e *rigor* que descrevem as características do processo de pensamento.

Pierre van Hiele percebeu que os problemas e tarefas apresentadas às crianças freqüentemente requerem vocabulário, conceitos ou conhecimento de propriedades além do nível de pensamento da criança. Seus trabalhos revelam uma alarmante falta de harmonia entre o ensino e aprendizado em matemática. Numa sala de aula, as crianças pensam em diferentes níveis, diferem umas das outras e também do professor, usam freqüentemente palavras e objetos de formas diferentes das empregadas pelos seus professores e pelo livro texto. Segundo Freudenthal, quando o ensinamento ocorre num nível acima ao do estudante, a matéria não é bem assimilada e não fica retida por muito tempo na memória, assim como concepções erradas, quando aprendidas, parecem persistir. Segundo van Hiele, percebe-se também que o crescimento cronológico das idades não produz automaticamente um crescimento nos níveis de pensamento e que decididamente poucos estudantes atingem o último nível.

Nos trabalhos iniciais, os van Hieles desenvolveram a estrutura para uma experiência com os níveis de pensamento, com o objetivo de ajudar o estudante a desenvolver *insight* em geometria. Eles definem *insight* como se segue. Uma pessoa mostra *insight* se: (a) é capaz de se desempenhar numa possível situação não usual; (b) desenvolve corretamente e adequadamente as ações requeridas pela situação; (c) desenvolve deliberadamente e conscientemente um método que resolva a situação.

Para terem *insight* estudantes entendem *o que* estão fazendo, *por que* estão fazendo algo, e *quando* o fazem. Eles são capazes de aplicar seu conhecimento ordenadamente para resolver problemas.

Apresentamos a seguir um breve resumo dos níveis de van Hiele.

- NÍVEL 0 - *VISUALIZAÇÃO* ou *RECONHEC1MENTO:* Neste estágio inicial, os alunos raciocinam basicamente por meio de considerações visuais. Conceitos geométricos são levados em conta como um todo, sem considerações explícitas das propriedades dos seus componentes. Assim, figuras geométricas são reconhecidas pela aparência global, podendo ser chamadas de triângulo, quadrado, etc., mas os alunos não explicitam as propriedades de identificação das mesmas. Um aluno, neste nível, pode aprender o vocabulário geométrico, identificar formas específicas, reproduzir uma figura dada, etc.

- NÍVEL 1 - *ANÁLISE:* Neste nível, os alunos raciocinam sobre conceitos geométricos, por meio de uma análise informal de suas partes e atributos através de observação e experimentação. Os estudantes começam a discernir características das figuras geométricas, estabelecendo propriedades, que são então usadas para conceituarem classes e formas. Porém eles ainda não explicitam inter-relações entre figuras ou propriedades.

- NÍVEL 2 - *DEDUÇÃO INFORMAL* ou *ORDENAÇÃO:* Neste nível, os alunos formam definições abstratas, podendo estabelecer inter-relações das

ISBN 978-85-89082-23-5

propriedades nas figuras (por exemplo, um quadrilátero com lados opostos paralelos necessariamente possui ângulos opostos iguais) e entre figuras (por exemplo, um quadrado é um retângulo porque ele possui todas as propriedades do retângulo). Podem também distinguir entre a necessidade e a suficiência de um conjunto de propriedades no estabelecimento de um conceito geométrico. Assim, classes de figuras são reconhecidas, inclusão e interseção de classes são entendidas; entretanto, o aluno neste nível não compreende o significado de uma dedução como um todo, ou o papel dos axiomas. Provas formais podem ser acompanhadas, mas os alunos não percebem como construir uma prova, partindo-se de premissas diferentes.

- NÍVEL 3 - *DEDUÇÃO FORMAL:* Neste nível, os alunos desenvolvem seqüências de afirmações deduzindo uma afirmação a partir de uma outra ou de outras. A relevância de tais deduções é entendida como um caminho para o estabelecimento de uma teoria geométrica. Os alunos raciocinam formalmente no contexto de um sistema matemático completo, com termos indefinidos, com axiomas, com um sistema lógico subjacente, com definições e teoremas. Um aluno neste nível pode construir provas (e não somente memorizá-las) e percebe a possibilidade de desenvolver uma prova de mais de uma maneira.
- NÍVEL 4 - *RIGOR:* Neste nível, os alunos avaliam vários sistemas dedutivos com um alto grau de rigor. Comparam sistemas baseados em diferentes axiomas e estudam várias geometrias na ausência de modelos concretos. São capazes de se aprofundarem na análise de propriedades de um sistema dedutivo, tais como consistência, independência e completude dos axiomas.

Propriedades do modelo

Para fornecerem *insight* ao pensamento, que e específico de cada nível, relativo a um determinado assunto em geometria, os van Hieles identificaram algumas generalizações que caracterizam o Modelo e que fornecem um roteiro quanto à metodologia a ser aplicada:

(1) o Modelo é parte de uma teoria de desenvolvimento e, portanto, presume que um aluno para atuar com sucesso em um determinado nível necessita ter adquirido (através de experiências de aprendizagem apropriadas), as

ISBN 978-85-89082-23-5

estratégias dos níveis anteriores, não permitindo ao aluno saltar níveis;

(2) o processo, ou falta a dele, de um nível para outro, depende mais dos conteúdos e métodos de ensino recebidos do que da idade. Van Hiele chama atenção para o fato de que é possível *ensinar* a um aluno habilidades acima de seu nível real. Por exemplo, sabe-se que se podem treinar crianças na aritmética das frações sem falar-lhes no que as frações realmente significam. Todavia, em tais situações o que realmente acontece é que o conteúdo foi reduzido para um nível mais baixo, e o entendimento não ocorreu;

(3) no mecanismo entre os níveis, os objetos inerentes a um nível se transformam em objetos de estudo para o nível posterior. Por exemplo, no nível 0 é percebida a forma de uma figura; todavia, suas propriedades e seus componentes serão reconhecidos e analisados somente no nível 1;

(4) cada nível tem seus próprios símbolos lingüísticos e seu próprio sistema de relações conectando esses símbolos. Assim, uma relação que é aceita como *correta* em um nível pode ser modificada em outro. Um exemplo é encadeamento das classes de inclusão (por exemplo, um quadrado é também um retângulo, que é também um paralelogramo; no entanto, estas figuras num nível anterior naturalmente podem ser consideradas excludentes).

Fases de aprendizagem

Citemos a seguir cinco fases seqüenciais de ensino propostas pelos van Hieles, os quais afirmam que o ensino desenvolvido de acordo com essa seqüência favorece a aquisição de um nível de pensamento em um determinado tópico de geometria.

- FASE 1 - *QUESTIONAMENTO* ou *INFORMAÇÃO:* Professor e alunos estabelecem um diálogo versando sobre o material de estudo deste nível. Neste diálogo são feitas observações, questões são levantadas, e o vocabulário específico do nível é introduzido. Nesta fase o professor percebe quais os conhecimentos anteriores que os alunos têm do assunto, e estes percebem qual direção os estudos tomarão.
- FASE 2 – *ORIENTAÇÃO DIRETA:* Os alunos devem explorar o assunto de estudo através de materiais cuidadosamente selecionados pelo professor que os levarão gradualmente a se familiarizarem com as estruturas características deste

ISBN 978-85-89082-23-5

nível. As atividades, em sua maioria, são tarefas de uma só etapa, que possibilitam respostas específicas e objetivas.

- FASE 3 - *EXPLICÍTAÇÃO:* Com base nas experiências anteriores, os alunos refinam o uso de seu vocabulário, expressando verbalmente suas opiniões emergentes sobre as estruturas que observam. O papel do professor, nesta fase, deve ser mínimo, deixando o aluno independente na busca da formação do sistema de relações em estudo.
- FASE 4 - *ORIENTAÇÃO LIVRE:* Nesta fase, as tarefas apresentadas ao aluno devem ser de múltiplas etapas, tarefas que possibilitam várias maneiras de ser completadas ou tarefas em aberto. É fundamental que o aluno ganhe experiência na busca de sua forma individual de resolver as tarefas, buscando sua própria orientação no caminho da descoberta de seus objetivos; desta maneira, muitas relações entre os objetos de estudo se tornam mais claras.
- FASE 5 – *INTEGRAÇÃO:* Esta fase é de revisão e síntese do que foi estudado, visando uma integração global entre os objetos e relações com a conseqüente unificação e internalizarão num novo domínio de pensamento. O papel do professor nesta fase é o de auxiliar no processo de síntese, fornecendo experiências e observações globais, sem todavia introduzir idéias novas ou discordantes.

Ao final desta quinta fase, os alunos devem ter alcançado um novo nível de pensamento, estando aptos a repetir as fases de aprendizagem no nível seguinte.

Conclusões

Neste resumo não temos por objetivo apresentar experiências baseadas no trabalho de van Hiele; todavia, queremos ressaltar algumas conclusões que julgamos fundamentais e que são fruto do nosso estudo até agora realizado:

- A geometria é, em geral, ensinada de uma forma mecânica.
- As atividades no ensino da geometria reduzem o nível de seu conteúdo para que o mesmo possa ser memorizado pelos alunos.
- A linguagem e o questionamento são empregados pelo professor de uma forma deficiente, pois ele na maioria das vezes não faz uso do conhecimento prévio que o aluno tem a respeito de um assunto e nem busca saber em que

nível o aluno se encontra neste tópico.

- É essencial que os professores saibam combinar aprendizagem com o nível de pensamento do estudante, bem como, segundo o próprio van Hiele observa, tomar consciência de que é necessário pesquisar a teoria subjacente ao estabelecimento dos níveis de pensamento, pois só através destes estudos poderão ajudar os alunos a pensar de um nível para outro.
- Van Hiele admitiu, em comunicação pessoal com Alan Hoffer em 1985, que estaria particularmente interessado nos três primeiros níveis que vão das séries escolares mais elementares ao início do terceiro grau. De fato, observamos na literatura disponível que o último nível, o do rigor, é o menos desenvolvido nos seus trabalhos originais e que também tem merecido pouca atenção dos pesquisadores.
- Em recentes pesquisas nos Estados Unidos da América e em alguns países europeus, os níveis de van Hiele têm sido pesquisados em outras áreas além da geometria, tais como na química e na economia, ressaltando ainda mais a importância do seu estudo.

Referências

HOFFER, A. Van Hiele - Based Research. In Lesh, R.; Landau, M. (Eds.) **Accquisition of Mathematical Concepts and Processes**. Academic Press, USA. São Paulo: Ática, 1983,

HOFFER, Alan. Geometry is more than Proof. **Mathematics Teacher**, n. 74, Jan., 1981, p. 11-18, USA.

BURGER, W. F.; SHAUGHNESSY, M. J. Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. **Journal for Research in Mathematics Education**, vol. 17, n. 1, 1986, p. 31-48, USA.