ISBN 978-85-89082-23-5

La natureza y los papeles de las herramientas semióticas en la actividad matemática[1][2]

Marianna Bosch Casabò[3]

Resumen

Toda actividad humana recurre a herramientas de diversas naturalezas: objetos materiales, orales y grafos, gestos, imágenes mentales, etc. La actividad matematica no es diferente de las demás desde este punto de vista. Se utilizan en ella, ya sea para crear objetos matematicos como para manipularlos, lo que llamamos *herramientas semióticas* tomadas en diferentes *registros semióticos:* el oral, el escrito y el gestual. El análisis de las actividades mateniaticas aparentemente más elementales muestra que estas exigen a su actor una gestión permanente del recurso a los diferentes registros semióticos y una coordinación muy precisa de ellos.

Presentamos aquí los prolegómenos de una investigación en didáctica de las mateniaticas dirigida por Yves Chevallard que, partiendo de las consideraciones anteriores, tiene como objeto el de estudiar esta *economía de la actividad matematica*, con los problemas de disponibilidad, accesibilidad y fiabilidad que plantea el complejo de herramientas semióticas utilizadas en la realización de un determinada tarea.

Abstract

Every human activity resorts to tools of a varied nature: material, oral and graphic objects, mental pictures, gestures, etc. From this point of view the mathematical activity is not different form the others. In order to create or to handle mathematical objects, we put into play what we call *semiotic tools* which we take from different *semiotic registers:* oral, written and gestural ones.

The analysis of the apparently most elementary activities shows that they ask from the subject a permanent use of the different semiotic tools and of their precise coordination. We present here the prolegomena of a joint research in didactic of mathematics with Yves Chevallard that, starting from the above considerations, has as its object to study such *economy of the mathematical activity* and the problems of availability, accessibility and reliability of the semiotic tools complex used in the realization of a given task.

1. La actividad matematica como actividad humana

Quisiera esbozar la problemática de un trabajo de investigación en didáctica de la matemáticas que realizo bajo la dirección de Yves Chevallard (I.REM. d'Aix-Marseille, Francia). El punto de vista que aquí adoptamos es el de *antropología didáctica de las matemáticas.* Se trata con ello de hacer entender que la didáctica de las matemáticas sitúa

[1] Digitalizado por Anderson Afonso da Silva e Washington Marques, alunos do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista, campus de Rio Claro.

[2] Artigo recebido para publicação em setembro de 1991.
Comunicação apresentada no 1º. Congresso Ibero americano de Educação Matemática, Sevilha, setembro de 1990

[3] Universitat Autónoma de Barcelona, Departamento de Matemáticas.

su objeto de estudio en un macro más amplio del que se adopta habitualmente: el objeto de estudio de la antropología es el Hombre en general, entendido a través de su actividad o sus múltiples actividades, es decir en tanto que ser social. La antropología de las matemáticas estudia a su vez al Hombre en contacto con las matemáticas; y mas en particular, la antropología didáctica de las matemáticas estudia al Hombre *aprendiendo o enseñando* matemáticas.

Al situar la didáctica de las matemáticas en el campo general de la antropología se pretende que la actividad matematica sea considerada en primer lugar como una actividad entre otras, es decir entre el conjunto de las actividades humanas. Así podremos comparar, sin cometer sacrilegio, la actividad del matemático o la del alumno que se enfrenta a un problema de matemáticas, con, por ejemplo, la actividad de un mecánico frente a una avería, o la de un abogado frente a un problema jurídico, o la de un medico frente a un enfermo, etc.

No ignoro que esta toma de position epistemológica puede asombrar a los matematicos y a los profesores de matemáticas (e incluso a algunos investigadores en didáctica de las matemáticas). Para muchos de ellos, la especificidad de la enseñanza de las matemáticas cae por su propio peso y el hecho de compararla con otras actividades les parece irreverente o, como mínimo, incongruente. Pero lo primero que salta a la vista es que esta actitud de los sujetos de lo que llamaremos *la institución matematica* es también la actitud de los sujetos de cualquier otra institución que ven espontáneamente sus propias actividades como especificas, sin punto de comparación con las demás. En otras palabras, el considerar la propia actividad como específica e incomparable con la demás *es mi rasgo altamente no-especifico.*

Pero solo manteniendo a distancia la afirmación de la especificidad e incluso de la singularidad de la actividad matematica, seremos capaces de ver lo que esta actividad tiene de común con las demás actividades humanas. De hecho, existe por lo menos un punto en común: toda actividad humana necesita de *herramientas.* Lo que conviene ahora es elucidar la natura de lo que llamamos herramientas y la manera en que se utilizan. Sera entonces su naturaleza y sus modos de empleo lo que definirá la verdadera especificidad de la actividad considerada.

Si comparamos ahora la actividad del matemático con, por ejemplo, la del mecánico que arregla coches, tenemos tendencia a ver, en el primer caso, una actividad únicamente "intelectual" - el pensar -, mientras que en el otro vemos una manipulación mas o menos hábil y experta de herramientas (en el sentido ordinario de la palabra), es decir, una actividad "manual". Este punto de vista, tengámoslo presente, nos viene dado por la cultura y debe ser ajeno al punto de vista antropológico objetivo. Porque si observamos, libre de todo prejuicio, al matemático trabajando (y por matemático entendemos también en este caso al niño o joven haciendo matemáticas), veremos que su actividad se presenta en primer lugar como un manejo adecuado de herramientas. Más exactamente, y este es el sentido de nuestro trabajo, el investigador en didáctica de las matemáticas deberá aprender a ver (porque esta capacidad no le viene dada espontáneamente por su familiaridad con la enseñanza) en toda actividad matematica y contra toda evidencia de la cultura, esta dimensión genérica de toda actividad humana: *el homo sapiens* es de forma en separable *homo faber,* fabricante y utilizador de herramientas.

2. Un ejemplo: las herramientas del razonamiento sobre la proporcionalidad

Aplicaremos esta problemática a un ejemplo que ha suscitado montones de trabajos: a saber, lo que llamamos la proporcionalidad, o mejor el *razonamiento proporcional.* Imaginemos un alumno frente al siguiente problema: " ¿Si 4 caramelos cuestan 6 pesetas, cuanto custarán 14 caramelos?". Al observar al alumno intentando resolver este problema, no nos interesara saber si lo consigue hacer o no (lo que seria. la problemática espontanea del profesor, por ejemplo). Tampoco nos interesaremos por sus procedimientos, o por sus "concepciones" (que son los puntos de vista dominantes en gran parte de la investigación en educación, hoy día). Nosotros nos fijaremos en las herramientas que utiliza y en el uso que hace de ellas, empezando a precisar, al mismo tiempo, lo que entendemos por herramienta en el marco de una actividad matematica.

Volvamos pues a nuestro alumno. En la aritmética de antaño, la principal herramienta la constituía un pequeño discurso oral que podría ser el siguiente: "Si 4 caramelos cuestan 6 pesetas, un caramelo costara 14 veces menos, esto es 6:4 pesetas. Si un caramelo cuesta 6:4 pesetas, 14 caramelos costaran 14 veces más, esto es...". En este punto, la herramienta que constituye este pequeño discurso (y que el alumno sabía de memoria) cedía su sitio a otra herramienta que pertenece al registro escrito: el cálculo numérico. En otras palabras, el alumno debía pasar del registro del lenguaje oral (el del discurso) al registro escrito del cálculo numérico.

Este utillaje tradicional que permitía enfrentarse a situaciones de proporcionalidad simple se ha vuelto hoy día obsoleto. Otras herramientas le han sustituido. Por ejemplo, nuestro alumno construirá una tabla parecida a esta:

caramelos	4	14
pesetas	6	?

Esta tabla es una herramienta, con la ayuda de la cual el alumno deberá realizar cierto trabajo.

Sin duda alguna, las herramientas de las que estamos hablando no son herramientas en el sentido material del término. Son *herramientas semióticas,* es decir, herramientas productoras de significado. Adoptamos pues un punto de vista bastante diferente y casi opuesto al habitual, que considera estos objetos semióticos como poseyendo un significado en sí mismos y no como objetos capaces de *producir* significado, significado que depende primordialmente del modo de manipulación de estas herramientas. Así, la noción de proporcionalidad, por ejemplo, no es una noción existente en un mundo de ideas puras, sino una noción coextendida de cierta utilización de ciertas herramientas de proporcionalidad como las que hemos identificado hasta aquí: decir que hay proporcionalidad entre dos tipos de magnitudes es decir que estas "herramientas de proporcionalidad" y sus modos de empleo se aplican a la situación considerada, y nada más.

Volvamos a la tabla dibujada arriba. Su manejo pertinente requerirá otra herramienta que quizá costara reconocer como un objeto semiótico. Para utilizar la herramienta-tabla, el alumno recurrirá a un | gesto de la mano, un gesto en forma de cruz, que se podría doblar con un comentario personal: "Esto, por esto igual a esto por esto". Parecerá insólito, y hasta incongruente, el considerar un simple gesto como una herramienta, y más aún como herramienta *semiótica*, es decir productora de significado. Pero desde el punto de vista antropológico que adoptamos, no debe haber duda al respecto. El gesto específico de nuestro alumno forma parte integrante del conjunto de herramientas necesarias para resolver este tipo de problema de proporcionalidad. En otros términos, "saber la proporcionalidad" es saber trazar la tabla, y saber este gesto sin equivocarse, y saber escribir a continuación una serie de números para plantear una igualdad numérica para llegar así al resultado buscado. Del mismo modo, aunque a otro nivel, saber multiplicar dos matrices será también saber trazar dos tablas de números, y saber efectuar ciertos gestos específicos. ¡Intenten sino multiplicar dos matrices sin hacer ningún gesto!

Vemos pues que lo que hemos llaamado una actividad matematica exige una serie de herramientas asociadas a una *praxis* en la que producen significado: de simples herramientas semióticas pasaran a ser lo que llamamos *praxemas.* Volvamos a la proporcionalidad y supongamos ahora que disponemos de herramienta "fracción". Podremos entonces sustituir la tabla por una más usual:

$$\frac{4}{6}=\frac{14}{?}$$

¿Como manipular esta herramienta semiotica? De hecho, su manipulación mas habitual, "hacer los productos en cruz", nos conduce a una praxis calcada a la que ya hemos analizado, y que, paradójicamente, comporta la "destrucción" de las fracciones recién introducidas. Pero se puede también manejar de un modo que utiliza por entero la potencia de la herramienta "fracción". A saber, el alumno que dominara la praxis canoníca del cálculo de fracciones podría llegar a la solución escribiendo simplemente:

$$\frac{14}{?}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}=\frac{2x7}{3x7}=\frac{14}{21}$$

Podemos observar aquí dos fenómenos generales: al sustituir a tabla por la fracción, hemos sustituido una herramienta rudimentaria por otra más potente y de mayor alcance, susceptible de soportar manipulaciones formales independientes de un tipo. particular de situación. Al mismo tiempo, el manejo de esta herramienta, la praxis en que aparece, exigirá un grado mayor de competencia. Notemos aquí que, en esta línea de desarrollo del utillaje matemático, el algebra moderna proporciona herramientas aun más potentes: decir o suponer que hay proporcionalidad entre el numero de caramelos y su precio es decir que la función *p-f(n)* que nos da el precio en función del numero de caramelos es una función *lineal*. Por lo tanto, saber que 4 caramelos cuestan 6 pesetas es saber que /(4) = 6. Si somos capaces de manipular la herramienta "función lineal" de manera pertinente,

podremos escribir:

$$f(14) = \frac{14}{4} x\, f(14) = \frac{14}{4} x\, 6$$

llegando así al resultado final /(14) = 21.

3. Los registros semióticos y su enlace

En contra del punto de vista del actor de la institución de enseñanza. la mirada antropológica sitúa en una position central a los medios de la actividad matematica. Y, de hecho, el proceso de enseñanza escolar se puede ver como el proporcionar al alumno un número creciente de herramientas, desde las más concretas y sencillas hasta las más abstractas y complejas. Así, cuando el niño llega por primera vez a la escuela, solo se espera de él al principio que responda brevemente a preguntas simples; pero muy pronto se la pondrá entre las manos, o delante suyo, objetos que deberá manipular de una manera determinada; y lo que se tendrá entonces en cuenta son estas manipulaciones y el producto de las mismas, El niño tendrá que dibujar, modelar con plastilina, hacer recortables, producir o reproducir frase simples y, más tarde, deberá llegar a efectuar operaciones y ensenar al profesor el resultado de sus manipulaciones.

Su encuentro con el mundo del grafismo y de los códigos escritos constituye, en este aspecto, un ensanchamiento fantástico de su utillaje, permitiendo así que vuelva realizarse en este alumno concreto lo que no dudare en llamar "el milagro de las matemáticas". Para contar^ por ejemplo, los cuadrados que aparecen en un rectángulo dividido por 12 franjas horizontales y 7 verticales, el niño podrá primero intentar enuméralos, es decir, asociar una herramienta semiotica oral (la lista de los números naturales 1, 2, 3, 4, ...) a una herramienta semiotica de tipo deíctico que le permite concretar una bisección entre los cuadrados y la lista de los nombres de los números. Poco después, la disponibilidad del código escrito de los números naturales y de las operaciones con estos números modificara sustancialmente su actividad, haciéndola mas ágil y fiable: bastara la enumeración de las franjas horizontales y verticales y la realización del producto de los números así obtenidos.

Este ejemplo, por sencillo que parezca, muestra uno de los aspectos constantemente presentes en toda actividad matematica: la asociación de varios registros semióticos dentro de un *complejo semiótico*, registros activados en el marco de una praxis determinada, con cambios y articulaciones de registro extremamente precisos. Estamos pues muy lejos de una actividad cuya sede principal seria "la cabeza". Seguramente el tipo de asociaciones y articulaciones que el alumno debe gestionar en una tarea dada puede cambiar según el repertorio de herramientas semióticas de que disponga; pero la existencia de registros y su articulación es un hecho constante. La complejidad semiotica es pues un aspecto esencial de la complejidad de la tarea.

Toda actividad matemática activa simultáneamente los tres registros del oral, el escrito y el gestual. Así, por ejemplo, si tomamos la multiplicación de dos números enteros, veremos que la efectuación de dicha operación se lleva a cabo de forma simultánea en el registro del escrito donde se conservan los resultados del cálculo, parciales o definitivas, en el registro del discurso oral que enuncia las operaciones durante o antes de su efectuación, y en el registro del gestual que relaciona y coordina la regla oral y el *script* de la operación.

4. Algunos problemas de investigación

4.1. Los efectos de tos valores culturales

Esta simple observación nos conduce a formular una serie de problemas didácticos. Destaquemos primero que, en una cultura de la que somos herederos, existe un jerarquía de valores que distingue tres registros principalmente: el oral, el escrito y el gestual. El primero está en la cumbre, y lo consideramos culturalmente como el mas próximo al "pensamiento puro": *la fona* (la voz) es lo que esta mas cerca de la *psique* (la mente). El registro del escrito, o mejor de lo que es esencialmente escrito (como por ejemplo el lenguaje algebraico) lo situamos en un grado mucho más bajo: a la cálida

ISBN 978-85-89082-23-5

creatividad del pensamiento libre le apenemos culturalmente la fría mecánica del cálculo, sin alma ni espíritu. Finalmente, el registro de lo gestual nos resulta como algo invisible o en cualquier caso parasito; y cuando lo destacamos o ponemos en evidencia (como hemos intentado aquí), sigue apareciendo como un accesorio contingente y casi indecente: uno pensamos a través de los gestos!

Esta jerarquía cultural tiene su eco en el aula. Se traduce particularmente por una supervaloración de aquellas ámbitos (como la geometría elemental) donde faltan las herramientas semióticas del cálculo junto con la peroración correlativa de los ámbitos que pertenecen esencialmente al cálculo escrito (como el algebra elemental). En cuanto al gestual, aunque este siempre presente en el aula en la actividad mostrativa del profesor, se nos aparece solo de manera subrepticia, a modo de polizón. Nunca se institucionalizara en saber ni aparecerá en los manuales: ningún libro indica como un operador humano efectúa ralamente el producto de dos matrices. Sera pues el alumno quien deberá reconstruir, practicando en privado, los parames orales y gestuales que la enseñanza solo le aporta de manera marginal, y que son sin embargo imprescindibles para llevar a cabo acciones eficaces y seguras.

La observación clínica de alumnos con dificultades muestra regularmente la existencia de un malentendido (de origen cultural) sobre la necesidad de activar estos diferentes registros al lado de lo que podríamos llamar una especie de "pereza cultural" y de desprecio hacia la utilización de estos registros (tanto el del lenguaje natural como el de los códigos escritos o el de la actividad gestual), sin los que la actividad.. matematica, como actividad antropológica, no se puede realizar. La simple idea de efectuar un cálculo puede parecerle al alumno como demasiado alejada de una autentica actividad mental (el pensamiento) y solo se acepta entonces la expresión verbal del cálculo, que sonara siempre, de todos modos, como una especie de degradación. Desde esta perspectiva, la efectuación del cálculo por escrito, la mano que dibuja símbolos en el papel son actos casi inaceptables, por incomprensibles: ?,Como se puede realizar el acto de pensar, tan noble y libre, mediante tales sujeciones materiales? ^Como creer, contra la cultura, que calcular también es pensar?

4.2. Las carencias de la estructura escolar tradicional

ISBN 978-85-89082-23-5

La problemática de nuestra investigación permite pues abordar desde otro Angulo algunas quistiones centrales, poniendo ademas.de relieve algunos factores que condicionan la conducta del alumno y que pasarían de otro modo desapercibidas. Así, si admitimos que toda actividad matematica recurre, en momentos particulares de su desarrollo, a un acompañamiento, comentario o envoltura discursiva, vemos inmediatamente que la restricción del trabajo individual constituye un hándicap considerable ni la medida en que la cultura corriente prohíbe prácticamente el soliloquio (exceptuando el de los niños pequeños), situándolo muy cerca del delirio. Y todos sabemos que, en la práctica efectiva, el matemático busca la compañía de sus colegas para llevar a cabo la elaboración discursiva necesaria como herramienta a su trabajo de pensar.

A partir de aquí, ya no es necesario invocar los supuestos efectos benéficos del llamado "conflicto socio-cognitivo “para explicar ciertos efectos facilitadores que se constatan en experiencias o practicas reales de trabajo en grupo. En sentido opuesto, la observación clínica de clases muestra que, en algunos de sus usos, el lenguaje natural tiende a ser eliminado. Así, ante una tarea de cálculo algebraico, los alumnos no tendrán ocasión ni posibilidad de *enunciar* lo que se disponen a hacer (análisis a priori) ni de *analizar* lo que ya han hecho (análisis a posteriori).

Quizá parecerá que hay a cierta incoherencia entre nuestra afirmación de la preeminencia cultural del Lenguaje natural por una parte, y su marginalización forzada en al aula por otra. En realidad, el valor culturalmente acordado al Lenguaje natural solo concierne su papel de "expresión del pensamiento", tomando el pensamiento como algo preexistente a su expresión Lingüística. No se reconoce en cambio el Lenguaje natural como *herramienta de pensamiento* y, en esto su rol, culturalmente ilegitimo, se le marginaliza efectivamente.

4.3 *El equilibrio entre lo funcional y lo formal*

Uno de los mayores problemas, tanto del profesor para concluir su enseñanza como para el alumno en la gestión de su aprendizaje es el del reparto y equilibrio del volumen de trabajo entre los diferentes códigos y registros semióticos que requiere toda actividad matematica, así como el de su tratamiento diferencial. Consideremos por ejemplo el problema del cálculo de primitivas con la técnica de integración por partes.

ISBN 978-85-89082-23-5

Esta se introduce habitualmente para que el alumno pueda tratar casos en que las técnicas conocidas anteriormente fracasan o parecen fracasar. En otras palabras, la introducción de esta herramienta — la integración por partes — se hace de manera funcional, como respuesta adaptada a cierta clase de situaciones-problema (como podría ser calcular la primitiva de X COSX, por ejemplo). Pero la técnica de integración por partes constituye en sí misma una praxis cuya existencia y realidad son independientes de su funcionalidad, desarrollando una actividad por así decir formal, "en el vacio" o lúdica, calculando primitivas simples que ya conoce, como por ejemplo $\int x dx$ escribiendo esta expresión como , $\int 1x dx$, o $\int x^{2} \frac{1}{x} dx$, o aún $\int x^{3} \frac{1}{x^{2}} dx$ etc. De hecho, el dominio formal de la integración por partes supone el dominio de una praxis que moviliza herramientas semióticas cuya manipulación necesita una puesta a punto formal. (Esta incluye como siempre una disposición adecuada de las escrituras sobre el papel y un discurso, eventualmente interior, que acompaña el despliegue de este *script.)*

A modo de explicación, el contraste entre estas dos situaciones se puede aproximar al siguiente contraste: en la técnica de integración por partes, la *organización prosémica* puesta en práctica y el problema que se resuelve (el cálculo de una primitiva) son de una misma naturaleza, porque todo aquí se pierde en un mismo registro semiótico, el del cálculo escrito. Hay así una tendencia a identificar el problema con la técnica de resolución. En cambio, en el caso del cálculo algebraico, el stock de problemas que le daba originariamente su estatus funcional se sitúa esencialmente en la descendencia del corpus de problemas de la aritmética de escuela primaria de antaño; y estos problemas se consideran aun como proviniendo del ámbito del racionamiento, del pensamiento, es decir, del lenguaje natural oral o escrito. La distancia es tal que la disociación histórica entre el pretendido reino del pensar y la mecánica del cálculo algebraico ha perdurado hasta hoy día.

5. Conclusión

El enfoque antropológico que defendemos aquí pone de relieve condiciones que nos parecen transcendentales para analizar la actividad matematica, aunque a menudo sean culturalmente recónditas. La comprensión mas efectiva de la realidad didáctica pasa por la identificación de las entidades de que consta dicha realidad. En el ámbito de

ISBN 978-85-89082-23-5

la educación, el proceso de mejo ración que todos deseamos tropieza continuamente con cuestiones fundamentales. Nos parece ilusório el querer ahorrarse su investigacion.