ISBN 978-85-89082-23-5

Aspectos históricos das Geometrias não-euclidianas[12]

Antonio Carlos Carrera de Souza[3]

O rastreamento histórico da elaboração das Geometrias não-Euclidianas nos mostra, de forma clara e insofismável, que a construção dos conhecimentos matemáticos é uma obra coletiva do saber humano que encontra formas lógicas, novas, engendradas a partir de antigas concepções.

Apontamos o fato de que as teorias relativas à construção das Geometrias não-Euclidianas, durante séculos, procuraram um caminho para demonstrar as questões relativas ao quinto postulado e a fragilidade da teoria de **Euclides**. Porém somente a partir dos estudos de **Lobatchevisk** (1793—1856), **Gauss** (1777—1855) e **Janos Bolyai** (1802—1860) — em meados do século XIX — é que encontramos uma nova abordagem, isto é, partem da ***negação*** do quinto postulado[2], não para encontrar falhas mas, para tentar construir outras geometrias, ditas então Geometrias não-Euclidianas, que postulam questões distintas em relação as paralelas.

Aspectos históricos

O quinto postulado, conforme o enunciado original de **Euclides,** no Livro I dos "Elementos de Geometria", é o seguinte:

> *Se uma reta, ao incidir sobre outras duas, forma do mesmo lado ângulos internos menores cuja soma das medidas é menor que dois retos, as duas retas prolongadas ao infinito se encontrarão no lado em que estejam os ângulos menores que dois retos?*[4]

Entre os estudiosos de **Euclides** — que estudaram a questão das paralelas —, vários procuraram eliminar a dificuldade contida no quinto postulado, procedendo de forma a: i) modificar a definição de retas paralelas; ii) procurar substituir o quinto postulado; iii) tentar transformar o quinto postulado em teorema.

Esses procedimentos buscam modificar a definição numero 23, do livro I, incluindo, por exemplo, o fato de as retas paralelas serem coplanares e eqüidistantes (i).

---

[1] Digitalizado por Anderson Afonso da Silva e Washington Marques, alunos do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista, campus de Rio Claro
[2] Comunicação recebida para publicação em 1992.
[3] Departamento de Educação, Instituto de Biociências, UNESP, Campus de Rio Claro (SP).
[4] PROCLO, In VERA, F. Científicos Gregos, pp. 1179, 2º v.

Tentam substituir o quinto postulado por outro mais evidente e de mais fácil aceitação (ii). Por último, procuram demonstrá-lo a partir dos outros postulados ou proposições (iii). Questionava-se o fato de o quinto postulado de Euclides apresentar-se como verdade evidente — evidência de que, segundo Francisco Vera, provavelmente o próprio Euclides duvidava. Era considerado *verdade decorrente* de outros axiomas ou postulados, exigindo, portanto, demonstração.

Durante vários séculos, matemáticos tentam demonstrá-lo, isto é, transformá-lo em decorrente das premissas anteriores, gastando, segundo Francisco Vera, *montanhas de papel e mares de tinta.* Vamos fazer um breve histórico do esforço que representou para a humanidade a conquista das Geometrias não-Euclidianas.

O primeiro matemático a nos fornecer dados sobre as tentativas iniciais feitas com o propósito de eliminar a dificuldade relacionada ao quinto postulado é *Proclo de Lícia* (412—485), no texto intitulado ***O Postulado das Paralelas***. Segundo **Proclo**, o primeiro a tentar enfrentar essa dificuldade é ***Possidônio*** (século I), que define retas paralelas como eqüidistantes no plano. Mas, no pressuposto de que existam retas coplanares e eqüidistantes, esconde-se a hipótese de que o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes a uma reta é, obviamente, uma outra reta — se conjugarmos a definição 23 com a noção comum 9 e a proposição 33, verificaremos que o pressuposto de retas coplanares e eqüidistantes já existe em ***Euclides*** — o que, objetivamente, equivale ao quinto postulado.

De acordo com ***Proclo***, o segundo matemático a tentar superar a dificuldade é ***Cláudio Ptolomeu*** (127—151), que acredita haver demonstrado o quinto postulado na obra ***Sobre o encontro das retas prolongadas a partir dos ângulos menores que dois retos.*** Lança mão de várias demonstrações de ***Euclides***, procurando demonstrar o quinto postulado como um lema. Parte da demonstração de que, se uma transversal forma com duas retas ângulos internos iguais a dois retos, essas duas retas são paralelas, isto é, não se encontram. Mais adiante, propõe que a recíproca dessa afirmação também é verdadeira. A proposição de ***Ptolomeu*** baseia-se no fato de que

> *(...) quando uma reta que incide sobre outras duas e forma ângulos internos do mesmo lado, menores que dois retos, as duas retas não só não são assintóticas (...) como o seu encontro se verifica do lado em que os ângulos são menores e não maiores que dois retos.*

Proclo adverte contra o raciocínio empregado por ***Ptolomeu*** porque acredita que o raciocínio deste, ao dizer que *uma reta, ao incidir sobre outras duas, forma de um* *lado ângulos menores ou maiores que a soma de dois reto*[5] não é um raciocínio correto de redução ao absurdo (um absurdo, por exemplo, seria resultar igual a quatro retos).

O próprio ***Proclo*** se inscreve na lista dos que questionam o quinto postulado da Geometria Euclidiana. Recusa-se a admiti-lo como postulado, uma vez que sua inversa, a proposição 17 — *a soma das medidas de dois ângulos de um triângulo é menor que dois retos* — é um teorema demonstrado por ***Euclides***, não lhe parecendo possível que uma proposição, cuja inversa é demonstrável, também não o seja. ***Proclo*** alerta também contra os abusivos apelos as evidências (intuições "a priori") e insiste sobre a possível existência de retas assintóticas. Procura demonstrar o quinto postulado, apoiando-se na seguinte proposição:

> *(...) a distância entre dois pontos situados sobre duas retas concorrentes pode tomar-se tão grande quanto quisermos, se prolongarmos convenientemente as retas* [6].

Essa proposição é apoiada na proposição aristotélica do infinito enquanto potência. ***Proclo*** considera-a evidente, mas ela é demonstrada por ***Girolamo Saccheri*** (1667—1773).

Outro matemático, ***Nassir-Eddin*** (1201—1274), traz uma contribuição, antepondo explicitamente ao teorema sobre a soma dos ângulos internos de um triangulo. Eis sua hipótese fundamental:

> *Se uma reta U é perpendicular a uma reta W em a e se a reta V é obliqua a W em b, então as perpendiculares traçadas de U sobre V são menores que ab do lado em que V faz um ângulo agudo com W e maiores do lado em que V faz um ângulo obtuso com W*[7].

Apoia-se na idéia de que, se dois segmentos de reta *ab* e *a'b'* são congruentes e caem em uma mesma região, isto é, em um mesmo semiplano, caso os segmentos sejam perpendiculares a *aa'* se obtém um retângulo. ***Nassir-Eddin*** conclui então que a soma dos ângulos internos de um triangulo é 180°. Anteriormente a ***Nassir-Eddin***, outros dois matemáticos islâmicos, ***ibn al-Haithan*** (965—1039) — conhecido no Ocidente como ***Alhazen* —** e ***Omar Khayyam*** (1050—1122), tratam do problema das paralelas. ***Alhazen*** parte de um quadrilátero tri-retângulo (conhecido como quadrilátero de ***Lambert****)* e julga ter provado que o outro ângulo é reto. ***Omar Khayyam*** parte de um quadrilátero bi-retângulo com dois lados congruentes, perpendiculares à base, conhecido como quadrilátero de ***Saccheri.*** E complementa-o com a questão de como eram os ângulos superiores, se retos, agudos ou obtusos. Exclui as possibilidades de os

---

[5] PROCLO, In VERA, F. Científicos Gregos, pp. 1180, 2º v.
[6] Ibid. pp. 1180, 2º v.
[7] BOYER, C. B. *História da Matemática*, pp. 176.

ângulos serem agudos ou obtusos, supostamente baseado em ***Aristóteles,*** e conclui optando pelos ângulos retos. Essas três tentativas são, na verdade, ratificações da teoria euclidiana.

No Ocidente, tanto as primeiras versões dos ***Elementos***, feitas nos séculos XII e XIII a partir dos textos árabes, como as feitas no século XV e inicio do século XVI a partir de textos gregos, não contêm de maneira geral, críticas ao quinto postulado. Com a tradução do texto de ***Proclo***, a crítica ao quinto postulado surge por volta de 1550. A idéia central no Renascimento é o estudo do conceito de eqüidistância. Entre os matemáticos mais destacados que estudam o quinto postulado no Renascimento, surgem: ***Cristopher Clavius*** (1537—1612), ***Pietro Antonio Cataldi*** (1548—1626), ***Giovanni Alfonso Borelli*** (1608—1679).

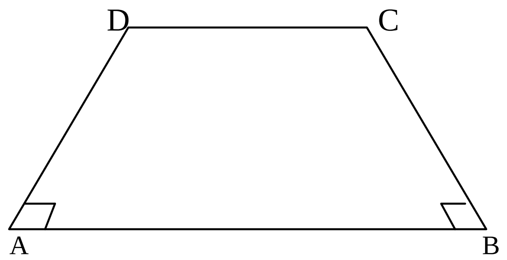
Mais um matemático se inscreverá na lista: é ***J.Wallis*** (1616—1703), que abandona o conceito de eqüidistância e parte para uma nova tentativa de demonstração do quinto postulado, baseando-se neste conceito fundamental: *Dada uma figura, existe outra semelhante, de magnitude arbitrária*[8]. Observemos que ele poderia mais simplesmente ter admitido a existência de dois triângulos não congruentes, com ângulos respectivamente congruentes. Justifica sua proposta no fato de que ***Euclides*** postulou a existência de um circulo e raios arbitrários e, portanto, admitiu tacitamente o principio de semelhança para círculos. O principio de ***Wallis*** estende a semelhança do circulo fornecida por ***Euclides*** a todas as figuras geométricas. A evidência empírica parece dar garantias a proposta de ***Wallis*** porém, falar na forma de uma figmo algo independente de sua grandeza implica, exatamente, um outro postulado, não mais evidente que o das paralelas e, talvez, mais complexo. A grande contribuição de **J. Wallis** é mostrar a possibilidade de um sistema geométrico no qual o quinto postulado não seja válido, mas o sejam os demais postulados de ***Euclides;*** então, nesse sistema, não poderão existir figuras semelhantes não congruentes, ligando a grandeza da figura à de seus ângulos.

Em uma leitura atenta dos trabalhos de ***Girolamo Saccheri*** (1667—1773), fica evidenciada a impossibilidade da demonstração do quinto postulado, a partir dos postulados anteriores. ***Saccheri*** adota as primeiras 28 proposições do livro I de ***Euclides***, as quais independem do postulado quinto. Tendo assumido como hipótese adicional a não validade desse, procura, entre as conseqüências da nova hipótese, alguma proposição que conduza a validade do postulado. Seu ponto de partida é um quadrilátero plano bi-retângulo isósceles (fig.l). **Saccheri** demonstra que os

[8] Ibid. pp. 227 – 281.

ângulos *D* e *C* são congruentes e distingue, então, três casos:

Figura 1

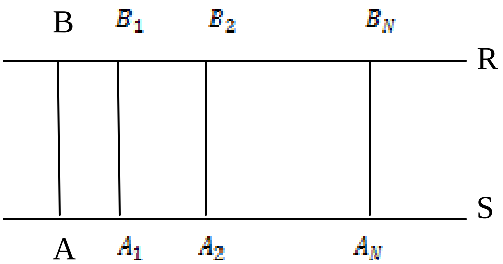


i) esses ângulos são ambos retos (hipótese do ângulo reto);
ii) esses ângulos são ambos agudos (hipótese do ângulo agudo);
iii) esses ângulos são ambos obtusos (hipótese do ângulo obtuso).

As hipóteses de ***Saccheri*** correspondente a três sistemas geométricos distintos, todos logicamente corretos: i) hipótese do ângulo reto — Geometria Euclidiana; ii) hipótese do ângulo agudo — Geometria Hiperbólica na qual não é verificado o postulado quinto de ***Euclides***. Dentro dessa hipótese, ***Saccheri*** estuda particularmente o comportamento mútuo de duas retas coplanares. Estabelece, então, que ou elas se encontram ou exibem comportamento assintótico; iii) hipótese do ângulo obtuso - verificada numa região convenientemente limitada da esfera, sendo a reta substituída pelo círculo máximo. Essa mesma hipótese, se válida na região completa, é, no entanto, incompatível com o conjunto das demais premissas de ***Euclides****;* temos, então, a Geometria Elíptica.

Saccheri mostra que cada uma das três hipóteses formuladas se verifica num só caso particular, será válida em qualquer outro caso; e, em correspondência respectivamente a cada uma das hipóteses, demonstra que a soma das medidas dos ângulos de um triângulo qualquer é igual, menor, ou maior que dois retos. Mas ***Saccheri***, acreditando, "a priori", na verdade da Geometria Euclidiana, julga erroneamente poder demonstrar que as duas hipóteses adicionais — a do ângulo agudo e a do ângulo obtuso — são absurdas.

No século XVIII, o ilustre matemático ***J.H.Lambert*** (1728—1777) toma como ponto de partida um quadrângulo plano tri-retângulo, distinguindo as seguintes hipóteses em relação ao quarto ângulo:



i) hipótese do ângulo reto;
ii) hipótese do ângulo obtuso;
iii) hipótese do ângulo agudo.

No caso da hipótese do ângulo reto, ***Lambert*** deduz facilmente o sistema euclidiano. Na segunda hipótese, utiliza-se da figura acima, onde *R* e *S* são retas perpendiculares a reta AB. A partir dos pontos B_1 , B_2 ,... ,B_N *de R*, traça perpendiculares à reta *S*, encontrando, então, os segmentos $\overline{BA}$, $\overline{B_1A_1}$, $\overline{B_2A_2}$, ... , $\overline{B_NA_N}$. Demonstra primeiramente que os segmentos entre *R e S* — ($\overline{BA}$, $\overline{B_1A_1}$, $\overline{B_2A_2}$, ... , $\overline{B_NA_N}$) — decrescem a partir de $\overline{AB}$; em seguida, mostra que os decréscimos ocorrem sucessivamente entre os segmentos. Encontra que:

$$\overline{BA} - \overline{B_NA_N} > (\overline{AB} - \overline{B_1A_1}) . N$$

Pelo postulado de ***Eudóxio-Arquimedes*** (postulado referente ao método da exaustão)[9], para N suficientemente grande, o segundo membro da desigualdade se torna tão grande quanto o queiramos; contraditoriamente, o primeiro membro da desigualdade é sempre menor que $\overline{BA}$. Por esse raciocínio, ***Lambert*** diz que a hipótese e falsa.

A terceira hipótese é construída a partir da mesma figura anterior, com a diferença de que os segmentos $\overline{BA}$, $\overline{B_1A_1}$, $\overline{B_2A_2}$, ... , $\overline{B_NA_N}$ vão crescendo sucessivamente. Isto faz com que ***Lambert*** não encontre contradições, como na segunda hipótese. Continua as deduções e, a partir da terceira hipótese, encontra que a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que dois retos. Descobre que "deficiência de um polígono "— a diferença entre $2(n-2).\frac{\pi}{2}$ e a soma dos ângulos do polígono — é

[9] O postulado de Eudóxio – Arquimedes é explicitado por Arquimedes no livro Sobre a Esfera e o Cilindro, como o quinto princípio (postulado): *Dadas duas linhas, duas superfícies ou dois sólidos desiguais, se o excesso de uma destas figuras sobre a outra é adicionado um certo número de vezes, pode superar uma ou outra das figuras que se comparam entre si.* Em linguagem atual esse postulado é assim enunciado pelo Prof. Benedito Castrucci: *se o segmento* $\overline{AB}$ *é menor que um segmento* $\overline{AL}$, *existe um múltiplo de* $\overline{AB}$, $\overline{AB}$. N (*N inteiro > 2) tal que N.* $\overline{AB}$ > $\overline{AL}$; CASTRUCCI, B., *Lições de Geometria Plana, pp. 59.*

proporcional à área desse polígono. ***Lambert*** avança, então, consideravelmente em relação aos estudos de ***Saccheri***, observando, ainda, que a terceira hipótese é incompatível com a existência de figuras semelhantes não congruentes — resultado decorrente da relação entre a "deficiência do um polígono" e sua área. Como esse resultado contraria a intuição espacial, ***Lambert*** descarta a terceira hipótese.

O último matemático a tentar a demonstração do quinto postulado foi ***A.M.Legendre*** (1752—1833). Suas publicações alcançam grande difusão e notoriedade, graças à forma elegante de seu estilo, mas seus métodos e seus resultados não assinalam qualquer progresso em relação aos estudos anteriores. Os teoremas atribuídos a ***Legendre*** são: i) a soma das medidas dos ângulos de um triangulo é igual ou menor que dois retos; ii) se essa soma valer dois retos, no caso de um triângulo particular, terá o mesmo valor para qualquer outro triângulo.

É importante salientar que esses teoremas já haviam sido enunciados um século antes por ***Saccheri***, mas, devido a pouca circulação de seu livro, "Euclides Liberto de Toda Falha", não foram conhecidos.

Em meados do século XIX, ***Lobatchevisk*** (1793—1856), ***Gauss*** *(1777*—1855) e ***Janos Bolyai*** (1802—1860) partem da negação do quinto postulado e, portanto, sendo o postulado das paralelas substituído por outro convenientemente estabelecido. O objetivo destes trabalhos não visava a encontrar as falhas já apontadas na Geometria Euclidiana, mas construir outras geometrias, ditas então Geometrias não-Euclidianas, que postulam a existência, não de uma única paralela, mas de pelo, menos duas paralelas ***(Lobatchevisk)*** ou da Ciência Absoluta do Espaço ***(Gauss-Bolyai).*** Isso gerou resultados distintos a respeito da concepção de espaço.

Com ***Riemann*** (1826—1866), a Geometria inclui as três concepções, isto é, a Euclidiana e as não-Euclidianas, havendo, portanto, um aprofundamento na essência do conceito de espaço. A Geometria de ***Riemann*** inclui a Geometria de ***Lobatchevisk*** — curvatura negativa —; inclui a Geometria Euclidiana — curvatura nula — e sugere a geometria com curvatura positiva — dita Riemanniana.

Sugerimos as pessoas interessadas em alguns relacionamentos simples das Geometrias não-Euclidianas com a Geometria Euclidiana a leitura de: DAVIS, P.J. e HERSH, R., ***A experiência Matemática***, Rio de Janeiro: Francisco Alves Editora, 1985. pp. 250—256, em especial o quadro da pp 255. Para as pessoas que desejam um maior aprofundamento no assunto abordado — histórico e desenvolvimento das Geometrias não-Euclidianas — e, sobretudo, desejam um conhecimento mais profundo, do ponto de vista teórico, sugerimos a leitura de BONOLA, R. ***Geometrías no Euclidianas***, Buenos Aires: Espasa Calpe-Argentina S. A., 1951.

Conclusões

Durante séculos os questionamentos relativos ao quinto postulado e a fragilidade da teoria euclidiana, no que tange a organização lógica, geraram uma série de trabalhos importantes e, sem sombra de dúvida, fundamentais na construção das Geometrias não-Euclidianas. Muitos desses trabalhos, à sua época, ou foram desconsiderados ou foram considerados como absurdos diante da verdade, inconteste até então, da teoria euclidiana. O estudo destes fatos mostra a importância que a análise do caminho, historicamente percorrido pelos pesquisadores, deve ter no contexto da **Educação Matemática** — onde o educador deve ter presente que a Matemática não se constrói somente com os acertos, ou seja, deve-se ter em mente que todos os esforços realizados para construir determinada teoria matemática merecem atenção, tenham estes tido sucesso ou não. Estudar as origens do conhecimento matemático atual, em muitos casos, pode ser mais proveitoso que o ensino — aqui tomado como a simples aceitação e transmissão das teorias matemáticas aceitas hodiernamente — de conteúdos prontos e acabados. O exemplo, desta afirmação, pode ser a análise, aqui efetuada, no estudo do quinto postulado, pois, através do rastro histórico do surgimento das Geometrias não-Euclidianas verificamos que os trabalhos dos matemáticos islâmicos ou de ***Saccheri*** apresentavam questionamentos fundamentais e necessários para a discussão do conceito de espaço, conforme o apresentado atualmente.

Bibliografia

BONOLA, R. (1951). **Geometrias no Euclidianas**, Buenos Aires: Espasa-Calpe-Argentina.

BOYER, C.B. (1974). **História da Matemática**, São Paulo: Editora Edgard Blucher.

CARAÇA, B. J. (1981). **Conceitos fundamentais da Matemática**, Lisboa: Sá da Costa.

CASTRUCCI, B. (1964). **Lições de geometria plana**, São Paulo: Nobel.

DAVIS, P.J; HERSH, R. (1985). **A experiência matemática**, Rio de Janeiro: Francisco Alves.

SOUZA, A. C. C. (1986). **Matemática e sociedade: um estudo das categorias do conhecimento matemático**, Dissertação de Mestrado, Campinas: FE/UNICAMP.

VAZQUEZ, A. S. (1977). **Filosofia da práxis**, Rio de Janeiro: Paz e Terra.

VERA, F. (1970). **Científicos gregos**, Madrid: Aguilar.