ISBN 978-85-89082-23-5

Análise Não-Standard[1]

Irineu Bicudo[2]

O fato de o Cálculo Infinitesimal ser inteiramente baseado na noção de limite tem como efeito colateral um grave defeito para a Matemática: esvazia completamente toda consideração de grandeza; por exemplo, para ela não ha qualquer diferença qualitativa entre números como $1, 10^{-2}, 10^{-100}, 10^{-1000}$.

Antes de trabalharem em termos de limite, os matemáticos recorriam aos infinitamente pequenos e aos infinitamente grandes (Guillaume de l'Hospital, Leibniz...). O fracasso de todas as tentativas de teorização dos infinitésimos conduziu d'Alembert, Lagrange e Cauchy, depois e Weierstrass e Dedekind a rejeitá-los em proveito do conceito (moderno) de limite, considerado como remédio (com o efeito colateral acima descrito) para o mal da falta de rigor. Aquele defeito não pode ser desconsiderado quando se leva em conta o vasto campo de aplicação da Matemática: o físico, o engenheiro, o biólogo, o economista, etc. podem praticá-la tanto quanto o matemático. Nas ciências da natureza, bem como nas humanas, a consideração de ordens de grandeza diferentes e comparáveis é a mais incontornável possível; talvez para o físico e para o engenheiro, o remédio seja pior do que o mal (o que nos faz lembrar a quadrinha que a tradição atribui ao grande sonetista português Bocage:

> Aqui jaz um homem rico
> Nesta rica sepultura,
> Que sarava da moléstia
> Se não morresse na cura.

2. Intuição x Rigor

[1] Digitalizado por Carolina Augusta Assumpção Gouveia e Thiago Pedro Pinto, alunos do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista, campus de Rio Claro.
[2] Prof. titular do Departamento de Matemática - IGCE - UNESP - Rio Claro, Prof. do Programa de Mestrado em Educação Matemática - UNESP - Rio Claro.

Há, no latim, o verbo clássico RIGEŌ,-ĒS,-UĪ,- ĒRE, que significa SER INFLEXÍVEL, RÍGIDO. Tal verbo tem, como forma derivada, o substantivo RIGOR, ŌRIS, cujo sentido próprio é "dureza, rigidez, rigor" e cujo sentido figurado é "rigidez, severidade, inflexibilidade". Assim, SER RIGOROSO significa ser INFLEXÍVEL, SEGUIR INFLEXIVELMENTE um padrão.

Em nível de linguagem, devemos distinguir o RIGOR SINTÁTICO do RIGOR SEMÂNTICO. Ser rigoroso sintaticamente significa proceder de acordo com os cânones gramaticais, seguir inflexivelmente o que preconiza a gramática. Ser rigoroso semanticamente significa estar de acordo com a "realidade", o que quer que isso possa querer dizer (por exemplo: "ser rigoroso com os fatos", isto é, narrar os fatos "como eles aconteceram").

Na Matemática, igualmente, o conceito de rigor tem essa dupla dimensão, sintática e semântica.

É bem verdade que, tanto na linguagem comum, como na linguagem matemática, o sintático e o semântico não se acham incisivamente separados. Basta lembrarmos, para isso, a seguinte consideração: "Quando nos servimos de MODO INDICATIVO, consideramos o fato expresso pelo verbo como CERTO, REAL, seja no presente, seja no passado, seja no futuro. Ao empregarmos o MODO SUBJUNTIVO, é completamente diversa a nossa atitude. Encaramos, então, a existência ou não existência do fato como uma coisa INCERTA, DUVIDOSA, EVENTUAL ou, mesmo, IRREAL". Ou esta: "L'instrumental (indo-européen) servait à indiquer avec qui ou avec quoi s'exécutait une action, L'instrument, la manière s'experiment donc normalmente par l'ablatif latin et la datif grec..." ("O instrumental (indo-europeu) servia para indicar quem ou com que se executava uma ação. O instrumento, a maneira exprimem-se então normalmente pelo ablativo latino e pelo dativo grego..."). Ou ainda: "Nevertheless, there are two good reasons for studying axioms and theorems as sentences (i.e,, as the object which appears on paper when we write down the axiom). The first is that if we choose the language for expressing the axioms suitably, then the STRUCTURES of the sentence WILL REFLECT to some extent the MEANING of the axioma". ("No entanto, há duas boas razões para estudar axiomas e teoremas como sentenças (i.e., como o objeto que aparece no papel quando escrevemos o axioma). A primeira é que, se escolhermos a linguagem para expressar os axiomas convenientemente, então a ESTRUTURA da sentença

REFLETIRA em certa extensão o SIGNIFICADO do axioma").

Descontando o que deve ser descontado, o que aqui nos interessa, pois é o que tem em mente os matemáticos, quando tratam do rigor em sua ciência, é o lado sintático do rigor. Como no âmbito de qualquer linguagem, desse ponto de vista, ser rigoroso em Matemática significa proceder de acordo com as regras de sua gramática, a LÓGICA.

Ora, a gramática é uma visão abstrata da linguagem.

Em sentido amplo, podemos entender por LINGUAGEM qualquer processo de comunicação. Mais tecnicamente, LINGUAGEM é "um conjunto complexo de processos - resultado de uma certa atividade psíquica profundamente determinada pela vida social - que torna possível a aquisição e o emprego concreto de uma LÍNGUA qualquer".

A Língua é um sistema gramatical: um conjunto organizado e opositivo de relações, adotado por determinada sociedade para permitir o exercício da linguagem entre os homens. Utilização social da faculdade da linguagem, NÃO PODE SER IMUTÁVEL, tem de viver em perpetua evolução, paralela à do organismo social que a criou.

Do equilíbrio de duas tendências resulta sua estabilidade pelos tempos fora: de um lado, a DIFERENCIAÇÃO, força natural, espontânea, desagregadora; de outro, a UNIFICAÇÃO, força coercitiva, disciplinante, conservadora.

Aristóteles, o criador da Lógica (a língua da linguagem da Matemática), diz explicitamente que observou os princípios do raciocínio usado pelos matemáticos, ABSTRAIU a partir deles, e reconheceu-os como princípios aplicáveis a todos os raciocínios.

O ponto chave é, como ficou apontado, que o Sistema Gramatical ou a Lógica evoluem. Para ficarmos apenas em um exemplo trivial da língua portuguesa, notemos o ultimo verso do primeiro terceto do belo soneto de Camões "Sete anos de Pastor Jacó servia":

Vendo o triste pastor que com enganos
lhe fora assim negada a sua pastora,
Como se não a tivera MERECIDA,

Assim, consagrava então a gramática portuguesa (como ainda o faz a francesa) o uso do particípio ("merecida") como predicativo do objeto direto ("a"), o que não acontece hoje em dia.

ISBN 978-85-89082-23-5

De modo análogo, a lógica aristotélica, que bastou aos gregos, não é suficiente aos nossos propósitos matemáticos.

O que queremos afirmar, com tais considerações, é que NÃO houve, ao longo dos tempos, uma modificação do conceito de rigor em Matemática, o que significa sempre seguir inflexivelmente os cânones da Lógica, a sua gramática. O que tem mudado, como não podia deixar de ser, é esse sistema gramatical da Matemática.

É possível analisar as teorias matemáticas como fez Hilbert ao resumir, em trabalho levado por Felix Klein ao "International Congress of Mathematics" para celebrar a fundação da Universidade de Chicago, a historia da teoria dos invariantes e seu próprio papel nela:

"In the history of a mathematical theory the developmental stages are easily distinguished: the naive, the formal, and the critical. As for the theory of algebraic invariants, the first founders of it, Cayley and Sylvester, are together to be regarded as the representatives of the naive period: in the drawing up of the simplest invariant concepts and in the elegant applications to the solution of equation of the first degrees, they experienced the immediate joy of first discovery. The inventors and perfectors of the symbolic calculation, Clebsch and Gordan, are the champions of the second period. The critical period finds its expressions in the theorems I have listed above..." (The theorems he referred to were hisown).

"Na história de uma teoria matemática, os estágios de desenvolvimento são facilmente distinguidos: o ingênuo, o formal, e o crítico. Quanto à teoria dos invariantes algébricos, os fundadores, Cayley e Sylvester, devem ser conjuntamente considerados como os representantes do período ingênuo: no estabelecimento dos conceitos invariantes mais simples e nas elegantes aplicações à solução de equações dos primeiros graus, experimentaram a alegria imediata da primeira descoberta. Os inventores e aperfeiçoadores do cálculo simbólico, Clebsch e Gordan, são os campeões do segundo período. O período encontra sua expressão nos teoremas que arrolei acima..." (Os teoremas a que ele se referia eram da sua autoria).

De um modo geral, os dois períodos iniciais - marcantemente o segundo - de uma teoria matemática (para manter a classificação de Hilbert, tão artificial quanto qualquer classificação) distinguem-se pela obtenção de um grande número de resultados, por um progresso febril (obtido usando-se técnicas intuitivas), em que os fins justificam os meios.

Por outro lado, o terceiro caracteriza-se por uma tomada de consciência, por uma aplicação dos princípios lógicos aos resultados obtidos, em suma, por uma retomada do rigor, para sancionar ou não, corrigir ou não o que veio antes.

Assim, se o rigor não traz, comumente, resultados novos, mas apenas põe em bases seguras resultados já obtidos, o que significaria que a Matemática não repousa sobre a Lógica, mas sobre a intuição (correta);

se o rigor, como diz Jacques Hadarmard, meramente sanciona a conquista da intuição; ou se, como afirma Hermann Weyl, a Lógica é a higiene que a matemática pratica para manter suas ideias saudáveis e fortes; ou ainda se, como mais incisivamente mantém René Thon, emulando tão nobres antepassados, ao asseverar que "tudo o que é rigoroso é insignificante", e afirmando que "Hilbert viu bem, em sua axiomática de geometria, que só poderia aceder ao puro rigor eliminando a intuição, privando os símbolos de todo sentido"; se, de fato, tudo é assim, para que vale o rigor no desenvolvimento da Matemática? A que se presta? Qual a sua função?

Esquecem-se os que se exprimem desse modo relativamente ao rigor que a intuição é construída no tratamento cotidiano das questões e que a "segurança" da intuição, baseada na familiaridade com as questões tratadas, se esboroa de encontro a situações novas, que ultrapassem os limites daquelas que a ajudaram a se construir. Aí, então, o rigor é fundamental para liberar tais situações de tudo o que seja essencial e, desse modo, preparar o terceiro terreno em que vicejará uma nova intuição. E por essa tensão dialética entre intuição e rigor que se sobe na espiral do conhecimento matemático. Mesmo que não percebamos, a intuição está impregnada do rigor que colaborou na possibilidades de sua criação. É o equilíbrio das tendências de DIFERENCIAÇÃO (intuição) e UNIFICAÇÃO (rigor). Não há avanço de uma sem a outra.

Essa é a função do rigor: não apenas sancionar a intuição, mas também possibilitar a sua construção.

3 - Análise não-standard

A história do Cálculo mostra que essa teoria cabe bem (sem que se precise alongar seu corpo ou cortar seu membros) no leito de Procusto da classificação de Hilbert. Seus fundadores, Leibniz e Newton, devem ser conjuntamente considerados como os representantes do período ingênuo. Euler, com seus importantes resultados, é o matemático por excelência do período formal, enquanto o período crítico é representado por Cauchy, Bolzano, Weierstrass, Dedekind e Cantor.

Mas a história do Cálculo só pode ser plenamente compreendida se considerarmos seu suporte filosófico. Devemos lembrar que, do século XVII ao século XIX, a história da Filosofia da Matemática é em boa parte idêntica à história dos Fundamentos do Cálculo.

Como Robinson salienta, o cuidado dos matemáticos gregos, Eudoxo, Euclides e Arquimedes, ao tratarem os problemas de quadratura e outras questões correlatas apenas reflete a desconfiança profunda e permanente em relação ao infinito

Aristóteles rejeitava o infinito atual (real), mas admitia o infinito potencial, o infinito que viria a ser chamado por Ockam de infinito sincategorimático. E a autoridade de Aristóteles, também nesse ponto, ajudou a moldar a história da ciência.

A história do cálculo talvez pode ser resumida na aceitação ou rejeição do infinito atual (não parece ter havido, ao longo do tempo, nessa história, qualquer dúvida quanto ao infinito potencial).

Parece que, nos estágios ingênuo e formal do desenvolvimento do Cálculo, era conhecimento comum serem os números infinitamente pequenos e os infinitamente grandes formas do infinito atual.

Leibniz não rejeitava o infinito atual; mas, pelo menos em seus últimos anos, considerava-o sem lugar no Cálculo. Enquanto, para ele, os termos de uma série infinita constituíam uma coleção sincategoricamente infinita, como dissemos acima, considerava os números infinitamente grandes e os infinitamente pequenos como pertencentes ao infinito atual. Assim, aceitava os primeiros como reais e considerava os últimos como ideais ou fictícios. "... on n'a pas besoin de prendre l'infini ici à la nigueur, mais seulement comme lorsqu' on dit dans l'optique, que les rayons du soleil viennent d'un point infiniment éloigné et ainsi sont estimés parallèles. (...) D'où il s'ensuit, que si quelqu' un n'admet point des lignes infinies et infiniment petites à la rigueur métaphysique et comme des chose réeles, il peut s'en servir sûrement comme des notions idéales qui abrégent le raisonnement, semblable à ce qu'on appell racins imaginaires dans L'analise commune (comme par exemple $\sqrt{-2}$)…

Cependant. il ne faut point s'imaginer que la science de L'infini est dégradée par cette explication et reduite à des fictions; car il reste tou-jours un infini syncategorématique, comme parte l'école, et il demeure vrai par exemple que 2 est autant que: $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$, etc..."

Assim também, conforme Robinson, podemos entender as explanações curiosamente ambivalentes e evasivas de Newton e seus seguidores, pelo menos em parte, por sua relutância em admitir a existência de tais entidades.

Criticando vigorosamente os infinitesimais de todos os tipos, ingleses e continentais, Berkeley se refere, com aprovação, a uma passagem em que Locke rejeita o infinito atual e expõe uma posição, em relação ao infinito, muito próxima à de Aristóteles.

Enquanto o Cálculo continuou a se desenvolver e a ter êxito (estágio formal), as fraquezas 1ógicas e filosóficas foram negligenciadas por um período (uma vez que, nesse estágio, são os resultados que interessam, o FIM JUSTIFICANDO OS MEIOS). De fato, o grande sucesso da teoria foi atribuído por alguns à aceitação da realidade do infinitamente pequeno e do infinitamente grande, em contraste com sua rejeição por Arquimedes e seus predecessores. Mas quando Cauchy tratou de erigir seu edifício em respostas às renovadas dúvidas, muito provavelmente escolheu a noção de variável como básica, uma vez que, por sua própria natureza, a ideia de variável parece expressar potencialidade e não realidade. A esse respeito, a mudança da perspectiva de Cauchy para o ponto de vista atual e crucial, uma vez que as (ε, δ)- condições são interpretadas naturalmente em termos de totalidade infinitas reais, e.g., os números reais.

Como considera Robinson, em termos das correntes diversas da Filosofia da Matemática, aplicadas a história do Cálculo, Cantor e seus seguidores, tendo produzido uma teoria dos conjuntos infinitos de extraordinária coerência e beleza, creram ter finalmente conquistado o infinito atual, do mesmo modo como supusera, duzentos anos antes, L'Hospital tê-lo achado no Cálculo dos Infinitesimais. Por outro lado, a perspectiva dos intucionistas e de outros construtivistas pode ser comparada à de Cauchy; enquanto o espírito do formalismo, ou pelo menos o de uma versão dele, em sua avaliação de amplas partes da Matemática contemporânea, está próximo ao de Leibniz, quando se expressou assim em seu pronunciamento sobre números infinitamente grandes e infinitamente pequenos: "que ce n'etaient que des fictions, mais des fictions utilies..."

Neste contexto histórico, a Análise Não-Standard recupera uma tradição, que alguns consideram ter sido interrompida com a chamada aritmetização da Análise, i.e., com os trabalhos de Weierstrass, Dekind e Cantor. É uma nova visão de uma retomada do rigor (estágio crítico). Como apresentada naturalmente no contexto da Matemática contemporânea, parece afirmar a existência de todos os tipos de entidades infinitas.

Assim, do ponto de vista do rigor semântico, o mesmo parece ter sido obtido pela aceitação de uma "nova realidade" onde encontram lugar novas "entidades" infinitas; enquanto, do ponto de vista do rigor sintático (o ponto de vista formalista), este foi alcançado pela introdução de "novos procedimentos dedutivos" (mudança gramatical).

Referências

ARISTÓTLES. **Física**, Livro III

BERKELEY, G. **The analyst**, Collected Work, vol. 4 (ed. A. A Luce & T.E. Jessop), London, 1951.

CUNHA, C.; CINTRA, L. **Nova Gramática do Português Contemporâneo**, Editora Nova Fronteira, Rio de Janeiro, 1985.

CAUCHY, A. **Cours d'Analyse**, Oeuvre complàte, ser.2,3.

HARTHONG, J. **L'analyse non-standard**, La Recherche, 148 (octobre), 1983,1194-1201.

LEIBNIZ, G.W. Mémoire de M.G.G. Leibniz Touchant son sentiment sur le calcul différentiel, **Journal de Trévoux** (Mathematische Schrif-ten, ed. CI. Gerhardt, vol. 5., p. 350).

LOCKE, J. **Essay Concerning Humane Understanding** (1960).

MEILLET, A.; VENDRYES, J. **Traités de Grammaire Compareé des Langues Classiques**, 5° ed., Honoré Champion, Paris, 1979.

ROBINSON, A. **Non-Standart Analysis**, North-Holland, New York, 1966.

SHOENFIELD, J.R. **Mathematical Logic**, Addison-Wesley Publ. Company, Reading, 1967.