ISBN 978-85-89082-23-5

Construtivismo e os objetos da Teoria Matemática[1][2]

Michael Otte[3]

Muitos filósofos da Matemática têm considerado a História Humana em geral e a História da Matemática em particular epistemologicamente irrelevantes. A Matemática parece ser um campo intelectual onde o desenvolvimento histórico é tragado pelo último estágio da arte, preservando, porém, ao mesmo tempo, o que permanece válido. Muitos acreditam que "contar a história de um objeto teórico x não é um empreendimento conceitualmente distinto de descrever a teoria de x . . . Pior ainda, a Matemática. . . não admite uma história no mesmo sentido em que a Filosofia ou a literatura admitem" (Rota 1986, 157)

Se, entretanto, se deseja ser hábil para desenvolver ou usar a Matemática de uma maneira significativa, é necessário colocá-la em seu próprio contexto. Para a grande maioria das pessoas, isso implica um empenho em achar conexões entre a Matemática e outros campos da experiência e disso resulta um interesse em história. Eu acredito no fato de que as idéias que carregamos conosco sobre o que a história humana é influenciarão nossas concepções concernentes a epistemologia da Matemática.

A Matemática e a Lógica não emergem somente de uma metanálise de troca societária, de comunicação e linguagem, como os empiricistas lógicos parecem acreditar; uma crença que os leva a manter uma absoluta distinção entre o analítico e o sintético e a tomar as leis da Lógica e as proposições da Matemática pura como analíticas. Existem, de fato, dois esquemas alternativos da compreensão, "que dominam a cultura filosófica contemporânea: o paradigma da linguagem e o paradigma da produção" (Markus, 1986). Desde o início do século XIX existem dois modos de pensar em Matemática que, mais ou menos, correspondem a esses esquemas e que se manifestaram, por exemplo, de um lado, no criticismo de Kant por Bolzano e, por outro

[1] Digitalizado por Adriana Richit e Andriceli Richit.

[2] Trabalho apresentado no International Symposium on Structures in Mathematical Theory, San Sebastian, 25-29 de setembro de 1990. Tradução de Antonio Vicente Marafioti Garnica, Professor do Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências, UNESP - Campus de Bauru e aluno do Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática, UNESP - Rio Claro e Maria Aparecida Viggiani Bicudo, Professora do Departamento de Matemática IGCE, UNESP - Campus de Rio Claro e do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, UNESP - Campus de Rio Claro.

[3] "Professor" do Institut für Didaktik der Mathematik Universität Bielefeld, Alemanha.

lado, por Hegel e Grassman.

O racionalismo dos séculos XVII/XVIII estava enraizado em Deus: "Toda realidade deve ser baseada em algo existente", disse Leibniz, "se lá não existisse Deus, lá não existiria nenhum dos objetos da Geometria" (citado em Lovejoy, 1936, 147). Parece bastante natural para a mente contemplativa procurar o "existente" que é aquele ser que é não obstante reduzido a algo mais, mas fala por si, no domínio espiritual, e permanece como uma base para o verdadeiro conhecimento. "Se alguém pudesse reduzir Platão a um sistema prestaria um grande serviço à raça humana", disse Leibniz, "e seria visto que tenho feito uma pequena aproximação para isto". Além disso, o pensamento desse período "é determinado pelo que é pensado, pelo seu objeto" (Gaidenko, 1981, 57), é um pensamento ontológico. O caráter ontológico do conhecimento é responsável pelo fato de que a Matemática durante esse período foi sintética em caráter, ao invés de estar permanentemente preocupada com "análise" (Boutroux, 1920). No século XVIII, 'os usos do sintético' e 'síntese' estavam relacionados ao lógico e ao empírico, enquanto a Matemática era tida como uma "linguagem analítica" (Condillac) e como um cálculo que permitia operar com objetos que "não existem realmente" (L. Carnot). Mas isso foi, às vezes, considerado com alguma inquietação, Assim, embora a Matemática na era moderna tenha sido considerada, desde Descartes, como analítica, particularmente em sua orientação para a generalidade do método matemático que foi possível devido ao cálculo tem-se que interpretar no contexto do ontologismo filosófico e do representacionalismo da era clássica (Bos 1984). Enfatizando a construtividade da Matemática mais do que qualquer outro aspecto, Kant evidenciou o problema que foi central no século XIX, a relação entre empiricismo e apriorismo.

Para almejar uma atividade dirigida, apenas o empírico ou aquilo que tem uma clara proposta empírica aparecem como realmente existente e indubitável. O conhecimento é para ter uma função e não é autotélico. Para compreender o poder e a eficácia da Matemática, Kant pretendeu conciliar empiricismo e apriorismo, e, portanto, procurou pelos princípios reguladores da atividade cognitiva.

Portanto, as formas de intuição pura concebidas em termos de espaço e tempo. Por um lado, Kant foi o primeiro filósofo a concentrar-se na atividade ou construção como um elemento fundamental da epistemologia. É por meio de sua própria atividade que o homem estabelece relações com o mundo social e objetivo. Por outro lado, a atividade ou construção concebida como um mero processo empírico e o funcionalismo associado a cada concepção não fornecem fundamento para a idéia de verdade (Kant apreciou bastante as reflexões de Hume sobre esse problema). Como formas de intuição pura, espaço e tempo, foram supostos como fornecendo fundamentos que, ao mesmo tempo fossem compatíveis com o "insight" que a cognição tem um caráter essencialmente ativo e que conhecimento é baseado na construção.

Em 1810, Bolzano criticou a elucidação de Kant da proposição aritmética "7 + 5 = 12". B. Bolzano, num apêndice a seu Beitrage zu einer beguindeteren Darstellung der Mathematik (1810), embora re-colocando o problema original pelo mais simples "7 + 2 = 9", por conveniência, comenta Kant como segue: "Muitos dos teoremas da Aritmética são, como corretamente Kant assegurou, teoremas sintéticos. Mas quem não sente quão forçado foi o que Kant proclamou para dar validade a sua teoria sobre a intuição geral: que esses teoremas são também baseados na intuição e (como poderia ser de outro modo) na intuição de tempo?"

Provar o teorema 7 + 2 = 9 "não mostra dificuldade, se assumirmos o teorema geral a + (b + c) = (a + b) + c, isto é, que uma soma aritmética considera somente a quantidade, não a ordem dos elementos (certamente um conceito diferente daquele da seqüência temporal). Esse teorema ainda exclui o conceito de tempo ao invés de assumi-lo. Se aceitamos isso, contudo, o acima pode ser provado como segue: 1 + 1 = 2, 7 + 1 = 8, 8 + 1 = 9 são meras explicações e teoremas arbitrários. Então, 7+ 2=7 + (l + l) = (7 + 1) + 1 = 8 + 1 = 9. "Assim, Bolzano raciocinou por recorrência. Aqui já é evidente a transição das funções aritméticas como meros processos e atividades às suas transformações em objetos particulares de consideração. Esse processo é continuado no livro de Aritmética de Hermann Grassmann de 1861, onde a justificação recursiva das funções aritméticas é usada para uma fundamentação axiomática da Aritmética (Otte 1990). A intenção total da crítica de Bolzano a Kant é dirigida para o significado de um alegado empiricismo.

Isso torna-se ainda mais claro com respeito à intuição de espaço. A filosofia kantiana toma, como Bolzano diz: "aquelas intuições serão um adendo particular aos conceitos e às definições da Matemática, como nada mais que um objeto subordinado à definição de um conceito em geometria, um objeto que nossa imaginação produtiva acrescenta a definição dada. . .”

Deve-se dizer que “o que é exigido aqui pode aplicar-se bem a muitos, mas de modo algum a todos os conceitos da geometria. Assim, por exemplo, o conceito de uma linha infinita é também um conceito geométrico, que também deve ser explicado geometricamente. E, contudo, a imaginação produtiva não pode certamente criar um objeto que corresponda a esse conceito. Porque não podemos traçar uma linha infinita por meio da imaginação, mas podemos e temos pensado nisso somente por meio da razão” (B. Bolzano 1975/76/77). Isso implica que a geometria é, ao contrário da proposição de Kant, também analítica.

Hegel, ao contrário, assegura que Kant é responsável por um certo subjetivismo. Ao contrário de Bolzano ou da visão platônica da Matemática em geral, Hegel aceita o argumento de Kant de que a atividade do sujeito desempenha um papel essencial no processo de conhecimento e que a Matemática em particular deve ser definida em termos genéticos, deve ser descrita com respeito ao seu desenvolvimento ativo. Hegel, entretanto, critica Kant da perspectiva da consciência absoluta. Para Kant, o vigor da Matemática estava no próprio fato de que a Matemática, em certo grau, representava um ideal de cognição no qual a compreensão estava baseada na síntese e na construção e na evidência intuitiva direta para a qual a construção conduzia. Nesse sentido a Matemática representa um conhecimento direto, quase local, que é um conhecimento, cujas razões não são para serem vistas além do contexto do que é diretamente acessível.

A Matemática parece ser um conhecimento direto simples. Um texto matemático diz tudo o que tem a dizer e pode ser entendido literalmente. A Matemática é direta no sentido do “loop” mínimo. Se eu digo “p”, isso significa “p”. O significado referencial e reduzido à predicação “a = a”. Tudo se auto-significa e não se refere a outro. Essa forma direta, decerto, é também algum tipo de rigidez. Em sua história, a Matemática limitou-se, primeiramente, a um ideal de cognição que equaciona a cognição ou com o **ver** ou com a lógica.

Desse modo, entretanto, como Hegel acredita, a Matemática torna-se um conhecimento meramente subjetivo, e o próprio construtivismo de Kant fica dentro desse subjetivo, uma atitude também expressa no próprio fato da estima de Kant pela Matemática. Hegel diz: “Pensamentos, de acordo com Kant, embora sejam universais e categorias necessárias, são somente nossos pensamentos, separados da coisa por um

ISBN 978-85-89082-23-5

golfo intransponível, do mesmo modo que a coisa se acha separada de nosso conhecimento. Mas a verdadeira objetividade do pensamento significa que pensamentos, longe de serem meramente nossos, devem ao mesmo tempo ser a real essência das coisas e do que quer que seja um objeto para nós (Lógica, § 41z)".

Recentemente Kitcher atacou o construtivismo de Kant, usando argumentos similares ao de Hegel, afirmando que a Matemática, de acordo com Kant, simplesmente descreve propriedades de "entidades mentais transitórias e privadas" (Kitcher 1984, 55). Kant talvez deva ser acusado pelo psicologismo, estando interessado em verdades matemáticas, porque elas necessariamente aparecem como sendo verdadeiras, mas não são apenas verdadeiras. De outro lado, Kant tem repetidamente enfatizado que nossa consciência do "self", nosso "sentido interno" nunca é uma experiência imediata, mas deve ser mediada por objetos externos ou meios de cognição. As condições gerais de construção sobre as quais fala Kant obviamente dependem de um sistema abrangente de significados de representação e conhecimento culturalmente produzidos, do qual nossos sentidos somente formam uma pequena parte. Nessa perspectiva parece duvidoso se existe uma tese kantiana de acordo com a qual "nossa constituição psicológica dita a estrutura geométrica da experiência". (Kitcher 1984, 55)

Tomando todas essas críticas juntas, pode-se ficar mais inclinado a seguir Kant na procura de seus esforços para estabelecer a atividade como conexão entre as realidades empírica e psicológica. O problema essencial que se evidencia nesse ponto consiste na conceitualização do sistema de significados da atividade matemática e da estrutura dessa atividade, como baseada nesse sistema.

A referência aos meios de cognição torna possível conceber as condições-limites e os princípios reguladores, os quais Kant pesquisou nas formas puras de intuição de um modo evolucionário, ao invés de um modo não histórico. Toda filosofia moderna desde Kant se viu confrontada de algum modo com o fato de que "os princípios reguladores derivados da filosofia são considerados ou como o produto da evolução da cognição ou como sua condição indispensável" (Amsterdanski 1975, 175)

Se considerarmos a hierarquia: "metateoria-teoria-realidade externa", parece que os séculos XVII/XVIII pensavam a primeira relação como bem estabelecida, embora a segunda tenha permanecido, estranhamente, não relacionada. Durante o século XIX a situação parece mudar. Nas mãos de Grassmann, por exemplo, **axiomática** e tida como um sistema de afirmações metateóricas a serviço da Matemática, concebida como uma ciência das formas.

Os axiomas são, para Euclides, conteúdos relacionados imediatamente compreensíveis e fundamentos da teoria, dos quais essa teoria pode ser mais ou menos logicamente deduzida. Isto é, os axiomas justificam-se por referenda aos objetivos fundamentais da teoria. Esse fundamento ontológico do conhecimento, que prevaleceu bem durante o século XIX, teve o efeito de que não poderiam ser concebidas teorias diferentes ou alternativas de uma disciplina.

No Ausdehnanglehre de Grassmann, de 1844, a axiomática é um sistema de requisitos transcendentais para o desenvolvimento de toda teoria matemática individual. Esse novo papel da axiomática é o mesmo dos princípios simétricos e das leis da conservação na Física. Como Wigner enfatizou em sua fala quando do prêmio Nobel, em 1963, nós também temos no conhecimento físico um estrato - e as leis da natureza têm a mesma função nessa hierarquia com respeito aos eventos, como os princípios simétricos têm com respeito às leis da natureza. Essa funcionalidade revela-se, sobretudo, no dinamismo. Em outras palavras, se soubéssemos todas as leis da natureza, as propriedades de invariância dessas leis não nos forneceriam novas informações e os princípios simétricos somente conteriam uma pós-classificação mais ou menos supérflua das mesmas. O mesmo é verdadeiro para a relação entre a lei natural e o evento real. Se soubéssemos todos os fatos, as leis naturais seriam uma descrição mais ou menos supérflua.

Uma mensagem análoga pode ser derivada do chamado “dilema da teoricidade” (cf. Tuomela 1983, 6) que mantém que conceitos teóricos são supérfluos: as teorias têm um direito de existir somente enquanto tiverem um caráter transcendental com respeito à empiricidade perceptível, da mesma forma que metaprincípios axiomáticos têm um direito de existir por conta do seu caráter transcendental com respeito às respectivas teorias em questão. E esse “direito de existir” somente se mostra na dinâmica da cognição que, desse modo, recebe um contexto.

A questão essencial então é qual papel os objetos em estudo desempenham quando guiam a dinâmica da teorização. A resposta de Grassmann foi que essa dinâmica é determinada por uma interação dos “princípios simétricos” de sua teoria geral das formas e uma idéia intuitiva ou pré-concepção do campo do objeto em estudo. A concepção da Matemática como uma ciência das formas depende da disponibilidade de diferentes interpretações ou aplicações pretendidas.

A legitimação de um metadiscurso evolui junto ou é baseado na questão como o que constitui, essencialmente, as relações do homem com a realidade externa ou o que forma seu ser dentro do mundo. As respostas que prevalecem, diferindo embora em conceitualização e em detalhes, são sempre referentes à mesma idéia como "**atividade**", **construção da prática social**, etc. Eu quero esboçar isso nos dois exemplos seguintes, no exemplo do conceito de **função** e no do problema da igualdade. O conceito de função foi fundamental para que emergisse a abordagem conceitual em Matemática como foram as identidades formais para a abordagem construtivista. J. T. Merz, em sua monumental História do Pensamento Europeu no século XIX, escreveu:

"A concepção de correspondência desempenha um grande papel na Matemática moderna. É a noção fundamental na ciência da ordem, como distinta da ciência da magnitude. Se a Matemática mais antiga, foi mais dominada pela necessidade de mensuração, a moderna Matemática é dominada pelas concepções de ordem e arranjo," (Merz 1903, 736)

À luz das diferenças entre a abordagem de Matemática conceitual versus a construtivista, eu posso acrescentar a isso, talvez, uma qualificação, afirmando que "a necessidade de mensuração", de fato, deu um grande estímulo para a evolução da axiomática moderna, que se originou do trabalho de Grassmann. Grassmann estava interessado na concepção de estrutura e arranjo porque queria elaborar um modo pelo qual um campo objeto deve ser conceitualizado para que os processos de mensuração possam ser aplicados.

Na base do princípio da identidade dos indiscerníveis de Leibniz, a igualdade de dois objetos é determinada pelo fato de esses objetos terem características comuns ou, em outras palavras, por produzirem os mesmos valores como argumentos para qualquer função.

$x = y$ *see* $f(x) = f(y)$ *para qualquer* f

A igualdade é uma relação de equivalência que deve ser compatível com todas as funções e é determinada por sua compatibilidade. Um tal requisito não é operativo, e, de fato, o princípio de Leibniz contém uma expressão sucinta do ontologismo clássico. O objetivo último, que é em geral somente para ser realizado por Deus através de uma análise infinita, repousa na determinação de substâncias individuais.

O construtivismo da Modernidade é, em contraste, uma espécie de relativismo. De acordo com essa visão, não parece necessário que identifiquemos os objetos individuais em todos os seus aspectos. Os números, por exemplo, como Niiniluoto disse (cf. anais da conferência p. 5) “podem ser bem definidos em relação às suas propriedades aritméticas de relação, mas são indefinidos com relação a outras propriedades”.

Na visão construtivista, é a identificação dos objetos, não a diferença entre eles, que deve ser especificada. Cada identificação será relativa e perspectivamente dependente. Cassirer em seu trabalho Substanzbegriff und Funktionsbegriff escreveu no mesmo sentido: “Enquanto a doutrina empirista considera a “igualdade” de certos conteúdos de apresentação como um fato psicológico auto-evidente que ela aplica explicando a formação de conceitos, é justamente apontado, em oposição, que a igualdade de certos elementos só pode ser explicada de modo significativo quando um “ponto de vista” foi estabelecido, do qual os elementos podem ser designados como deste ou daquele modo. Essa identidade de referência de ponto de vista sobre a qual a comparação ocorre é nova se comparada com os próprios conteúdos. A diferença entre esses conteúdos, de um lado, e as “espécies” conceituais, de outro, pelas quais nós os unificamos, é um fato irredutível, e categórico . . .” (Cassirer 1910, 33). Cassirer deriva disso uma diferença no princípio, entre objetos e conceitos ou, em outras palavras, ele interpreta o “insight” de Kant de que conceitos não são simplesmente adquiridos de objetos num processo de abstração simples, enfatizando uma diferença no princípio entre teorias e o mundo dos objetos aos quais elas se referem. Entretanto, se essa diferença é tida como absoluta no sentido de uma liberdade plena para a construção matemática, e conceitos matemáticos são, não obstante, co-determinados por extensão, então o problema da igualdade assume um caráter meramente formal, ou desaparece completamente. Se, por outro lado, for assumido que uma teoria axiomática não pode ser vista como completamente intencional, mas que se refere a um de seus vários conteúdos objetivos, então funções específicas no sentido do requisito de compatibilidade, acima, são selecionadas para essa teoria. A relação de igualdade, então, precisa ser somente compatível com funções teoria-característica particulares. Alguém poderia mesmo dizer que ela precisa, possivelmente, apenas ser compatível

ISBN 978-85-89082-23-5

com uma função. Na econômica equação "1 terno = 2 pares de sapatos", o terno e os sapatos têm apenas seus valores econômicos e nada mais em comum.

Então, os requisitos da construção matemática não são arbitrários. Isso é o mesmo que dizer que o domínio das funções que distinguem a relação de identidade não é arbitrariamente selecionável, do mesmo modo como a teoria é considerada para ser aplicada. Eu tenho mostrado, por exemplo, examinando as diferentes abordagens de Grassmann e Leibniz ao problema das "características geométricas", que a relação de equivalência escolhida por Leibniz, de acordo com a tradição euclidiana, não funciona como igualdade geométrica porque não é compatível com certos requisitos de medida, isto é, ela não dá origem à quantidade geométrica extensa no sentido sublinhado por Lawere (cf. artigo da conferência). Foi exatamente esse fato que levou Grassmann a escolher a equivalência de área (no caso tridimensional) como uma identidade construtiva da relação de equivalência (Otte, 1989, 24/25). Grassmann modela a concepção de espaço por meio de um espaço vetorial de dimensão finita arbitrária, munido com uma função determinante D. O espaço (V, D) é, algumas vezes, chamado um espaço de Peano (Rota a.o. 1985). Um espaço de Peano pode ser visualizado geometricamente como um espaço vetorial no qual um elemento de volume orientado é especificado.

Espaço, para Leibniz, é uma ordenação relativa de objetos. Mas, para o século XIX, toda ordenação deve ser compatível com a atividade de medida e com a estrutura dessa atividade.

Toda teoria constitui um contexto particular do conhecimento matemático e temos algo similar a uma concepção contexto-dependente do significado matemático que é apenas modificado, trocado ou desenvolvido, de modo que essa teoria possa ser usada em novos mundos-objeto.

Relações de igualdade são relações de equivalência que são compatíveis com certas funções ou estruturas operativas, de modo que elas possam ser empregadas por um processo de "definição por abstração" para construir a ontologia básica da teoria axiomatizada em questão. Toda teoria têm sua ontologia particular, sobre a qual fala. O termo ontologia não mais designa daquilo que existe como tal no mundo, mas refere-se aqueles aspectos da realidade sobre os quais temos a intenção e também o significado, para falar de um modo matematicamente significativo. Pelo termo ontologia, o conjunto daquelas entidades, cuja existência é estipulada pela teoria, é descrito.

Tanto quanto a questão sobre duas teorias que falam sobre o mesmo campo-objeto ser usualmente resolvida pela direção da prática social, parece ser duvidoso se "uma compreensão adequada do problema da identidade matemática requer uma nova e ainda ausente teoria formal que descreverá as relações mútuas que obtém entre sistemas formais que descrevem o mesmo objeto". (Rota et all 1988, 377)

Em geral, ela certamente depende de propostas e objetivos que alguém possa trazer para uma teoria, da forma como esse alguém concebe os objetos da mesma. Por exemplo: da perspectiva do usuário (onde o uso também inclui o uso teórico) as teorias são estritamente diferenciadas das áreas dos objetos aos quais elas se referem, pelo fato de o usuário ver o objeto de sua própria perspectiva. Considerando que da perspectiva do "designer" da teoria, da perspectiva da atividade, ela própria; os objetos da teoria parecem idênticos ao modo no qual eles estão presentes dentro da teoria. A objetividade é baseada na prática social tanto quanto as abordagens alternativas que ele pressupõe para um objeto.

Desde Bolzano e Frege, uma equação a = b é usualmente interpretada como <u>referente</u> à mesma coisa de duas maneiras diferentes. <u>A</u> e b diferem intencionalmente, mas são idênticos extensionalmente. Uma tal interpretação tomada absolutamente pode esquecer que dentro da dinâmica do processo da atividade cognitiva, em geral são as intenções que contam, não as extensões. Para estar ou não apto para se resolver um problema e, por exemplo, da maior importância como este problema pode ser apresentado. O mesmo é verdade para qualquer conhecimento que queiramos aplicar.

A visão apresentada aqui tem a vantagem de tornar claro, por exemplo, que a consistência das provas necessita somente de uma natureza contextual para os matemáticos, e que o matemático não está interessado na consistência global das provas. Nesse sentido, Gödel mostrou que não existem requisitos transcendentais absolutos para a construção matemática. À luz do apresentado, isso significa que o pensamento matemático é objetivamente orientado e objetivamente determinado em seu desenvolvimento, e que sua diversidade é, entre outras, tributável a complexidade do mundo.

A Matemática baseada na Teoria dos Conjuntos não considera a identidade de objetos individuais, mas somente a igualdade de funções, predicados, conjuntos, etc., ou seja, entidades de ordem superiores, na base do axioma da extensão. A identidade de duas funções é estabelecida desse modo, i.é., duas funções são idênticas, se elas produzem os mesmos valores para os mesmos argumentos.

f = g see f(x) = g(x) para todo x.

(De acordo com a teoria dos tipos, Xk+1 (Xk) substituiria f(x), i.é., Kk+1 contém Xk (cf. E. Beth, 1959, 226). A identidade de elementos no nível fundamental é assumida "per si").

Por outro lado, alguém poderia estabelecer, na base do princípio da identidade dos indiscerníveis de Leibniz, a identidade dos argumentos pelo fato de eles terem todos os aspectos em comum, ou em outras palavras, que eles dão os mesmos valores como argumentos para todas as funções.

x = y see f(x) = f(y) para toda f.

Uma "dissimetria" é óbvia: aquela que mostra que objetos individuais são mais abstratos do que funções e outras identidades de tipo lógico mais elevado. A dinâmica da atividade construtiva matemática remove essa dissimetria, geralmente, pelo uso de tipos mais elevados para estabelecer a identidade de tipos mais baixos, e desse modo, explica o abstrato por meio do menos abstrato, embora isso implique, ao mesmo tempo, que muito freqüentemente o fenomenologicamente menos conhecido é empregado para explicar o mais bem conhecido, por exemplo, as Leis de Newton explicando o movimento de corpos ou a Lei de Ohm para explicar os fenômenos elétricos.

"É verdade que, no passado, quando as pessoas tentavam explicar os fenômenos animisticamente, elas não usavam leis gerais, mas "explicavam" fenômenos desconhecidos através dos conhecidos (ou aparentemente conhecidos). A situação era similar à explicação mecanicista, por exemplo, a consideração de um organismo como uma máquina" (Krajewski, 1977, 30).

Para tornar uma tal abordagem analítica possível, nós usamos muito da terminologia metafórica. Quando alguém fala, por exemplo, em corrente elétrica, não confunde eletricidade com hidrodinâmica. O que parece abstrato pode ser duas coisas diferentes, se consideradas, respectivamente, a mente construtiva ou a mente contemplativa.

Com respeito ao conceito de função, nós também usamos definir igualdade de funções por meio do axioma da extensão, enquanto o outro modo construtivista

ISBN 978-85-89082-23-5

emprega certos funcionais, “funções de funções”, para estabelecê-la. A transição da Matemática do século XVIII para o século XIX é caracterizada, em geral, pelo fato de que os objetos não mais foram dados primeiro. Por exemplo, dada uma função linear (representada, digamos, pela expressão simbólica f(x) = a(x), tentou-se na velha abordagem sintética descrever as características do objeto apresentado (por exemplo, a equação funcional f(x+y) = f(x) + f(y)). Ou, para tomar o exemplo da Teoria dos Grupos; o conceito de grupo primeiramente significou um tipo de grupo de transformação, e os elementos foram considerados como particulares. Somente mais tarde surgiu o abstrato de grupo. Partindo disso, proposições declarando, por exemplo, que um grupo discreto ou contínuo com tais e tais propriedades tem uma representação isomórfica linear, elaboraram uma importante parte da teoria dos grupos e suas aplicações. Desde o século XIX, inicia-se com determinadas características que parecem funcionais para a atividade do matemático e seu objetivo (por exemplo, a equação funcional acima e a continuidade da função), e constroem-se representações ou outras características do objeto a partir daquele dado (por exemplo, a representação f(x) = ax).

Durante os séculos XVII e XVIII, o interesse foi sobre o objeto, enquanto com respeito a métodos se era completamente livre. No século XIX a situação foi invertida. Todas as coisas parecem agora possíveis de ser tratadas matematicamente, ao menos em princípio, enquanto modelos de método se tornam mais e mais específicos. A Matemática pura especializada é mais e mais baseada na prova de análise e torna-se analítica.

Numa abordagem analítica, os objetos de uma teoria são idênticos às suas definições como dadas pelos fundamentos axiomáticos da teoria. O enfoque sintético que prevaleceu durante os séculos XVII e XVIII (Boutroux 1920), embora tenha sido chamado “analítica”, baseou-se no conjunto completo de propriedades do objeto, o qual ele não descrevia e algumas vezes não poderia explicitamente descrever. Como tem sido dito, a função linear ou a linha reta etc. são dadas por y = ax; y = ax + b, etc,

(Um exemplo moderno muito instrutivo mostrando a interação entre o analítico e o sintético é dado pela teoria dos grupos: por um lado, têm-se os grupos, desde que seja dada uma descrição axiomática, e, por outro lado, emprega-se, por exemplo, representação linear deles. Um modelo com uma representação linear acrescenta a nossa informação, enquanto os elementos individuais do grupo são dados com propriedades

ISBN 978-85-89082-23-5

adicionais que não estavam presentes na definição abstrata de grupo, as quais, agora, podem ser usadas pelo matemático. Desse modo, a Teoria dos Grupos torna-se tão analítica quanto sintética),

É numa tal perspectiva que o trabalho de Cauchy (de cujo Course d'Analyse o exemplo acima foi retirado) se apresenta claramente. “Um misto de métodos baseados em limites de séries de potências ou diferenciais junto a uma . . . combinação disso foi substituído por uma doutrina simples, fundada numa teoria única de limites . . .” (Grattan-Guiness 1990, 1286). Essa nova concentração no método liberou-o e, ao mesmo tempo, originou uma gradual omissão quanto à indispensabilidade do contínuo ou de um princípio de continuidade para a atribuição de significado ao sintático e operativo, seja no sentido das aplicações pretendidas, seja como um contexto intuído. Em 1895, Felix Klein descreve o desenvolvimento de uma aritmetização da Matemática, que foi uma expressão em sua concentração no método, como segue: “Von der Naturbeobachtung ausgehend, auf Naturerklärung gerichtet, hat der Geist aus dem die moderne Mathematik geboren wurde, ein philosophisches Prinzip, das Prinzip der Stetigkeit an die Spitze gestellt. So ist es bei den groβen Bahnbrechern, bei Newton und Leibniz, so ist es das ganze 18. Jahrhundert hindurch, welches für die Entwicklung der Mathematik recht eigentlich ein Jahrhundert der Entdeckungen gewesen ist. ... Bei Gauβ wird die Raumanschauung, insbesondere die Anschauung von der Stetigkeit des Raumes noch unbedenklich als Beweisgrund benutzt. Da zeigte die nähere Untersuchung, daβ hierbei nicht nur vieles Unbewiesene unterlief, sondern daβ die Raumanschauung dazu geführt hatte, in übereilter Weise Sätze als allgemeingultig anzusehen, die es nicht sind. Daher die Forderung ausschlieβlich arithmetischer Beweisführung. Als Besitztand der Wissenschaft soll nur angesehen werden, was durch Anwendung der gewöhnlichen Rechnungsoperationen als identisch richtig klar erwiesen werden kann” (ZMNU 1896, 143/144)[4].

[4] “Partindo da- observação da natureza e dirigido para a interpretação da mesma, o espírito que levou a Matemática Moderna colocou em destaque um princípio filosófico, ou seja, o princípio de continuidade- Assim foi com os grandes pioneiros Newton e Leibniz, assim foi através de todo o século XVIII, o qual foi, particularmente para o desenvolvimento da Matemática, um século de descobertas. Em Gauss, a visão geométrica e especialmente a ‘visão’ da continuidade do espaço foi usada ainda sem escrúpulos usada como base para demonstrações. Mostra a pesquisa mais aprofundada que, com isso, não só muitas afirmações não provadas como também a própria concepção de espaço induziu a considerar como sendo sentenças de validade gera fatos e teoremas que não o são. Daí, surgiu, a exigência de demonstrações exclusivamente aritméticas. Como propriedade garantida da ciência deve ser considerado somente aquilo que pode ser provado de modo claro com o emprego das operações aritméticas usuais” (N. dos T.)

A proposição de Klein aponta para o papel essencial do princípio de continuidade que foi um princípio fundamental ao pensamento dos séculos XVIII e XIX (cf. Lovejoy 1932) no desenvolvimento da Matemática Moderna. Esse princípio foi um exemplo de uma concepção de um contexto para o desenvolvimento da construção matemática. Essa é a razão por que a relação observada por Bochner entre o conceito de função e o conceito de continuidade ". . . é o fato mais significante que, no relativamente recente pensamento ocidental, as concepções de função e de continuidade tem envolvido simultaneamente e em fechada interpenetração intelectual com dependência uma da outra, de fato, ou talvez, somente em intenção" (Bochner 1974, 845).

Durante a transição do século XVIII ao XIX, o princípio da continuidade muda da posição metafísica para a epistemológica. Representa, não obstante, uma característica da matéria como tal, mas da matéria como representada em nosso pensamento. Representa a continuidade de todas as representações possíveis, ou de todas as possíveis perspectivas de um objeto. Essa idéia é manifesta nos escritos de Carnot e Poncelet, entre outros, e é fundamental à filosofia de Peirce. De acordo com ele, a grande característica da natureza é a diversidade e arbitrária heterogeneidade. Ação mental, por outro lado, é caracterizada por uma tendência a generalização, e generalização sempre emprega alguns princípios de continuidade (Peirce 1965, 6.101).

Mas existe mais em relação a este princípio. A Matemática da Teoria dos conjuntos é baseada numa proposição geral de existência. O construtivismo nega a possibilidade de uma tal afirmação da medida em que todo o nosso conhecimento é relativo à natureza da mente humana. Peirce, por exemplo, diz: "O que eu proponho fazer . . . é, seguindo o comando daqueles matemáticos que questionam se a soma de três ângulos de um triângulo é exatamente igual a dois ângulos retos, chamar à questão a perfeita exatidão do axioma fundamental da Lógica".

Esse axioma é que **coisas reais existem**, ou, em outras palavras, o que vem a ser a mesma coisa, que toda questão inteligível, qualquer que seja ela, é suscetível, em sua própria natureza, de receber uma resposta definitiva e satisfatória, se for suficientemente procurado por investigação e raciocínio. Esse é o modo como eu poria isso; diferentes lógicos colocariam da maneira diferente o axioma. Mill, por exemplo, coloca isso na forma: A natureza é uniforme" (Peirce 1986, 545f.)

Podemos observar nesse ponto que o princípio da continuidade serviu a um fim similar àquele do platonismo na Matemática pura, a saber, para assegurar que há algo para ser conhecido, que o mundo pode ser conhecido. Este propósito ou função pode ser realizada de qualquer modo como vemos, sem manter, necessariamente, a interpretação ontológica do princípio da continuidade que foi tão proeminente durante os séculos XVII e XVIII.

A interpretação ontológica do princípio da continuidade ficou ligada à visão de mundo estática da Era Clássica (Lovejoy 1936), e sua importância reduziu-se enquanto crescia a concepção da evolução. Uma perspectiva evolucionista cria um elemento de indeterminação ou possibilidade absoluta na natureza. Não faz sentido conceber, por exemplo, o conceito-função matemático como uma imagem direta de uma suposta causalidade ou regularidade da natureza, como foi o caso durante o século XVIII. A esse respeito, Lagrange e Cauchy não falam a mesma língua. Por exemplo, "não importa o quanto Lagrange afirme e insista que uma função é, para ele, um objeto matemático 'abstrato', em seu modelo de pensamento; ela algumas vezes é, residualmente, uma órbita mecânica ou talvez uma função física de estado; enquanto, em Cauchy, órbitas e forças e pressões são sempre funções, como o são para nós hoje". (Bochner 1974, 837)

Entretanto, tão desarrazoado quanto isso é reificar as proposições de teoria, do mesmo modo como é absurdo conceber sua objetividade como uma superação da mera lógica formal. Qualquer perspectiva evolucionária ou histórica pressupõe o projeto kantiano de mediação entre o empirismo e o racionalismo ou apriorismo. Necessidade absoluta e possibilidade absoluta são indistinguíveis de qualquer modo (cf, Laplace, Philosophical Essay on Probability); e isso mostra que os meios disponíveis para a atividade cognitiva delimitam o espaço de possibilidades epistemológicas à mão. Os meios da cognição, entretanto, evoluem ao lado de seus objetos porque "the proof of the pudding is in the eating'[5]

A nova visão matematicamente abstrata do conceito de função foi, como já dito, inseparavelmente ligada ao "princípio de continuidade" (cf. Leibniz 1966, p. 84 ff. e os comentários de seu editor Ernest Cassirer). Esse princípio introduz certas afirmações

[5] 'a prova do pudim está em comê-lo', conhecida expressão da língua inglesa (N. dos tr.*)*

descritivas na relação funcional. Uma relação funcional é contínua, se uma "pequena" variação na entrada causar, correspondentemente, uma restrita variação na saída. Em particular o determinismo que surge disso liga o conceito de função contínua ao conceito de lei na ciência natural clássica (cf. J. Gleick 987, para os limites desse determinismo).

Por um lado, o conceito de função é radicalmente operacionalizado e visto como uma "caixa preta", que transforma "entradas" em "saídas". Por outro lado, essa operacionalização radical toma lugar de acordo com o requisito de que a realidade não é caótica, mas legalmente estruturada. Isso por sua vez parece pertencer ao requisito para a aplicação da Matemática à realidade, visto que a Matemática funcionaria dentro da estrutura do conhecimento científico do mundo.

Para Leibniz, essa lei de continuidade foi diretamente fundamental, considerando a razão apresentada aqui, isto é, que ela dá expressão a um requisito na aplicabilidade da Matemática ou a aquisição de conhecimento sobre a realidade. Esse requisito é que a realidade seja estruturada seguindo leis. Se alguém se esquecesse do princípio da continuidade, diz Leibniz, "o mundo conteria hiatos que destruiriam o grande princípio da razão suficiente e nos motivaria a recorrer a milagres ou à pura probabilidade nas explicações dos fenômenos" (citado por Lovejoy, p. 181)

O papel do princípio da continuidade na formação do conceito de função torna-se de todo claro quando se ressalta o fato de que foi somente uma visão geral e suficientemente abstrata das funções matemáticas que pode trazer a interação dos aspectos complementares de função, seja como operação ou regra por um lado, seja como uma relação causal dada por outro. Já em 1748, Euler definiu uma função em sua "Introductio in Analysin Infinitorum" como "uma expressão analítica que é construída, de algum modo, de variáveis e quantidades numéricas constantes", e acreditava que funções contínuas eram exatamente aquelas que poderiam ser representadas numa forma fechada por uma tal expressão analítica.

Esse realismo conceitual que transforma a característica fundamental da continuidade num aspecto da "manifestação simbólica" da função, considerando-o, então, não como constitutivo para a própria função, leva a grandes dificuldades e inconsistências como a mesma função poderia ser representada de modo que ela fosse chamada contínua e ao mesmo tempo descontínua.

ISBN 978-85-89082-23-5

"Nos trabalhos de Euler e Lagrange", escreveu Cauchy, "uma função é chamada **contínua** ou **descontínua** de acordo com seus diversos valores, . . . , que são ou não produzidos por uma e única equação . . . Contudo, a definição que nós recordamos está longe de oferecer precisão matemática; as leis analíticas às quais a função pode estar sujeita são geralmente expressas por fórmulas algébricas ou transcendentes . . . e pode ocorrer que várias fórmulas representem, para certos valores da variável x, a mesma função: e, para outros valores de x, funções diferentes" (citado de Grattan-Guiness 1970, 50 ff).

Certos aspectos fundamentais, tais como a continuidade, poderiam ser, por essa razão, referentes a um conceito mais abstrato de uma relação funcional, um conceito que deveria ser adquirido num processo de definição, por abstrações de classes de equivalências de representações simbólicas.

Isso significa que operatividade ou funcionalidade, elas mesmas, devem ser compreendidas, do mesmo modo como deve ser a concepção de correspondência. Isso faz com que seja relativa a conexão entre o conceito de função e sua representação simbólica. Lobachevsky (1793-1856), por exemplo, escreveu em 1834:

"O conceito geral requer que a função de x seja chamada um número que é dado para todo x e muda, progressivamente, com x. O valor da função pode ser dado ou por uma expressão analítica ou por um requisito que apresenta um meio de testar todos os números e selecionar um deles, ou finalmente, a dependência pode persistir, permanecendo desconhecida" (citado de Yonshkevitch 1976, 77).

O que está sendo notado, e só é supérfluo aparentemente, é a lista das diferentes modalidades pelas quais a função poderia ser dada, a qual aparece nesta descrição. É exatamente essa variedade e diversidade que constrói a base de formação do conceito abstrato-teórico de função num processo de definição por abstração.

O problema da relativização dos meios na introdução do conceito de função é expresso claramente na citação de Dirichlet (1805-1859) por Felix Klein. "Se num intervalo todo valor de x é assumido por algum meio (grifo nosso) um valor definido y, então y é função de x" (Klein 1928, vol. III).

O fato de o conceito poder ser determinado por uma mera relação de entrada-saída, i.é., ou de ele ser atualmente identificado pelo fato de entradas ou argumentos idênticos produzirem saídas idênticas ou os mesmos valores de função, conduz em

Matemática a dificuldades e a uma inquietação que persistiu durante todo o século XIX. H. Hankel (1839-1873), por exemplo, escreveu em 1870, depois de ter revisto a definição de uma função totalmente geral, “essa definição puramente nominal à qual eu me referirei por definição de Dirichlet de agora em diante . . . não é suficiente para as necessidades da análise e, como funções desse tipo não possuem propriedades gerais, todas as relações entre os valores da função e os diferentes argumentos não se mantêm”.

Essa visão abstrata, conceitual, de uma função, acima mencionada, transforma a função em um objeto completamente desconhecido, como funções que são idênticas devido a um certo ‘imput’, podem ser totalmente diferentes por causa de um ‘imput’ diferente. Não é possível, como foi, antecipar o comportamento “futuro” de uma tal função, i.é., o resultado de sua aplicação a argumentos que não tenham ainda sido usados.

Por essas razões, que são também indicadas por Hankel, a visão do conceito de função foi inseparavelmente conectada ao “princípio de continuidade”. Isso é, por assim dizer, uma operatividade pura, indefinível sem uma referência objetiva.

References

AGAZZI, E. **The rise of the foundational research in mathematics**. Synthese, 27, 7-26, 1974.

AMSTERDAMSKI, S. **Between Experience and Metaphysics**. Reidel, Dordrecht, 1975.

BETH, E.**The Foundations of Mathematics**, Amsterdam, 1959.

BETH, E.; PIAGET, J. **Mathematical Epistemology and Psychology**, Dordrecht, 1966.

BOCHNER, S. **Eclosion and Synthesis**, New York, 1969.

BOCHNER, S. **Mathematical Reflections**, AMM, 827-852, 1974.

BOLZANO, B. **Wissenschaftslehre. Versuch einer ausführlichen und gröβtenteils neuen Darstellung der Logik mit steter Rücksicht auf deren bisherige Bearbeiter**, in: BOLZANO, B., Gesamtausgabe, hg. von E. Winter, J. Berg, E. Kambartel, J. Louzil, B. van Rootselaar, vols. (I) 11/1-(I)12/2 (Stuttgart-Bad Cannstatt 1985-1988), 1837.

BOLZANO, B. **Erste Begriffe der allgemeinen Gröβenlehre** (etwa 1830-1848), in: BOLZANO, B., Gesamtausgabe, hg. von E. Winter, J. Berg, F. Kambartel, J. Louzil, B. van Rootselaar, Bd. (II) A 7 (Stuttgart-Bad Cannstatt 1975), 217-285, 1975.

BOS, H. J. M. **Arguments on motivation in the rise and decline of a mathematical theory; the “Construction of Equations”**, Archive for History of Exact Sciences, 30, 331-380, 1984.

CASARI, E. **Axiomatical and Set-Theoretical Thinking**, Synthese, 27, 49-62, 1974.

CASSIRER, E. **Substanzbegriff und Funktionsbegriff**, Cassirer Berlin, 1910.

CASTONGUAY, C. **Meaning and Existence in Mathematics**, Wien, 1972.

ENGFER, H. J. **Philosophie als Analysis: Studien zur Entwicklung philosophischer Analysiskonzeptionen unter dem Einfluβ rnathematischer Methodenmodelle im 17**. und frühen18. Jh., Stuttgart-Bad Canstatt, 1982.

GARDIES, L. **La définition de l’identité d’Aristote à Zermelo**, Theoria, año IV (10), 55-79, 1988/89.

GLEICK, J. **Chaos. Making a New-Science**, New York, 1987.

GRASSMANN, H. **Die Lineale Ausdehnungslehre. Leipzig: All page references are taken from H. Grassmann**, in: Engel, F. (ed.) Gesammelte mathematische und physikalische Werke, 1.1, 1-319, Teubner Leibzig, 1894.

GRATTAN-GUINNESS, I. **The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann**, Cambridge/USA, 1970.

HAHN, H. **Empirismus, Logik, Mathematik,** Frankfurt, 1988.

HANKEL, H. **Untersushungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen**, Math. Ann., 20, 63-112, 1870.

KANT, I. **Kritik der reinen Vernunft**, Riga: Hartknoch, J. F., All page references are taken from I. Kant. Werke, Weischedel, W. (ed.), 4, Suhrkamp Frankfurt, 1956.

KITCHER, P. H. **The Nature of Mathematical Knowledge**. Oxford, 1984.

KLEIN, F. **Elementarmathematik vom höheren Standpunkt**, 3 Bde., Berlin, 1928.

KRAJEWSKI, W. **Correspondence Principle and Growth of Science**, Reidel Dordrecht, 1977.

LEIBNIZ, G.W. **Über das Kontinuitätsprinzip, in: Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie (herausgegeben von E. Cassirer)**, Bd. 1, Hamburg, 84-93, 1966.

LOVEJOY, A. O. **The Great Chain of Being**, Harvard U. P, 1936.

MANDELBROT, B. **The Fractal Geometry of Nature**, New York, 1983.

MARKUS, G. **Language and Production**, Reidel Dordrecht, 1986.

MERZ, J. T. **History of European Thought in the 19th Century**. Edinburgh and London, 1903.

OTTE, M.; STEINBRING, H. Probleme **der Begriffsentwicklung - Zum Stetigkeitsbegriff**. Didaktik der Mathematik 1, 16-25, 1977.

OTTE, M. **Komplementarität**, Dialektik, 8, 60-75, 1984.

OTTE, M. **The Ideas of Hermann Grassmann in the Context of the Mathematical and Philsophical Tradition since Leibniz**, Historia Mathematica, 16, 1-35, 1989.

OTTE, M. **Die Auseinandersetzungen zwischen Mathematik und Technik als Problem der historischen Rolle und des Typus von Wissenschaft**, in: S. Hensel u.a., Mathematik und Technik im 19. Jahrhundert in Deutschland, Göttingen, 149-215, 1989a.

OTTE, M. **Arithmetic and Geometry: Some Remarks on the Concept of Complementarity**, Studies in Philosophy and Education, 10, 37-62, 1990.

OTTE, M. **Gleichheit und Gegenständlichkeit in der Begründung der Mathematik im 19. Jahrhundert - dargestellt am Beispiel der Auffassung von H. Grassmann, B. Bolzano unci G. Frege**, in: KÖNIG, G. (Hrsg.) Konzepte des mathematisch Unendlichen em 19. Jahrhundert, Vandenhoeck &Ruprecht, Göttingen, 1990a.

PEIRCE, C. S. **Collected Papers**, 6 vols., Cambridge Mass, 1965.

PEIRCE, C. S. **Writings of Charles S. Peirce, A Chronological Edition**, vol. 4, Indiana University Press, 1986.

PEIRCE, C. S. **Naturordnung und Zeichenprozeβ**, Alano Verlag Aachen, 1988.

RORTY, R. **Philosophy and the Mirror of Nature**, (2. ed.), Princepton Univ. Press, Princepton, N.J., 1980.

ROTA, G. – C. **On the Exterior Calculus of Invariant Theory**, Journal of Algebra, 96,120-160, 1985.

ROTA, G. - C. et al. **Discrete Thoughts**. Springer, 1986.

ROTA, G. - C, SHERP, D.H.; SOKOLOWSKI, R. **Syntax, Semantics and the Problem of the Identity of Mathematical Objects**, Philosophy of Science, 55, 376-386, 1988.

SCHELLING, F. W. J. **Vorlesungen über die Methode des akademischen Studiums**, in: ANRICH, E. (ed.) Die Idee der deutschen Universität, 1-124, Wissenschaftliche Buchgesellsschaft, Darmstadt, 1964.

SCHLICK, M. **Allgemeine Erkenntnislehre**, Frankfurt, 1925/1971.

SIMON, H.A. **The Sciences of the Artificial**. MIT - Press, Cambridge/USA, 1969.

STRAWSON, P. F. **The Bounds of Sense**, Methuen London, 1966.

YOUSCHKEVITCH, A.P. **The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century**, in: Arch. Hist. Exact Sci., vol. 16, 37-85, 1976.