Concepção de História da Matemática[1]

Michael Otte[2]

Este texto[3] tem três partes. Primeiro apresentarei algumas considerações sobre a relação entre a História da Matemática e a Educação Matemática. Nas próximas duas seções, em seguida, quero dar uma idéia de minha compreensão da História da Matemática, de como ela se desenvolve como uma parte dentro do contexto da História Geral. Para isso, na Seção III, apresento um estudo de caso sobre a relação entre o pensamento matemático e o filosófico. O contexto histórico para este caso e esboçado na seção II, que trata da interação entre a Matemática e a Tecnologia. Qualquer história social da Matemática deve considerar o processo em si mesmo polarizado - e ainda sim conectado - da "matematização" e "tecnização" do conhecimento social humano.

I

A integração no processo de ensino-aprendizagem das reflexões sobre a história das idéias matemáticas é motivada por uma variedade de razões.

A História tem sido, tradicionalmente, usada como uma fonte para estimular a motivação dos alunos para o fazer Matemática. Parece óbvio que um tal emprego da História é insatisfatório visto que o aluno, muito rapidamente, aprende que o conteúdo real vem somente depois de se ter acabado de "contar a historia".

I.1. Freqüentemente, temas históricos são introduzidos na sala de aula para contrabalançar o mero tratamento técnico do assunto. A Matemática é, então, abordada quando se pergunta por suas conexões com outras áreas da atividade cultural humana. As concepções positivistas-formalistas da Matemática, ao contrário, partem da questão:

---

[1] Digitalizado por Evelaine Cruz dos Santos e Vanessa Cerignoni Benites.

[2] "Professor" do Institut für Didaktik der Mathematik da Universisat Bielefeld, Alemanha. Professor visitante do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática do IGCE – UNESP – Rio Claro, de novembro de 1991 a abril de 1992.

[3] O presente texto foi traduzido por Antonio Vicente Marafioti Garnica, professor do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da UNESP de Bauru. Títulos de livros e citações textuais foram traduzidos livremente.

ISBN 978-85-89082-23-5

O que distingue a Matemática das demais ciências? O que corrobora para sua especificidade, diferente de todos os outros campos da atividade humana? Pode-se-ia afirmar que tal especificidade não deve ser procurada em qualquer particularidade de método ou conteúdo, mas, mais propriamente, no realce mais nítido possível, de um princípio de diferenciação, ele mesmo, na mais clara expressão do fato de que a ciência, em geral, é uma filha da divisão social de trabalho. Disso resulta o caráter formal da Matemática. De acordo com uma tal compreensão, a Matemática é um raciocínio hipotético dedutivo.

Neste sentido, parece importante salientar o caráter formal da Matemática porque, historicamente, ele fez surgir um "insight" epistemológico que é essencial para tudo o que diga respeito à modernidade, que é chamado “pensamento relacional”. O conteúdo dos conceitos teóricos não se refere coisas, mas relações entre coisas. A essência do pensamento científico, em geral, consiste, como certa vez disse Max Born, na descoberta de que relações podem ser controladas do mesmo modo de que podem ser comunicadas.

Mesmo com respeito informações que, por qualquer razão possam parecer-nos de absoluta importância, essa unidade inseparável de “objetivização” e “relativização” aparece. A informação de que, por exemplo, 7.000 pessoas morrem em acidentes de trânsito num certo país, num período de um ano, torna-se fundamentalmente diferente em significado se for completada com uma outra, de que a média de mortes nos anos anteriores foi de 10.000 e 15.000, ou se comparada com a informação de que sempre foi dito ser o número de mortes inferior a 2.000.

Existe, ainda, uma outra motivação para incluir a História da Matemática em sua Didática. O aspecto mais pernicioso do conhecimento é a afirmação de absoluta objetividade, como se existisse apenas uma interpretação correta ou apenas um significado possível de uma certa parte do conhecimento. Os termos teóricos são valiosos como meios da atividade cognitiva apenas porque representam idealizações que não podem ser exaustivamente dissolvidas em uma possível interpretação ou aplicação particular. Tanto o conhecimento formal quanto o conhecimento cotidiano são silentes além da representação dada no sentido da proposição de Wittgenstein: “O que pode ser mostrado não pode ser dito” (4.1212). Ele oculta o que não expressa. Um conceito teórico, ao contrário, por si nada expressa e diz muitas outras coisas, e toda aplicação desse conceito mostra de um modo diferente. A história nos dá o “insight” de que não existe **uma** Matemática, e esse “insight” deveria encorajar e fortalecer a quem aprende.

Finalmente, pode-se-ia mencionar o fato de que a relação entre História da Matemática e Educação Matemática é simétrica, no sentido em que a Historiografia ganha em dinâmica e variedade, pelas aplicações didáticas pretendidas. A Didática, por seu turno, deve considerar que não existe conhecimento sem metaconhecimento, que não se pode aprender um conceito teórico sem aprender algo **sobre** conceitos, com o objetivo de compreender que espécie de entidades eles são. Este metaconhecimento é melhor adquirido pelos estudos históricos.

I.2. A idéia de ligar os estudos históricos àqueles da História da Matemática foi bastante popular na Alemanha durante o século XIX (Gebhardt, 1912). Tal idéia foi revitalizada, principalmente, por Otto Toeplitz, cujo livro "A Origem do Cálculo Infinitesimal. Uma Introdução para o Método Genético" (1949), postumamente publicado, tem sido amplamente apreciado, embora não tenha sido bem sucedido no sentido estrito. Os esforços de Toeplitz devem ser entendidos como relacionados às muitas atividades de matemáticos alemães como Weil, Speiser, Dehn, Siegel, entre outros, que tentaram situar a produção matemática num contexto cultural mais amplo. Depois de 1945, o "Bourbakismo" destruiu tais tentativas e somente durante os últimos quinze anos uma certa mudança de atitude tem sido detectada. Ainda assim, o único texto especificamente voltado à introdução das idéias históricas na sala de aula de Matemática em nível escolar básico é a coleção compilada por Popp (Popp, 1968). Em nível universitário a situação é um pouco mais favorável, mas existe ainda um único texto tratando da introdução de uma disciplina matemática por via da argumentação histórica: Scharlau/Opolka, 1980. No panorama internacional a situação é mais alentadora (veja lista bibliográfica, no final).

Nosso trabalho teve início quando a Fundação Volkswagen financiou nossa proposta (Otte, 1977). Alguns resultados desse projeto têm sido publicados sob o título "Problemas Epistemológicos e Sociais das Ciências no início do século XIX" (Otte/Jahnke eds; Reidel, 1981). Desde então, algumas dissertações de PhD resultaram desse trabalho.

I.3. Nesta seção farei algumas propostas para possíveis projetos. Podemos agrupá-las em cinco tipos:

- *Estudos de caso voltados a algumas idéias fundamentais da Matemática, como os conceitos de número, função, etc;*

- *Relatos sobre experiências de sala de aula e sobre experiências em cursos de treinamento para professores. Que efeitos e dificuldades uma abordagem genético-*

ISBN 978-85-89082-23-5

histórica encontra?;

- Considerações sobre problemas fundamentais da Educação Matemática, como o papel da Matemática na sociedade contemporânea, os objetivos da Educação Matemática hoje e propostas de caráter programático;

- Estudos sobre a História da Educação Matemática;

- Trabalhos conceituais que permitam à Educação Matemática fazer uso da experiência histórica.

Estamos hoje à procura tanto de conceitos quanto de idéias teóricas que nos auxiliem a melhor analisar e estruturar a situação presente, a História da Ciência e a Educação. Diretamente, os desenvolvimentos históricos nunca dizem respeito a questões e problemas contemporâneos.

II

O problema fundamental da evolução histórica da Matemática, durante os séculos XVII e XVIII, foi a questão de como desenvolver a interação entre a Álgebra (incluindo a Aritmética e a Análise Algébrica) por um lado, e Geometria e a Mecânica, por outro. Auguste Comte (1798-1857), com sua enorme sensibilidade histórica, sumarizou toda a história com o uso de seu sistema (Silva da Silva, 1991). Ele chama as duas faces a serem relacionadas, pelos termos Matemática Abstrata e Matemática Concreta (esta última consistindo da Geometria e da Mecânica Racional). Ele considera Descartes, Lagrange e Fourier como os maiores cientistas, dado que seus trabalhos representam três faces de um processo histórico de “matematização” (= “algebrização”) da realidade empírica, indo da Geometria (Descartes) para a Mecânica (Lagrange), sobre áreas além daqueles campos clássicos da aplicação matemática, como, por exemplo, a Teoria do Calor (Fourier). Fourier é considerado por Comte como o cientista positivista por excelência.

Em seu discurso preliminar do seu “Teoria Analítica do Calor”, Fourier aponta para o processo histórico, que aqui nos diz respeito: “As equações analíticas, desconhecidas para os geômetras antigos, que Descartes foi o primeiro a introduzir no estudo das curvas e superfícies, não são restritas a propriedades de figuras e àquelas propriedades que são objeto da Mecânica Racional, elas se estenderam para todos os fenômenos gerais. Não pode existir uma linguagem mais universal e mais simples, mais livre de erros e de obscuridades, ou seja, mais digna para expressar as relações invariáveis das coisas naturais. Considerada desse ponto de vista, a Análise Matemática é tão extensiva quanto a própria natureza...” (173). Uma descrição mais detalhada da relação entre Matemática e Tecnologia, que parece ser a força motriz nesses desenvolvimentos históricos, como sintetizado por Comte, pode ser encontrada na primeira parte do meu artigo “Em busca de uma Teoria Social do Conhecimento Matemático”.

III

O caso histórico bastante esclarecedor no que diz respeito à inter-relação entre Matemática e Filosofia é dado pelo trabalho de Leibniz. Neste sentido, dois princípios desempenham um papel fundamental na Filosofia de Leibniz, incluindo sua Filosofia da Matemática, quais sejam, o Princípio da Identidade dos Indiscerníveis e o Princípio da Continuidade. Falar sobre os dois princípios implica, como diz Gueroult, “tomar uma perspectiva central fora da qual tanto o enorme mundo conceitual como os componentes contraditórios que nele repousam tornam-se visíveis”.

O Princípio da Identidade dos Indiscerníveis (PI) consiste na tese de que não existem duas substâncias que se assemelham inteiramente, diferindo apenas numericamente, porque, se assim fosse, os “conceitos completos” dessas substâncias coincidiriam. O conceito completo de cada substância individual inclui, segundo Leibniz, tudo o que for verdadeiro sobre ela. “Cada substância única expressa o universo todo, em seu modo próprio, e incluídos nessa noção estão todos os eventos que ocorrem com a substância, em todas as suas circunstâncias. Entre as várias conclusões paradoxais que disso resultam, está o fato de que não é verdadeiro que duas substâncias sejam completamente semelhantes, apenas diferindo numericamente... Do mesmo modo, se corpos são substâncias, a natureza deles não pode, possivelmente, consistir somente do tamanho, forma e movimento: algo mais é preciso” (Discurso, 47). Disso decorre não somente que, tanto espaço quanto matéria concebidos em extensão são substâncias, mas também que todas as verdades devem, em última instância, ser dadas em termos de sujeito-predicado, porque “toda predicação verdadeira tem alguma base na natureza das coisas... Assim o termo sujeito deve sempre incorporar a natureza do predicado e, então, se o conceito do sujeito foi compreendido, poder-se-ia perfeitamente afirmar que o predicado pertence a ele.” (Discurso, 46) Em geral, somente Deus pode levar a cabo análise infinita do conceito completo necessária para se fazer um tal julgamento. Leibniz aplica o PI bastante universalmente. Em sua quarta carta para Clarke, ele escreve: “Não existe tal coisa como dois indivíduos indiscerníveis um do outro. Um engenhoso senhor de meu conhecimento, discutindo comigo na presença de Sua Alteza Real, a Princesa Sophia, nos jardins da Herrenhausen, pensou poder encontrar duas folhas perfeitamente semelhantes. A princesa o desafiou a fazê-lo, e ele percorreu o jardim por um longo tempo para encontrar alguma, mas foi em vão. Duas gotas de leite ou de água, vistas no microscópio, serão distintas uma da outra. Este é um argumento contra os átomos que, da mesma maneira que o vacuum, são confundidos como princípios da verdadeira metafísica.” (Leibniz, 1956: 36).

Em sua quinta carta para Clarke, ele coloca: “Eu disse que, nas coisas sensíveis, duas indiscerníveis nunca podem ser encontradas,... Eu acredito que tais observações gerais sobre as coisas sensíveis... E é uma grande objeção contra os indiscerníveis que não se possam achar exemplos para as coisas sensíveis.” (Leibniz, 1956: 61-62).

O PI esta completamente a serviço do Princípio da Plenitude (Lovejoy, 50f), que, desde Platão, foi tido como uma expressão da perfeição do mundo existente. O PII, por outro lado, nada mais é do que uma implicação do Princípio da Plenitude. “O Princípio da Continuidade poderia ser diretamente deduzido do Princípio Platônico da Plenitude. Se entre duas espécies naturais dadas existe um tipo intermediário teoricamente possível, tal tipo deve ser compreendido -e assim por diante, ad infinitum-, de outro modo, existiriam lacunas no universo, a criação não seria tão plena como deveria ser e isso implicaria conseqüência, inadmissível, de que sua Fonte ou Autor não foi bom, no sentido de que esse adjetivo tem no “Timaeus” (Lovejoy, 58).

O Princípio da Plenitude segue do PI e, também dele, O PII é derivado, trazendo toda diversidade introduzida pelo PI, novamente, a um balanceamento harmônico no corpo da Filosofia de Leibniz - e na de Platão - como contraste entre a mente de Deus e sua atividade. Como nada existe além de Deus, surge a questão de como as duas faces Dele poderiam ser reconciliadas. A resposta é dada lançando mão da maior perfeição possível do mundo por Deus criado. Deus escolheu aquele mundo que é o mais perfeito, o que significa “aquele que é, simultaneamente, o mais simples em hipóteses e o mais rico em fenômenos, do mesmo modo como poderia ser a linha geométrica se sua construção fosse fácil e suas propriedades as mais gerais e admiráveis" (Discurso, 44).

O PI leva Leibniz a estabelecer a congruência como a relação de equivalência fundamental da Geometria, à medida que congrega a maior variedade de objetos geométricos. Poncelet (1788-1867) usará o PII, mais de que um século mais tarde, para encontrar a metodologia de um novo ramo da Geometria: a Geometria Projetiva. Tal Geometria exibe a ordem mais econômica.

Leibniz, como todos os dos séculos XVII e XVIII, favoreceu uma metodologia algébrica e tentou estabelecer um cálculo geométrico baseado na congruência. A idéia desse cálculo expressa a visão de Leibniz de que o conhecimento nada mais é do que uma propriedade da forma e que "é a forma que dá determinado ser à matéria", como ele escreveu para Arnauld.

A identidade de uma substância provém de suas propriedades, que formam o conceito completo dessa substância. O conceito completo nos permite diferenciar, logicamente, uma substância de todas as outras. Isso inverte a relação entre genes e espécies, do que é para ser tido numa visão "extensional". Leibniz interpreta uma proposição como "todos os triângulos congruentes são similares", para significar que o conceito de similaridade está contido no conceito de congruência, por conterem os triângulos congruentes todas as propriedades dos triângulos similares, além de outras. A congruência torna-se a relação geométrica mais geral.

Se compararmos coisas de acordo com quantidade e qualidade, respectivamente, segue que a congruência que expressa igualdade, em ambos os casos, é a igualdade geométrica mais geral ou concreta. A igualdade algébrica refere-se somente à extensão, e a extensão é apenas o abstrato do que é estendido (Leibniz, 1875-1890, VI, 587f). Leibniz coloca a congruência como a identidade geométrica absoluta, por representar uma igualdade que segue ambas definições, externas e internas, tanto de acordo com a quantidade como com a quantidade. A congruência é, como escreve Couturat, "de qualquer modo, a maior relação que pode existir entre dois objetos,..., isto é, a identidade pura e simples" (Couturat, 1901, 311f).

Esse domínio da substância é ligado, de modo muito próximo, ao Princípio da Identidade dos Indiscerníveis de Leibniz.

O Projeto de Leibniz de um cálculo geométrico tinha que falhar porque a congruência não leva à quantidade "extensiva", necessária para o ato de calcular (Otte 1989, 25). Uma reversão completa de abordagem da Álgebra para a Geometria, no início do século XIX, fez da função (contínua) o conceito central da Matemática. Euler, de um ponto de vista algébrico, como Leibniz, definiu, em 1748, por um lado, uma função como uma expressão analítica e, por outro lado, definiu uma curva geométrica

ISBN 978-85-89082-23-5

como o que pode ser representado por uma função. Após ter demonstrado a inconsistência desses esforços, Cauchy revisou toda a abordagem com base no PII, transformando a Matemática numa teoria "extensional". Uma função, no sentido de Cauchy ou Dirichlet, pode ser vista como uma classe de equivalência de expressões analíticas ou fórmulas, onde a relação de equivalência é baseada na continuidade de curvas (a identidade de uma função é baseada no axioma da extensão, isto é, uma função é entendida como gráfico, não como regra ou algoritmo). Isto não ocorre por Cauchy querer voltar ao modo antigo de raciocínio algébrico, muito pelo contrário. Cauchy tentou aritmetizar completamente a Matemática, como é bem sabido. Entretanto, ele estava preocupado com a aplicabilidade da Matemática a fenômenos naturais e por isso, o PII pareceu indispensável, como já o havia sido para Leibniz.

Para Leibniz, essa lei da continuidade era fundamental, diretamente por conta do motivo aqui apresentado, ou seja, de que ela expressa uma exigência da aplicabilidade da Matemática ou da aquisição de conhecimento sobre a realidade. Essa exigência é que a realidade seja estruturada segundo leis. Se se nega o Princípio da Continuidade, diz Leibniz, "o mundo conteria hiatos, o que subverteria o grande Princípio da Razão Suficiente e nos compeliria a ter que recorrer a milagres ou à pura chance para a explicação de fenômenos" (Lovejoy, 181).

A nova visão matematicamente abstrata do conceito de função é ligada, de modo a não admitir separação, ao "Princípio da Continuidade" (Cf. Leibniz, 1966, vol. 1, p. 84ff e os comentários de seu editor Ernst Cassirer). Este princípio introduz certas suposições descritivas na relação funcional. Uma relação funcional é contínua se uma "pequena" variação na entrada causa uma variação, correspondentemente restrita, na saída. Em particular, o determinismo que disso surge une, de modo vigoroso, o conceito de função contínua ao conceito de lei na ciência natural clássica (Cf. J. Gleick, 1987, sobre os limites desse determinismo).

Por um lado, o conceito de função é radicalmente operacionalizado e visto como uma "caixa preta" que transforma "imputs" em "outputs". Por outro lado, esse operacionalismo radical ocorre segundo as exigências de uma estruturação legal da realidade, isto é, de acordo com as exigências para a aplicação da Matemática à realidade, que é a de que a Matemática deveria funcionar dentro da estrutura do conhecimento científico do mundo.

A aplicação que Poncelet faz do PII é mais radical, por ter entendido, a partir do trabalho de L. Carnot (1753-1823) que não se podem relacionar figuras geométricas individuais com diagramas algébricos individuais - como era a idéia original de Descartes -, mas que se devem tomar todas as classes de ambos.

Importante é que não somente objetos são representados, mas também a troca de propriedades ou morfismos. Num certo sentido, a relação entre Álgebra e Geometria tornou-se uma relação functorial entre duas categorias, e o PII serviu como um meio de estabelecer essa relação. A primeira área da Matemática onde essas idéias foram amplamente desenvolvidas foi a Teoria das Funções Complexas, no sentido de Cauchy e Weierstrass. Hoje, a Topologia Algébrica aparece como campo que não somente tem estimulado a Teoria das Categorias, mas que também expressa seus princípios mais claramente.

O PI contribui para esses desenvolvimentos do mesmo modo que, nas mãos de Grassmann (1809-1978), fez surgir as Álgebras Linear e Universal.

Referências

Boutroux P**. L'Ideal scientifique des Mathematiciens**, Alcan Paris, 1920.

Bridgeman P. **Dimensional Analysis**, Princeton, 1949.

Cauchy, A. L. **Cours d'Analyse Algebrique**, Oeuvres II. ser., tome III, Gauthier-Villars Paris, 1821.

Gleick , J. Chaos**, Making a new Science**, Viking N.Y, 1987.

Grassmann, H. **Gesammelte mathematische und physikalische.**

Grassmann, J. **Uber den Begriff der reinen Zahlenlehre,** Stettin, 1827.

Grattan-Guinness I. **The Development of the Foundations of math.** Analysis from Euler to Riemann, MIT Press, 1970.

Hacking I., Leibniz and Descartes; in: F. Honderich (Ed.) **Philosophy through its Past**, Penguin Book, 1984.

Hatcher, W. **Calculus is Algebra**, AMM 362-370, 1982.

Leibniz G. W. **Discourse on Metaphysics; Edited and translated** by R. N. D. Martin and St. Brown, Manchester University Press, 1988.

Leibniz G. W. **Mathematische Schriften**, C. Gerhardt (Ed.), vols. I-VII (GM).

Leibniz G. W. **Philosophische Schriften**, C. Gerhardt (Ed.), vols I-VII (GP).

Leibniz G. W. **Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie**, E. Cassirer (Ed.), Meiner Hamburg (HS).

Leibniz G. W. **The Leibniz** - Clarke Correspondence, H. G. Alexander (Ed.), Manchester University Press, 1956.

Lovejoy, A. O. **The Great Chain of Being**, Harvard University Press, Cambr/USA, 1936.

Mahnke, D. **Leibnizens Synthese von Universalmathematik und Individualmetaphysik**, Halle, 1925

Mates, B. **The Philosophy of Leibniz**, Oxford Univ. Press, 1986.

Moore, G. H. The Emergence of first-order Logic as the Basis for Mathematics; in: E. Phillips (Ed.), **Studies in the History of Mathematics**, The Math. Ass. of America, 98-136, 1987.

Neto, F. A. L. **Carnot's "Geometrie de Position"**, IDM Bielefeld, 1992.

Otte, M. The Ideas of Hermann Grassmann in the Context of the Mathematical and Philosophical Tradicion since Leibniz, Hist. **Math.** 16, 1-35, 1989.

Otte, M. Gleichheit und Gegenständlichkeit in der Begründung der Mathematik im 19. Jahrhundert, in: G. König (Ed.), **Konzeptes des Mach.** Unendlichen im 19. Jahrhundert, Göttingen, 219-253, 1990.

Otte, M. **Gegestand und Methode in der Geschichte der Mathematik,** Philosophia Naturalis, 1992.

Rescher, N. **Leibniz**, Blackwell Osford, 1979.

Russel, B. Recent Work on the Philosophy of Leibniz, **Mind** 13, 177-201, 1903.

Werke, F.; Engel (Ed.) **vols I-III**, Teubner Leipzig.