



Representação do Conhecimento em Matemática: transformações no plano - Translação e Simetria¹²

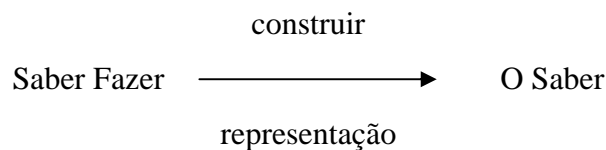
Estela Kaufman Fainguelernt³

O que é representação do conhecimento em Matemática?

Para tentarmos entender o que isto significa, trabalharemos com transformações no plano e, entre estas, apenas as Translações e Simetrias.

Inicialmente, para “aprender Matemática” é preciso “fazer Matemática” gradativamente. Neste fazer Matemática estão implícitas as representações que desempenham um importante papel. Se o aluno ou qualquer aprendiz conseguir entender as diferenças entre a aquisição de um conceito e as suas diferentes representações, ele tem possibilidade de fazer a passagem das operações concretas para a abstração.

É fundamental partir da percepção e intuição de dados concretos e experimentais, explorar as representações, as aplicações, desenvolver o raciocínio lógico para, só então, chegar aos processos de abstração e de generalização. Para construirmos o Saber Matemático, partimos do Saber Fazer, trabalhando com as representações e sobre as representações.



A Geometria oferece um vasto campo de idéias (conceitos) e métodos que se prestam especialmente a este tipo de abordagem.

Gostaria aqui de focar dois aspectos clássicos importantes no ensino-aprendizado de Geometria.

¹ Digitalizado por Gustavo Barbosa e Paulo Roberto Vargas Neves.

² Apresentado em 2 de Março de 1993.

³ Universidade Santa Úrsula – Rio de Janeiro, RJ.

- Uma visão da Geometria como uma ciência do espaço.
- Uma visão da Geometria como uma estrutura lógica.

Segundo Freudenthal (1973), a Geometria é o meio pelo qual o aprendiz pode dar um sentido para a estrutura matemática.

Há um consenso de que esses dois aspectos são ligados. Alguns níveis da Geometria como ciência do espaço são necessários, para aprender a Geometria como uma estrutura lógica. Através das representações é possível verificar estas passagens, pois elas estão ligadas à imagem que é reflexo do que se aprendeu.

As diferentes etapas da aprendizagem de Geometria promovem diferentes tipos de perguntas em Psicologia.

Se o nosso interesse é na Geometria como uma ciência do espaço, de um modo geral, as perguntas iniciais são amplas. Por exemplo:

- Como as crianças percebem seus arredores (seu espaço)?

As crianças constroem a sua Geometria desde os primeiros meses de vida (engatinham, a porta é a saída do quarto...).

Os deslocamentos do seu corpo são importantes, portanto, no desenvolvimento da noção de espaço e na sua representação.

- Que tipos de códigos são usados, no processamento da informação visual?

No momento em que usa diferentes códigos, ela está usando as diferentes representações, e cada tipo de código gera um significado. Se nós limitarmos a visualização, poderemos ainda nos questionar:

- Em particular o que é preciso à criança produzir de documentação dos seus arredores?

- Como selecionar o que é importante do que a criança documenta daquilo que ela vê.

- Como fazer a interpretação desta documentação (representação externa)?

Isto é:

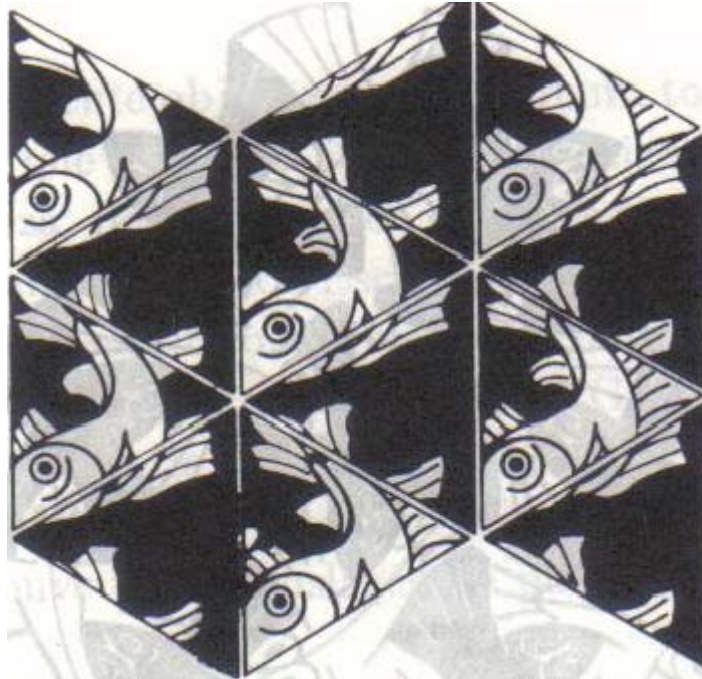


Figura 1: Translação

– Como as crianças descrevem, verbalmente ou visualmente, o mundo em três dimensões?

– Como interpretar tal descrição?

Podemos continuar com uma infinidade de questões e corremos o risco de não saber responder a elas. Mas em todas elas está implícito o papel das representações.

Historicamente podemos nos reportar aos ornamentos, que foram feitos por tribos primitivas e que atingiram o seu ápice com os trabalhos do artista holandês Maurits Cornelés Escher, que utilizou de modo criativo as isometrias do plano, em seus trabalhos, e entre elas a translação e a simetria. Trabalhou inicialmente com sua intuição, levado por um prazer irresistível em repetir as mesmas formas e posteriormente ele constatou que os seus desenhos eram baseados em regras cientificamente comprovadas (grupos das simetrias), cuja representação dava a imagem de figuras animadas e que preenchia toda uma superfície pela repetição de um modelo abstrato ou geométrico simples.

Gostaria aqui de enfatizar a importância da percepção do espaço para poder representá-lo, pois, como vimos nos trabalhos de Escher, ele percebeu, através da

intuição, que cada vez que reproduzia a repetição da figura ele tinha uma nova transformação.

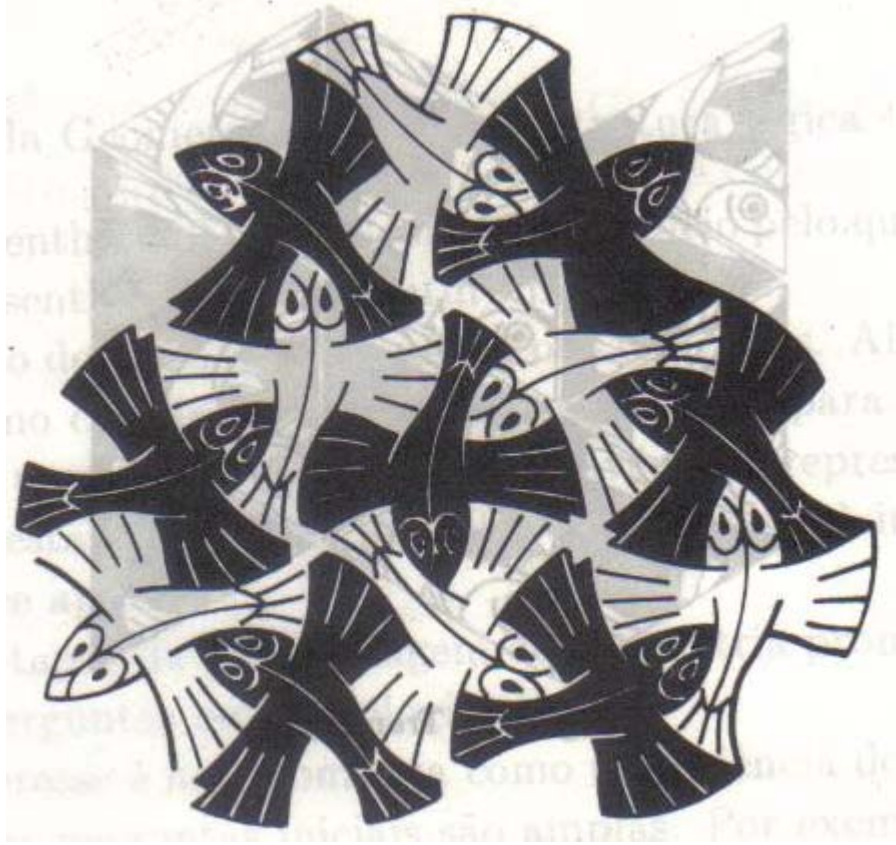


Figura 2: Simetria

Os trabalhos de Escher, que hoje são mundialmente conhecidos, foram desenvolvidos a partir de um interesse no trabalho de artistas mouros, utilizados na decoração de Alhambra, Espanha (séc. XIII). Eles partiam de modelos abstratos ou geométricos, já que os mouros estão proibidos pela religião islâmica de representar figuras animadas e preenchiam toda uma superfície pela repetição de um modelo. Escher adaptou soluções mouras à sua prodigiosa criatividade. Parece que ele descobriu sozinho as 17 maneiras fundamentais de cobrir um plano usando um padrão repetido.

Escher considerava a Matemática “um portão aberto”. Desse portão, dizia ele, partem muitos caminhos que se ramificam por um jardim. Quando pensava já haver percorrido a todos eles e retratado todas as vistas desse jardim, acabava encontrando um novo caminho, que permitia outras descobertas. Com essa concepção, Escher utilizava a Matemática como uma ferramenta que lhe ampliava a percepção e enriquecia seu

trabalho gráfico, disso resultando uma obra primorosa, onde em cada etapa as representações estavam presentes.

Comentando seu próprio trabalho, Escher escreveu:

“Se você me perguntar por que faço essas coisas tão loucas, esses objetos tão absolutamente objetivos, sem nenhum toque pessoal, eu só posso lhe responder que é porque não consigo deixar de fazê-los”.

É, pois, pela beleza, pela riqueza de detalhes e pelas isometrias que contém, que o trabalho de M. C. Escher pode, com grande vantagem didática e pedagógica, servir como ilustração para o estudo das simetrias e das transformações, em nossas aulas de Geometria.

Uma das possibilidades de deslocamento é empurrar uma figura sem girá-la ou virá-la, obtendo-se uma representação dessa figura. Neste caso dizemos que houve uma translação da posição da Figura 3 para a posição da Figura 4.

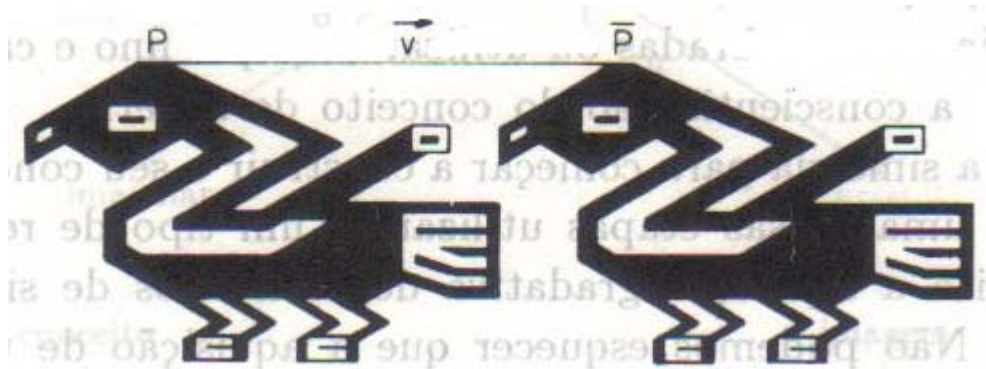
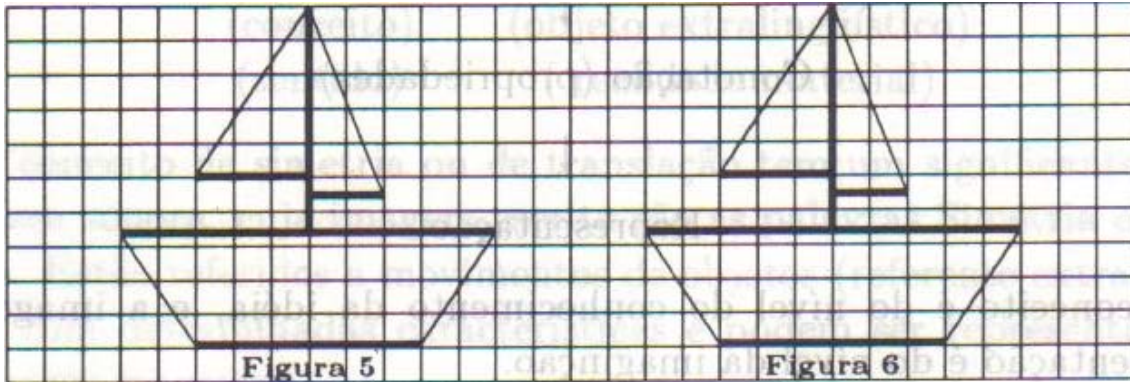


Fig. 3

Fig. 4

Se observarmos a figura anterior, perceberemos o movimento que produziu a imagem.

Segundo Frege, o conceito (idéia) tem uma denotação em um referente e, no caso da translação, denota-se que pares de pontos no plano que podem ser ligados por um paralelogramo aparecem sempre nestas transformações. Esses paralelogramos estão sempre presentes, ligando objeto real às suas diferentes representações quando utilizamos as translações. Por exemplo, observando o movimento realizado da Figura 5 para a Figura 6, veremos claramente os paralelogramos.



Uma outra possibilidade de movimento é colocar os objetos de maneira simétrica, utilizando o plano de simetria do próprio corpo ou observando a simetria de objetos na natureza.

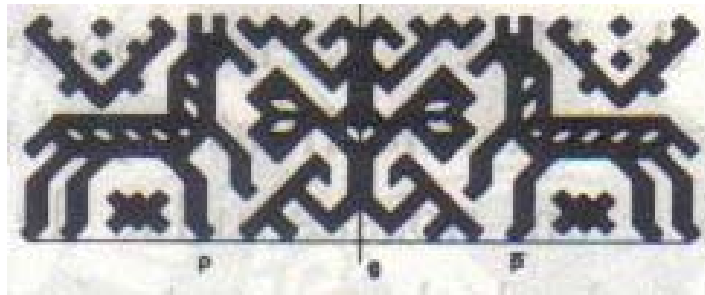


Figura 7

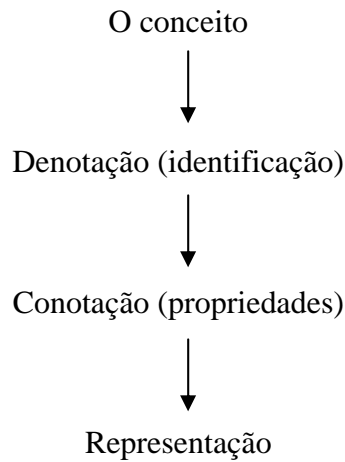
O uso de espelhos é também um recurso auxiliar nas descobertas para a construção do conceito de simetria.

Numa etapa posterior, através da dobradura de papéis ou recortando figuras previamente dobradas ou utilizando papel fino e carbono, possibilitaremos a conscientização do conceito de simetria. Inicialmente perceberemos a simetria para começar a construir o seu conceito.

Em cada uma dessas etapas utilizaremos um tipo de representação que possibilita a aquisição gradativa dos conceitos de simetria e de translação. Não podemos esquecer que a aquisição de um conceito depende sempre da experiência pessoal de cada um, acrescida de atividades disparadoras que geram a construção do novo conceito.

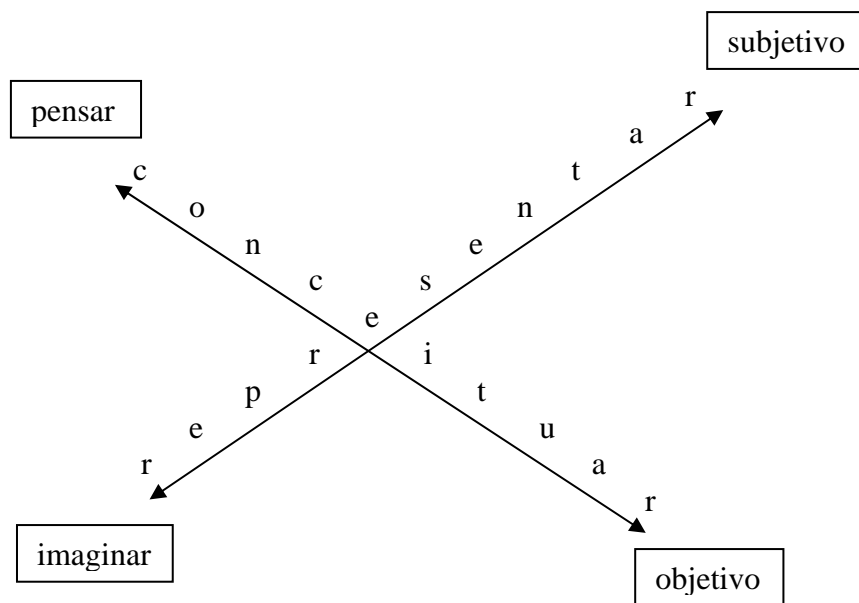
A aprendizagem dos conceitos e das propriedades geométricas permite e exige uma grande variedade de concretizações que vão permitir comparações por diferenças e semelhanças que facilitam o processo de abstração.

Para Frege:



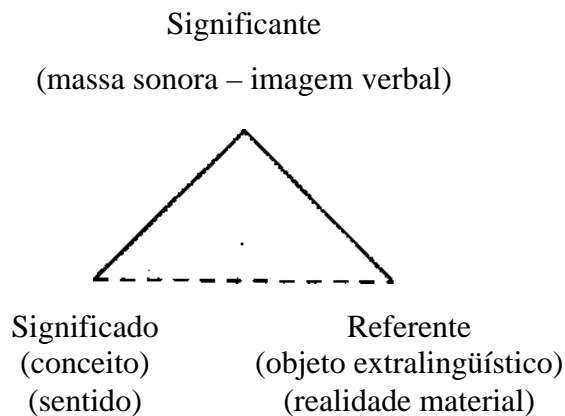
O conceito é do nível do conhecimento da idéia, e a imagem ou representação é do nível da imaginação.

Portanto, para ele, o conceito é lógico, tem extensão, denotação e referente. A imagem é a representação do objeto.





O conceito é objetivo e designa um referente extralingüístico.



O conceito de simetria ou de translação tem um significante, que é a massa sonora, cuja imagem escrita são as palavras Simetria e Translação. Estão referidos a movimentos de objetos (referentes extralingüísticos) com determinadas características e podem ser representados de diferentes maneiras.

Portanto, para se construir o conceito de simetria, como o de translação, não é só a palavra nem só a representação nem só a referência que dão o sentido, mas a inter-relação que se pode estabelecer entre elas e que geram significado, isto é, o conceito.

A representação de um conhecimento não está apenas no nível verbal, mas decorre também de imagens com significados que nos dão as diferentes linguagens que podem ser gráficas, lúdicas, artísticas, escritas, orais, etc.

Para Frege, o que ele denominou de objeto só pode ser mais precisamente discutido quando vinculado ao conceito e à relação.

A definição do conceito de simetria ou de translação pode ser representado de diferentes maneiras como vemos a seguir.

Define-se simetria central no plano como:

uma função ou transformação de pontos no plano, que associa a cada par ordenado (x,y) o seu simétrico $(-x,-y)$. (representação escrita)

ou

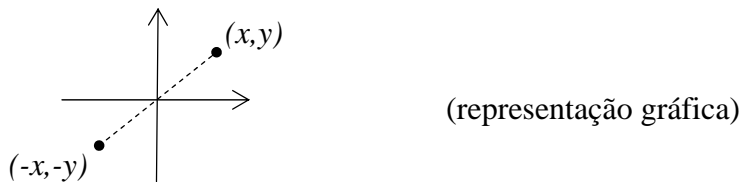
$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (-x, -y) \quad (\text{representação simbólica})$$

ou

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \quad (\text{representação matricial})$$

ou



A simetria axial em relação ao eixo OY no plano é:

uma função ou transformação de pontos no plano que associa a cada par ordenado (x,y) o ponto $(-x,y)$. (representação escrita)

ou

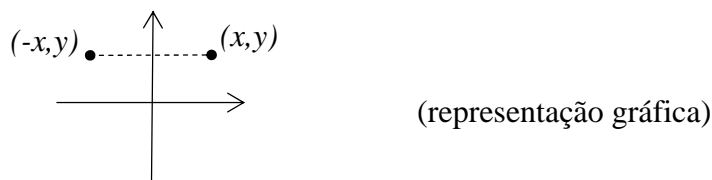
$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (-x, y) \quad (\text{representação simbólica})$$

ou

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{representação matricial})$$

ou



A translação é:

uma função ou transformação de pontos no plano que associa cada par ordenado (x,y) a $(x+a,y+b)$ onde a e b são constantes. (representação escrita)

ou

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (x + a, y + b) \quad (\text{representação simbólica})$$

ou



Cada par orientado de pontos distintos (A, B) determina o que chamamos uma Translação, isto é, um deslocamento de A até B e que se anota $B-A$.

Portanto, os conceitos de simetria e translação estão ligados a funções proposicionais que poderão ser saturadas por argumentos que designam objetos.

Outro tipo de representação do conhecimento é o realizado com o computador.

A representação do conhecimento utilizando o computador será exemplificado com o trabalho realizado no Colégio Santa Úrsula em 1992 com alunos da 4ª série do 1º grau, utilizando a linguagem LOGO.

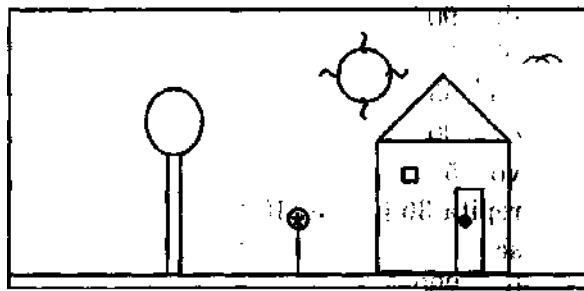
O Projeto pedagógico do colégio neste ano tinha como tema central “ECO9”, e se propôs a seguinte questão:

O que poderia ser realizado no computador que representasse este tema?

Como ilustração do resultado, colocamos a seguir o programa feito por um dos alunos seguido de uma representação gráfica na máquina.

		cl	
		di	90
AP	CASA	vo	2
di	45	fr	33
fr	50	es	90
di	90	fr	13
fr	50	es	90
di	135	fr	33
fr	70	es	90
es	90	fr	13
fr	60	sc	
es	90	es	90
fr	70	fr	33
es	90		
fr	60	di	90
es	90	cl	
fr	40	fr	45
sc		di	90
es	90	fr	55
fr	10	di	90
cl		fr	10
fr	15	di	90
di	90	fr	55
fr	15	vo	55
di	90	es	90
fr	15	vo	5
di	90	repita 36 [fr 4 es 10]	
fr	15	sc	
di	90	fr	200
sc		es	90
fr	20	fr	40
es	90	cl	
fr	7	repita 18 [fr 1 di 10]	
		es	180

repita 18 [fr 1 di 10] es 180
 sc sc
 sc di 90
 fr 70 fr 20
 di 90 es 90
 fr 80 fr 100
 es 90 es 180
 fr 10 fr 1
 di 90 cl
 fr 9 fr 13
 di 90 es 90
 cl repita 18 [fr 1 es 90 fr 4 vo 4 di 110]
 repita 4 [fr 1 di 90] fim
 sc
 fr 80
 es 90
 fr 55
 di 90
 cl
 repita 36 [fr 2 es 90 fr 6 vo 6 di 100]



Logo – 4ª Série do 1º grau
Colégio Santa Úrsula

Podemos constatar que as experiências das crianças nos mostram que a percepção associada à representação possibilita a criatividade, também trabalhando com o computador.

Para concluir, citarei esta mensagem:

“No Jardim do Paraíso Adão viu os animais antes de nomeá-los; no sistema tradicional (de ensino), as crianças dão nomes aos animais antes de vê-los”. (A. N. Whitehead)

Esperamos que esta sucinta amostragem de nossa experiência sirva de incentivo aos novos colegas.

O trabalho que cada um de nós realiza no dia a dia em sala de aula deve ser sempre trocado e discutido pois ele é um agente transformador e enriquecedor na descoberta de novos caminhos para o ensino de Geometria.

Referências

FREGE, G. **Lógica e Filosofia da Linguagem**, Editora Cultura (Editora da Universidade de São Paulo).

COXFORD, A. F., et. al. **Geometry from Multiple Perspectives**, Christian R. Hirsch, Series Editor; National Council of Teachers of Mathematics.

ERNST, B. **L'Aventure des Figures Impossibles**, Benedikt Taschen.

LEDERGER-RUOFF, ERIKA, B. **Isometria e Ornamentos do Plano Euclidiano**, Editora Atual.

BITTENCOURT G. **Representação do Conhecimento**, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE, São José dos Campos – SP.

ARAGON, D. **Representação do Conhecimento**, Instituto de Lógica Filosofia e Teoria da Ciência, Universidade Federal Fluminense (UFF).

Notas dos seminários sobre Representação do conhecimento, realizado no ILTC (Instituto de Lógica Filosofia e Teoria da Ciência) – Orientado por Dóris Aragon.