ISBN 978-85-89082-23-5

O Pensamento Relacional: equações[1][2]

Michael Otte[3]

Para se aprender a pensar científica e teoricamente existe um grande obstáculo, além de muitas dificuldades quando tentamos ganhar conhecimentos novos. O Empirismo é esse obstáculo: o empirismo do pensamento habitual cotidiano. Vamos discutir algumas teses fundamentais, relacionadas com essa questão.

TESE 1: A história da ciência (e da matemática) pode ser caracterizada brevemente como a transição de um pensamento empírico, um pensamento em termos de objetos concretos, para um pensamento em termos das relações entre objetos Então os conceitos teóricos agora não são nomes de objetos ou de qualidades dos objetos, mas denotam relações entre objetos.

TESE 2: As relações devem ser representadas porque não são acessíveis diretamente. Então, a matemática opera com representações (intenções), mas quer ganhar verdades objetivas sobre as relações (sobre as denotações de símbolos ou modelos usados como representações).

Por isso, a ação recíproca entre os conceitos matemáticos e as representações deles, ou entre extensão (denotação) e intensão (sentido) dos conceitos, é muito importante. Essa ação recíproca poderá ser desenvolvida só quando entendermos que os conceitos matemáticos (os conceitos teóricos em geral) denotam relações entre objetos (ou entre outras relações já construídas).

Essas teses parecem muito fechadas, muito complexas. Isto não poderia ser diferente, pois são o resumo de muitos trabalhos científicos.

Devemos explicar um pouco as palavras. Comecemos com alguns exemplos:

(1) Fizemos a seguinte experimentação com crianças de 4/5 anos de idade: entregaram-se a elas, alguns (40) cubos com as faces pintadas de cores

[1] Digitalizado por Gustavo Barbosa e Paulo Roberto Vargas Neves.
[2] Apresentado em 23 de Março de 1993.
[3] Professor da Universidade de Bielefeld – Alemanha.

variadas. A tarefa dada às crianças foi a de construir um cubo grande (com os cubos pequenos) que apresentasse uma cor só nas faces, por exemplo: azul.

As crianças procuraram imediatamente os cubos que tinham faces azuis principalmente, e começaram a construir o cubo grande, mas não conseguiram porque não tinham cubos pequenos azuis suficientes. Que é um cubo pequeno azul? Não existe realmente porque nenhum tinha são lados azuis.

Depois dessa frustração, ensinamos os conceitos de "cubos de esquina", "cubo ao canto", "cubo ao lado" e de "cubo". Após aprenderem esses conceitos conseguiram resolver o problema a facilmente, mas conceitos, simples como eles são, denotam relações entre o cubo grande e os cubos pequenos.

(2) Que é um número? Que é 5? Uma coisa para calcular? Muito bem! Mas o que é π? É o número que denota a área do circulo de raio 1. Sim, mas como calcular com π? Precisamos de algumas aproximações em números decimais.

Quando nós entendemos que a "área" é uma relação entre duas grandezas (o círculo, por exemplo, e um quadrado com lado 1), ganhamos possibilidades de aproximar π. Podemos fazer modelos. Ou podemos fazer uma experimentação probabilística, uma "chuva aleatória" de pontos e calcular o numero de pontos dentro do circulo e do quadrado.

Quando as pessoas têm dificuldades em pensamento relacional, geralmente mostram dificuldades com as equações. Por exemplo, durante os séculos 18 e 19, houve discussões sobre a natureza das grandezas negativas. Uma Argumentação foi a seguinte:

Não pode ser que as grandezas negativas sejam menores que zero, porque, quando nós temos, por exemplo, –3 < 2, também teríamos (–3)2 = 9 < 4 = 2·2 (Carnot Geometrie de Position, 1803). Se nós temos uma relação verdadeira e fazemos "a mesma coisa" (elevar ao quadrado) com ambos os lados dessa relação, deveríamos chegar com uma relação verdadeira. Mas 9 < 4 não é, por isso –3 < 2 não é verdadeira também.

ISBN 978-85-89082-23-5

A maioria dos alunos percebe uma equação como uma “maquina”, um algoritmo, uma regra ou uma função para transformar alguns “inputs” em “outputs”. Por exemplo: 3 + 5 = 8 tem o “input” (3, 5) e produz 8.

Quando têm uma equação como $3 + x = 8$, os alunos têm dificuldades porque não sabem o que é o “input” x. Então, que é uma equação como $a + b$?

À primeira vista, ela difere da igualdade $a = a$. Temos alguma coisa igual a alguma coisa diferente em $a = b$!

Chegamos a duas interpretações dessa equação, dependendo de onde nós colocamos a igualdade e a diferença. Podemos interpretar $a = b$ como uma relação entre duas coisas diferentes que têm algum aspecto, alguma qualidade em comum. Por exemplo: “1 casaco = 2 pares de sapato” significa que duas coisas diferentes, quando são consideradas como mercadorias, têm valor econômico em comum.

Marx começou sua análise, no primeiro volume de sua obra “O Capital”, com a diferença entre valor de uso e valor de troca. O valor de troca parece ser completamente casual e relativo. Um valor de troca imanente é uma contradição em si. O valor de troca se realiza como “um quarter de trigo = x quintais de ferro”. Que significa essa igualdade? Que algo comum, com a mesma grandeza, existe em duas grandezas diferentes: um quarter de trigo e em x quintais de ferro? As duas coisas são, portanto, iguais a uma terceira, que por sua vez delas difere. Cada uma das duas, como valor de troca, é reduzível, necessariamente, a essa terceira.

Evidencia-se isto com um simples exemplo geométrico. Para determinarmos e compararmos a área dos polígonos decompomo-los em triângulos. O próprio triângulo pode converter-se, também, numa expressão inteiramente diversa de sua figura visível – a metade do produto da base pela altura. Do mesmo modo, os valores de troca têm que ser redutíveis a uma coisa comum, da qual representam uma quantidade maior ou menor![4]

> Essa coisa comum, da qual os valores de troca são apenas uma quantidade maior ou menor, ou, dito de outra forma, o comum, cujo atributo é o valor da troca, é o valor econômico em si. Esta substância é constituída pela força de trabalho social média.

[4] *O Capital*, Vol. 1, ed. 10, 1985, p. 43.

Em vez de partir da idéia empirista de que expressões podem ser igualadas se denotam o mesmo, pode-se partir da substituibilidade mútua de expressões em determinados contextos. Assim se constitui sentido. Casaco e sapatos, ao representarem o mesmo valor de troca, são representantes de uma determinada substância ou de algo objetivo, a saber, o valor de determinada substância ou de algo objetivo, a saber, o valor econômico em si, mas este último somente surge neste mundo através das diferentes atividades. A equação, então, depende do contexto e das atividades. Ela não pode ser dada independentemente de qualquer contexto e a priori. Na medida em que casaco e sapatos exibam outras propriedades, além da de serem mercadorias do mesmo valor, em outros contextos, eles não são de maneira alguma trocáveis. Tais classificações não são, portanto, necessariamente transitivas, mas dependem sempre do contexto. Já que casaco e sapatos não são entendidos como aparência sensorial, mas como objetos da atividade, como valores de uso e de troca, eles mudam de caráter com a atividade.

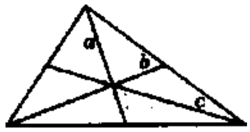
O conceito de equação é, portanto, para começar, sempre relativo, relacionado a um determinado contexto. Todos os objetos são substituídos por conceitos, cujo conteúdo não são os objetos, mas determinadas relações desses objetos. Uma contextualização, como aqui a entendemos, resulta na consideração de um objeto numa determinada perspectiva, como também na negação da diferença categorial que acabamos de mencionar, na medida em que substituamos uma substância ou um objeto por uma de suas propriedades, que qualificaríamos como a essencial. É exatamente isso que "considerar um objeto numa determinada perspectiva" quer dizer. De certa maneira substitui-se a denotação de uma expressão por seu sentido. Por isso, o grande lógico Gottlob Frege achou que $a = b$ não significa uma relação entre objetos, mas dois nomes diferentes do mesmo objeto.

a e b têm um sentido diferente, mas têm a mesma denotação. *a* e *b* são duas maneiras em que um objeto é representado ou é dado. Frege achou que uma diferença entre $a = a$ e $a – b$ só pode existir quando a diferença dos símbolos *a* e *b* é interpretada como uma diferença de maneira em que uma coisa denotada é dada.

Por exemplo: consideramos o triangulo e as medianas deles, a, *b* e *c*.

Definimos $P_1 = a \cap b$ e $P_2 = b \cap a$

ISBN 978-85-89082-23-5



Agora $P_1 = P_2$ significa que as três linhas se encontram em um ponto *P*, e P_1 e P_2 são duas representações diferentes desse ponto *P*. P_1 e P_2 têm a mesma denotação, a mesma extensão, mas têm sentidos diferentes, têm intenções diferentes.

Frege escreveu: *"Let* a, b c *be the lines connecting the vertices of a triangle with the midpoints of the opposite sides. The point of intersection of* a *and* b *is then the same as the point of intersection of* b *and* c*. So we have different designations for the same point, and these names ('point of, intersection of* a *and* b*', 'point of intersection of* b *and* c*') likewise indicate the mode of presentation, and hence the statement contains actual knowledge.*

It is natural, to think of there being connected with a sing (name, combination of words, written mark), besides that which the sign designates, which may be called the meaning of the sign, also what I should like to call the sense of the sign, wherein the mode of presentation is contained. In our example, accordingly, the meaning of the expressions 'the point of intersection of a *and* b*' and 'the point of intersection of band* c*' would be the same, but not their sense. The meaning of 'evening star' would be the same as that of 'morning star', but not the sense".*

Por um pensamento relacional, quando nós aceitamos que os objetos do pensamento são as relações, quando, por exemplo, nós consideramos o valor econômico como o objeto verdadeiro do pensamento, as duas interpretações da equação $a = b$ são iguais. Nesse caso, nós podemos interpretar casaco e sapatos como representações diferentes do mesmo objeto teórico: o valor econômico.

O objeto matemático mais importante durante os últimos dois séculos foi a função.

Que é uma função?

Primeiramente, ela foi uma regra, um algoritmo, uma "máquina abstrata" ou um termo analítico, mas as pessoas encontraram dificuldades quando quiseram saber quais são as propriedades de uma função, desse sentido.

Por exemplo, que significa a sentença "A função *f* é continua"? Em 1748, Euler, o melhor matemático do século XVIII, caracterizou as funções continuas como expressões analíticas. Por isso, uma função como a seguinte:

$$y = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 0 \\ \text{sen}\, x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Não foi considerada continua! O que é pior é que algumas funções devem ser consideradas contínuas, quando são representadas de uma maneira, e as mesmas funções, quando representadas de outra maneira, devem ser chamadas contínuas.

Essas contradições só podem ser vencidas quando nós compreendemos a função como uma classe de termos equivalentes. A relação de equivalência é dada pelo "axioma da extensão":

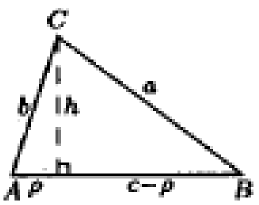
$$f = g \Leftrightarrow f(x) = g(x), \forall x$$

Em ciências da computação, as pessoas não ficam satisfeitas só com a extensão, mas para elas é muito importante como a função (algoritmo) é representada.

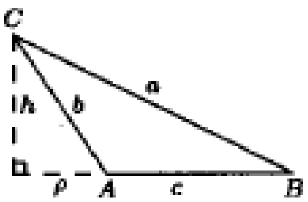
A ação recíproca entre extensão e intensão é regulada pelas relações de equivalência. A área mais importante e ao mesmo tempo mais complicada em relação a essas questões epistemológicas é a geometria.

A geometria de Euclides não tem nada geral. Mas no teorema dos cossenos, por exemplo, os casos diferentes são cobertos pela função *y = cos x.*

Dessa maneira, a geometria desaparece e é substituída pela álgebra e teoria das funções. Esse foi o caminho da geometria analítica no sentido cartesiano.



(1) $a^2=b^2+c^2-2c\rho$



(2) $a^2=b^2+c^2+2c\rho$

Por (1) e (2), $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

Leibniz, filósofo e matemático dos séculos XVII e XVIII, que inventou o cálculo infinitesimal, não ficou contente com esse desenvolvimento da geometria e procurou uma característica geométrica, um cálculo geométrico que deve conservar as vantagens da álgebra e combiná-las com a transparência do significado geométrico. Mas, na época de Leibniz, as relações não foram reconhecidas como objetos matemáticos, por isso, considerava-se o problema da equação em apenas um nível, isto é, na perspectiva de um mundo concreto, dado antecipadamente, como foi costume na matemática ainda no século XIX. Pode-se perguntar conseqüentemente como deve ser tratada a questão da igualdade e da diferença do ponto de vista das coisas como entidades objetivamente existentes. Tomando as substancias por dadas, as duas interpretações da relação de igualdade discutidas acima podem, de certa forma, ser aplicadas, ao constatar, através da comparação, se são iguais de acordo com relações externas, como, por exemplo, o tamanho, e ao investigar ao mesmo tempo se são diferentes ou não, de acordo com suas propriedades essenciais. Uma figura geométrica, escreve Leibniz, "contém em geral, além da quantidade, ainda uma determinada qualidade ou forma, e, tal como é igual o que tem a mesma quantidade, assim é semelhante o que possui a mesma forma"[5]. A semelhança ou igualdade de forma e definida por Leibniz exatamente como uma igualdade de acordo com determinações internas ou propriedades. "Duas figuras dadas serão chamadas semelhantes", escreve, "se não se pode indicar numa considerada por si, uma característica que não se encontre também na outra"[6]. A igualdade de acordo com as determinações internas é para Leibniz a essencial.

Ao considerar o problema da igualdade nesse sentido, sem partir da classificação das relações de equivalência usadas, mas sim, com Leibniz, "do objeto", constata-se que a congruência ou a "igualdade geométrica" (Euclides) é mais geral, por representar uma igualdade tanto de acordo com determinações internas como externas. Congruência é tanto igualdade de forma como também da quantidade. A informação de que "todos os triângulos congruentes têm a mesma área" significa para Leibniz que o conceito de "igualdade de área" é contido no conceito de "congruência", e isto implica que a congruência é a igualdade geométrica mais geral. Esse é um ponto de vista que toma as coisas somente "em intensão" e não fala sobre as extensões. As intensões dos conceitos determinaram tudo, determinaram também as extensões:

---

[5] HS I, 71.
[6] HS I, 73; HS I, 55; GM V, 153.

isso e uma perspectiva estranha. Por exemplo, implica que os elétrons são exatamente o que a teoria fala sobre eles.

Leibniz procura uma “característica” que trata das formas das coisas como tais, isto é, da sua qualidade em geral ou da “relação do semelhante e do diferente entre elas”, enquanto a álgebra trata meramente “das formulas da quantidacje ou da relação pelo igual e do desigual. A álgebra é por isso subordinada à arte combinatória”. Em outras palavras: o objeto da “característica geométrica” ou linguagem geométrica simbólica de Leibniz deve surgir da coordenação do diferente, enquanto o objeto da álgebra é apenas semelhante ou o quantitativo.

Leibniz quer destacar, num sentido bem moderno, o semelhante no diferente e construir sobre isso uma nova álgebra ou característica geral. Mas o problema é que ele não parte da atividade e das relações constituídas por essa atividade, por exemplo, das relações de troca no mercado ou, na geometria, da atividade de medição, mas se atém ao pensamento tradicional em termos de substâncias. Ele presume que os objetos geométricos são dados e que o semelhante somente se mostra como propriedades iguais dos objetos e não como relações estabelecidas. Na concepção do conceito prevalece, por isso, a questão da referência sobre a questão da função do conceito. Mas, para construir um cálculo, como, por exemplo, a característica geométrica, precisa-se antes de tudo da compatibilidade da relação de igualdade com a função do cálculo. Para estabelecer, como Leibniz quer, a conseqiiência como uma igualdade geométrica, seria preciso nomear as funções que são compatíveis com essa relação. Para que essa estrutura geométrica seja aplicável, estas funções devem ser interpretadas de uma maneira compatível com a atividade de medição. Neste sentido, a congruência não é uma relação de igualdade conveniente, por não permitir a construção de uma grandeza extensiva, ou, por outras palavras: “se iguais são somados a iguais, os totais não necessariamente são iguais”. Com triângulos congruentes, podem-se, por exemplo, compor figuras não-congruentes. Estas figuras são “iguais quanto à decomposição”, mas não congruentes. Por isso, limitando-se a polígonos, a “igualdade de decomposição” seria a relação de equivalência compatível com a atividade de medição. No caso geral de figuras bidimensionais, a relação correspondente é a igualdade de áreas. Temos aqui um exemplo em que as ações recíprocas entre os conceitos matemáticos e as representações deles ou entre extensão (denotação) e intensão (sentido) dos conceitos não funcionaram por motivo de um “conceito de conceito” não completamente desenvolvido.