ISBN 978-85-89082-23-5

Computadores, Representações Múltiplas e a Construção de Idéias Matemáticas[1][2]

Marcelo C. Borba[3]

Introdução

Neste artigo discutirei como o uso de representações múltiplas afeta a educação matemática e como um estudante constrói conhecimento ao utilizar um aplicativo para funções com representações como tabelas, gráficos cartesianos, álgebra e calculadora. Usar representações múltiplas em educação matemática talvez não seja novidade. Vários professores já devem ter usado uma tabela para auxiliar seus estudantes (ou a si mesmos) no entendimento da noção de função, por exemplo. Nesse caso, em geral, se usam gráficos e tabelas como auxiliares do entendimento da expressão algébrica. Também, de uma maneira geral, essas representações auxiliares são postas de lado logo que possível para que se concentre em expressões algébricas. Vários autores (Confrey, 1992; Smith, Dennis & Confrey, 1992) argumentam que esse papel predominante e "isolacionista" da Álgebra na educação matemática ajuda a afastar vários estudantes da Matemática à medida que eles não conseguem associar significados desenvolvidos por eles em outros contextos a essas expressões algébricas.

Aplicativos, como Function Probe© (Confrey, 1991), que possibilitam a utilização de diversas representações com a mesma facilidade, dão chance ao educador e ao estudante de desenvolver atividades em que a Álgebra não seja predominante e em que as diversas representações sejam usadas em condições "mais igualitárias". Em uma das pesquisas em que usei esse aplicativo (Borba 1993, Borba & Confrey, 1993), um

[1] Digitalizado por Gustavo Barbosa e Paulo Roberto Vargas Neves.
[2] Apresentado em 30 de Março de 1993. Este artigo é um dos frutos de um projeto integrado de pesquisa patrocinado pelo CNPq (processo 520107/93-4).
[3] Departamento de matemática – Pós Graduação em Educação Matemática, UNESP – Rio Claro, SP. Em fase de publicação.

estudante, Ron[4], mostrou como ele construiu conhecimento usando as diversas representações do computador como extensão das suas representações. Ron usou seus conhecimentos prévios para lidar com as representações de Function Probe (FP) e ao mesmo tempo teve suas construções moldadas pelo desenho e limites do aplicativo numa relação "de moldagem recíproca" entre o computador[5] e Ron.

Este último parágrafo sugere duas noções: a primeira, que o computador traz mudanças para aquele que conhece Matemática; a segunda, que existe uma relação de moldagem recíproca (the intershaping relationship) entre média e aquele que conhece, que se move num círculo: representações, conhecer, conhecimento, representações. Para substanciar essas duas noções, discutirei parte do que foi feito por Ron. Antes, porém, descreverei as principais partes do aplicativo FP que foram utilizadas por Ron e sintetizarei os procedimentos metodológicos empregados nesta pesquisa.

O Aplicativo "Function Probe"

O aplicativo FP, como o nome sugere, lida principalmente com funções e no presente momento só pode ser usado com computadores Macintosh. Esse aplicativo tem três janelas: gráfica, tabelas e calculadora. Essas janelas se comunicam entre si e possuem alguns recursos algébricos. A janela gráfica permite que o usuário faça um gráfico através da expressão analítica da função, através de um "lápis" que permite que o gráfico seja feito como um desenho à mão livre, ponto a ponto, usando o mouse para tal fim ou ponto a ponto através de pares ordenados, armazenados na janela das tabelas ou através de uma função armazenada na janela da calculadora. Na coluna situada à esquerda da figura 1, podem se ver, de cima para baixo, os diversos ícones de FP que, quando ativados, desempenham as seguintes operações: a seta permite que um determinado gráfico seja selecionado dentre os muitos que porventura estejam grafados; o segundo ícone permite que uma expressão analítica como x^2 (x^2, na sintaxe do computador) seja grafada; o terceiro, que tem uma mão desenhada, permite que um

[4] Ron era, em 1992, um estudante de segundo grau, de dezesseis anos, de uma "High School" na cidade de Ithaca, NY, EUA. Ele já tinha lidado com funções, mas não de modo aprofundado. Tinha apenas sido apresentado a algumas funções, tema com o qual ele lidou nesse estudo.

[5] É claro que essa relação na verdade é entre os que desenharam o "software" e Ron. Mesmo que aqueles que desenvolveram o desenho do aplicativo não estejam presentes nesta relação, a sua intenção se encontra impregnada no aplicativo, em um sentido parecido, mas não igual àquele desenvolvido por Garnica (1992) ao estudar como um estudante interpretava um texto matemático.

ISBN 978-85-89082-23-5

ponto seja grafado e, em quarto, “o lápis”, de desenho que permite que um gráfico seja rascunhado a mão livre:

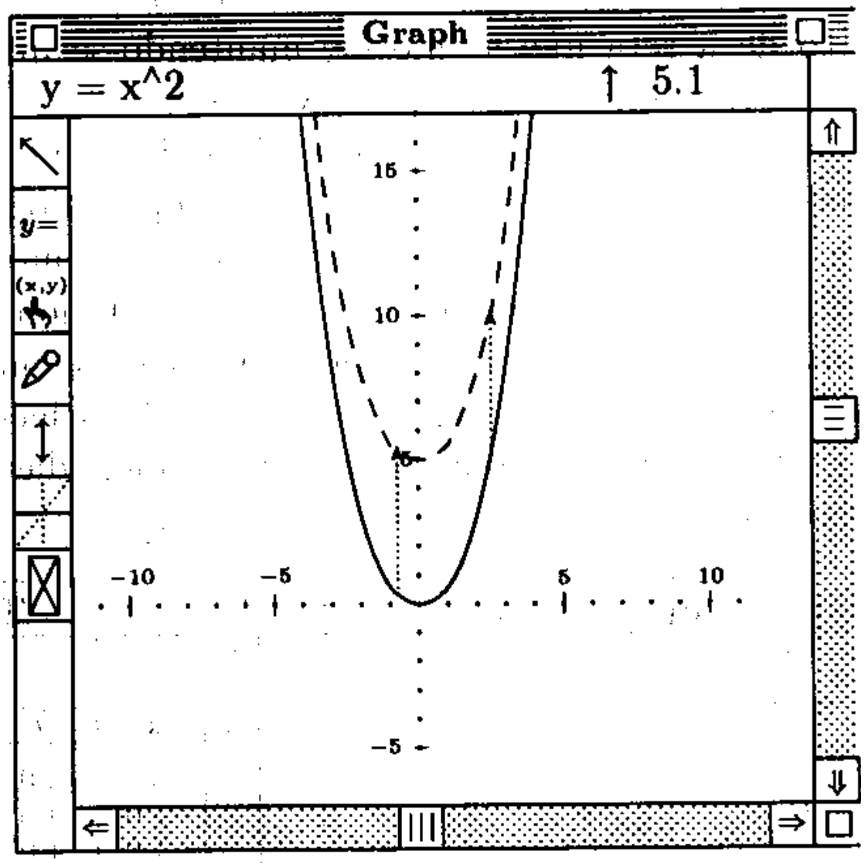

Figura 1 – Uma translação vertical de 5,1 unidades sendo executada em FP. Observe que, devido ao comando “esconder transformações” estar ativado, a expressão analítica do gráfico transformado não será mostrada. Caso se queira, pode-se fazer com que uma dada expressão seja mostrada.

Os três ícones da parte de baixo da coluna da esquerda permitem que transformações sejam feitas “diretamente” no gráfico. Usando o mouse, o usuário pode coordenar suas ações feitas neste mouse com as transformações no gráfico sem a utilização de equações ou tabelas. Nesse sentido o gráfico pode ser transladado vertical ou horizontalmente quando o ícone abaixo do lápis for usado (vide figura 1, por exemplo). O próximo ícone permite que o gráfico seja refletido em torno de qualquer linha vertical ou horizontal e em torno da linha $y = x$. Finalmente o último ícone permite que o gráfico seja esticado vertical ou horizontalmente. Esse esticamento pode ser feito, usando qualquer linha como a linha central do esticamento, que se torna uma linha de invariância nessa transformação. Essa linha É chamada de “ancora” no aplicativo devido ao fato de a reta não se mover, mantendo-se invariante, portanto, durante o esticamento realizado.

De um determinado gráfico, como $y = x^2$, podem-se selecionar pontos através de um comando que dentre diversas opções permite que em todo intervalo de "*m*" unidades no eixo dos "*x*" um ponto seja selecionado num dado intervalo. Por exemplo, pode-se selecionar o intervalo [–3,3] com $m = 1$, e isso levará o aplicativo a selecionar no gráfico os pontos (–3,9), (–2,4),... e (3,9). Esses pontos selecionados e em destaque no gráfico podem ser remetidos para a janela das tabelas onde aparecem como na figura 2.

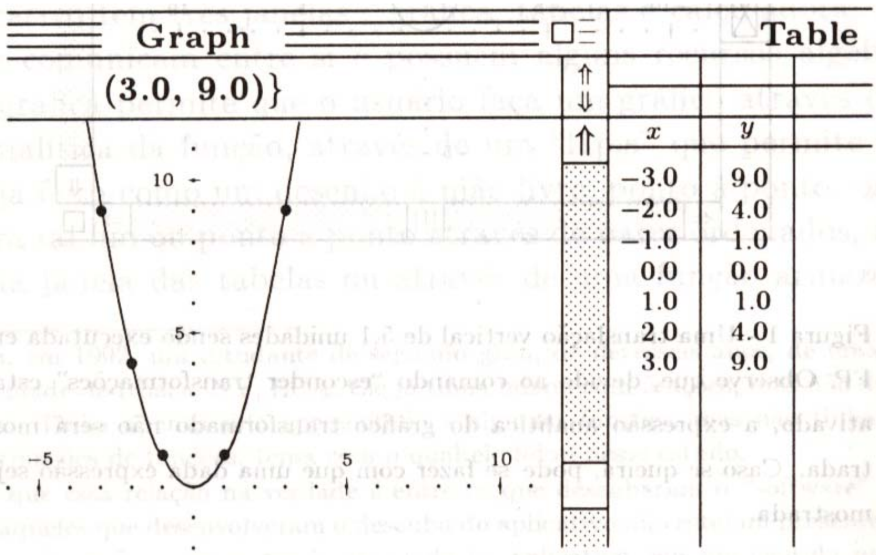

Figura 2 – Pontos selecionados na janela gráfica e remetidos para a janela da tabela.

A representação tabular pode ter inúmeras colunas, e os pontos podem ser preenchidos um a um ou através de algoritmos desenvolvidos pelo usuário. Também, se já houver uma coluna, como a coluna *x* na figura 2, uma nova coluna poderá ser gerada através de uma equação como $z = x + 3$, listando na coluna "z" os valores 0, 1, 2,... , 6. Se houver necessidade, as colunas "*x*" e "*z*" podem ser remetidas para o gráfico em forma de pares ordenados[6].

Breve Apresentação dos Procedimentos de Pesquisa

[6] A calculadora não será descrita aqui, visto que o estudante Ron não utilizou essa janela na parte que será discutida nesse experimento.

Essa pesquisa foi realizada de acordo com a metodologia "experimento de ensino" (Cobb & Stefle, 1983), que é uma variação da entrevista clínica de Piaget. No experimento de ensino (teaching experiment), é entendido que o entrevistador interage com o aluno, mesmo que não queira. Mais do que isso, a intervenção é vista como positiva, embora não seja esperado que a intervenção do entrevistador seja diretiva a ponto de ofuscar o pensamento do aluno. Em outras palavras, embora não se espere que o entrevistador direcione o raciocínio do aluno insistentemente com a sua agenda, é assumido que uma não intervenção, por parte do entrevistador, é impossível na medida em que as tarefas propostas "têm" a sua própria agenda que expressam a intenção daquele que desenhou estas tarefas.

Nesta pesquisa em particular, o entrevistador estava preparado para intervir, sem hesitação, em casos em que o desconforto do aluno com uma dada questão fosse muito grande e também estava preparado para propor ao aluno um retorno às questões relevantes do experimento de ensino, após um longo tempo em que o aluno tivesse investigado um dado caminho alternativo que não o estivesse levado a um caminho que o entrevistador entendesse como produtivo. É claro que a subjetividade destes critérios é imensa, e estas decisões, nesta pesquisa, foram tomadas no momento da entrevista ou no intervalo durante duas entrevistas, quando o entrevistador teve chance de assistir aos vídeo - tapes das entrevistas e refletir com o seu grupo de pesquisa sobre um determinado tema da entrevista.

No caso particular desta entrevista, o entrevistador é o autor desse artigo e continuará sendo assim chamado para que se possa estabelecer um distanciamento entre o pensamento refletido do pesquisador e o pensamento "do momento" do entrevistador. Como foi mencionado anteriormente, neste artigo lidarei com trechos das entrevistas de Ron, um aluno do 2º grau de Ithaca, NY, EUA. Ron foi entrevistado durante oito sessões de duas horas cada uma.

Nestas entrevistas, o tópico abordado foi transformações de funções. Transformações de funções são vistas como essenciais na medida em que problemas ligados à modelagem de uma dada situação podem ter seus parâmetros ajustados através de transformações se uma dada função "prototópica" ($y = x, y = x^2$, $y = sen\ x$, etc.) já foi escolhida como apropriada para descrever um dado fenômeno.

Nesse experimento, todavia, não foi usado um exemplo de modelagem. Trabalhou-se no que foi chamado de “contexto do Computador” (Borba, 1993), no qual o computador e o aplicativo são vistos como a situação que ajuda a dar significado à matemática que é construída para modelar uma dada situação. No caso do computador e de um aplicativo como FP, várias situações podem ser criadas com o intuito de gerar uma dada construção de conhecimento matemático. Entendo que, embora as situações de modelagem, no sentido comumente usado (Quiroga, 1990), sejam fundamentais para a educação matemática, na medida em que estabelecem relações entre matemática, no sentido restrito[7], e fenômenos, observados pelo que conhece no mundo que o “circunda”, não são suficientes para proporcionar aprendizagem matemática na totalidade de assuntos que tenho considerado importantes de ser abordados (Borba, 1993), Neste sentido, embora transformações de funções possam ser introduzidas e desenvolvidas através de modelagem matemática de um fenômeno estudado, as transformações de funções podem, em si, tornar-se o fenômeno a ser estudado, como no caso da pesquisa discutida neste artigo.

Tenho argumentado que, embora esse processo de modelagem seja importante, é artificial restringir toda a prática educativa em matemática a esta abordagem, na medida em que pode se tornar artificial estudar determinadas partes de matemática com essa abordagem. Embora o tema transformações de funções seja importante no processo de modelagem, como já se argumentou anteriormente, pode se tornar importante o aprofundamento deste tema, tornando-se ele próprio, então, o ponto central de uma investigação. Para um estudo como esse, o contexto do computador pode se tornar fundamental na medida em que possibilita a quebra da “hegemonia” das expressões algébricas, valorizando a visualização, o uso de pontos discretos e servindo de “apoio” para os significados que venham a ser dados por aqueles que venham a estudar estes temas.

Nesse sentido, os problemas desenhados por mim[8] para esse experimento de ensino foram baseados num modelo com três passos fundamentais. No primeiro, o estudante tinha que, usando apenas os ícones de transformação da janela gráfica, fazer

[7] Por sentido restrito eu quero me referir ao conjunto de expressões matemáticas que são vistas como objetos, expressões que foram criadas ao longo da história e que são re-criadas e transformadas elos significados atribuídos a elas ao longo da história.

[8] Esses problemas contaram com a determinante influência do grupo de pesquisa em Educação Matemática da Cornell University, em particular de Dr. Jere Confrey e Dr. Erick Smith.

com que um dos gráficos dados coincidisse com um segundo gráfico. Essa atividade visava basicamente engajar o aluno em um trabalho com transformações a partir de visualização e ações físicas (no mouse). O próximo problema exploratório convidava o estudante a estabelecer conexões entre a visualização e o discreto através da pergunta central: o que acontece com um determinado ponto desse gráfico quando este sofre uma determinada transformação (translação, reflexão e esticamento). Esse problema estimula o uso do selecionador de pontos (sampling command) e da remessa (send command) de pontos entre a janela gráfica e a tabular. O terceiro e último problema exploratório (que era seguido por outros 4 problemas menos abertos) estimulava o estudante a estabelecer conexões entre transformações gráficas e equações das funções escritas na forma $y = f(x)$. Nesse experimento foram usadas as "funções prototópicas" (Confrey & Smith, 1991) $y = x^2, y = |x|$ e $y = [x]$ devido à diversidade que elas podem proporcionar em problemas ligados a transformações e devido aos diferentes graus de familiaridade que os estudantes com os quais trabalhei tinham com as mesmas.

A experiência de Ron

Em seguida relatarei o modelo que construí acerca do pensamento de Ron em dois episódios nos quais ele lidou com os problemas apresentados a ele e/ou gerados por sua prática. O primeiro episódio ilustra como Ron teve tranqüilidade para lidar com o segundo problema exploratório. Esse segundo problema lidava com a relação entre visualização das transformações e efeitos em pontos distintos daquele gráfico, enquanto o primeiro lidava apenas com a coordenação das ações feitas no mouse e a visualização das transformações.

Neste segundo problema, Ron já tinha explicado, sem maiores obstáculos, o que aconteceria com um dado ponto de $y = |x|$ quando essa função é transladada. Em seguida lidou com reflexões e esticamentos para depois analisar a situação nas outras funções, quando gerou uma lei bastante abrangente, como veremos.

ISBN 978-85-89082-23-5

Ao trabalhar com reflexões, Ron estava nesse momento analisando a reflexão do gráfico de $y = |x|$ em torno de y = 10 (vide figura 3)[9].

Let's say the reflection line is at 10... Then at this point at 0 would reflect up to 20. A point at 10 would stay right where it is. A point at 5 would reflect up to 15. And you can… I guess the formula for that would be you take the y – value that you have, you subtract 10, multiply by negative 1, and then you add your 10 back in. [3:11]

Na primeira parte do trecho acima, Ron parece estar usando um modelo visual de pensar: um ponto que estava em 5 seria refletido para 15, e o ponto da linha de reflexão ficaria onde está. Depois, Ron rapidamente mudou de enfoque, embora também tivesse suas raízes em pensamento visual: ele disse que 10 seria subtraído de todos os pontos, o resultado seria multiplicado por –1 e depois 10 seria adicionado ao resultado.

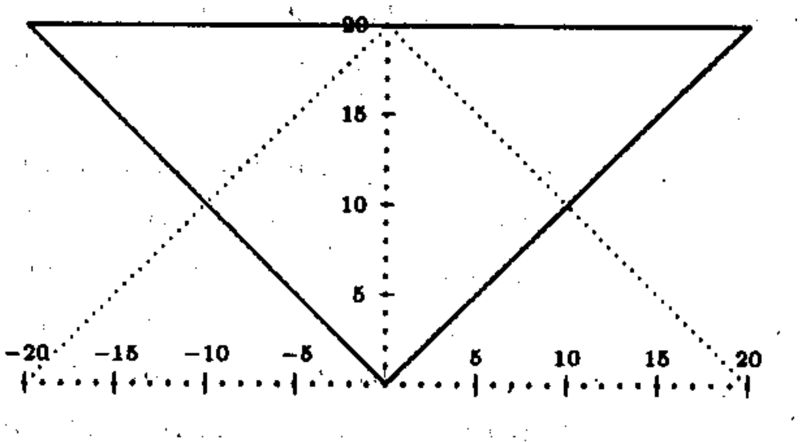

Figura 3 – $y = |x|$, pontos selecionados no gráfico e a reflexão desses pontos na linha y = 10. A linha horizontal na parte superior da figura e o limite da janela gráfica.

Além disso, ele não teve problema para descrever o que estava acontecendo nas "equações de co-variação"[10]. Ele escreveu a fórmula

[9] As citações foram deixadas no seu original em inglês para que não se perca o discurso de Ron. A notação [3:11] na citação significa que ela está localizada na página 11 da transcrição do dia 3 de entrevistas.

[10] Eu usei o termo equações de co-variação (co-variational equations, ou talvez funções de co-variação para me referir ao que Doug (outro estudante entrevistado, vide Borba, 1993) e Ron com seus estilos diferentes, usaram para expressar as mudanças, tanto nas ordenadas quanto nas abcissas, quando um gráfico era transformado vertical ou horizontalmente. Essa terminologia é altamente influenciada pelo trabalho de Rizzuti (1991) que usou o termo co-variational view of function para se referir a um modo de ver funções que é bastante influenciado por tabelas. Essa terminologia co-variational equation foi o

$$(y[-10]\cdot(-1)[10])$$ [dia 3: rascunho]

Que pode ser interpretada como

y' = (*y* – 10) * (–1) + 10 (LEI Nº 1)

onde *y'* é a ordenada *y* refletida com a linha de reflexão colocada em +10. Quando Ron estava escrevendo a fórmula acima, ele deixou clara a generalidade de sua regra. Ele disse, ao responder a uma das perguntas do entrevistador, que "*y* minus 10 times negative one plus 10... the subtract 10 brings the line down. . . Then the –1 flips it over the x axis and the +10 moves it all back up where it should be" [3; 11]. Pode-se notar que, embora Ron estivesse trabalhando com um número especifico, ele tinha um modelo visual que dava generalidade ao que ele estava investigando.

Ron tinha, então, pelo menos um modelo visual que parecia coordenado com a álgebra que ele tinha desenvolvido no seu rascunho. Ele estava tão confiante nesse modelo que não viu necessidade de conferi-lo no FP. Só diante da usual insistência do entrevistador, Ron usou a tabela para gerar pontos e mandá-los para a janela gráfica (veja figura 3), ressegurando a si mesmo que o que escreveu estava correto.

Tentando testar o conhecimento de Ron, o entrevistador se portou como o "advoga do diabo" perguntou a Ron por que o vértice foi deslocado em 20 unidades, se o modelo algébrico parece sugerir que o deslocamento deveria ser de 10 unidades. A pergunta não confundiu Ron de forma alguma: "That's because when you bring this: [the graph of $y=|x|$] down it [the vertex] goes to –10 not zero. This slide down here [–10], you reflect it so it goes up to 10 you add 10 so it goes up to 20". [3:14]. Ron parecia expressar uma "perfeita" integração entre "leis visuais" e álgebra. Deve ser notado, entretanto, que essa harmonia se restringe a ele ter achado um modelo visual para o seu modelo algébrico original. O seu modelo visual original (vide primeira citação neste item), que trabalhava com simetria em torno da reta y = 10, não teve uma contrapartida algébrica para explicá-lo.

Ron parece ter-se esquecido desse modelo de simetria e focalizou sua atenção em generalizar a Lei Nº 1, substituindo 10 por T e escreveu

$$(y[-T])\cdot -1[+T])$$ [dia 3: rascunho]

primeiro publicado em Borba (1993). Um exemplo pode facilitar o entendimento desta noção: a uma translação horizontal de 5unidades para a direita estão associadas às equações *y'* = *y* e *x'* = *x* + 5 onde *y'* e *x'* são as coordenadas resultantes da transformação efetuada.

ISBN 978-85-89082-23-5

que pode ser interpretada como

$$y' = (y - T)*(-1) + T \text{ (LEI Nº 2)}$$

Nas investigações de esticamento que se seguiram às de reflexoes, Ron generalizou sua experiencia anterior: “it’s basically the same equation [the one described in the paragraph above]” [3:17]. Ele explicou esta frase, afirmando que se pode ver a âncora de forma semelhante à em que ele viu a linha de reflexão. Ele também nos teve problema em dizer que a operação relacionada à esticamentos era a multiplicação, mesmo que ele não pudesse explicar o porquê de tal fato. Ele, também, como forma de relacionar esticamentos e reflexões, afirmou que “if you have a stretch by –1, that it’s the same as a reflection” [3:18] o que, dentre outras coisas, o fez mais confiante nas fórmulas que estava desenvolvendo.

Para exemplificar o que disse, Ron afirmou que num esticamento de 3 unidades (multiplicativas) com a âncora na linha $x = 5$: “you subtract 5, which is where the anchor line is, from all the values... from all your x–values, you multiply your x–value by 3, and then add 5 to move it back over here”. [3:19]. Ron mostrou uma compreensão global do processo, inclusive generalizando as mudanças que estavam acontecendo por uma fórmula que poderia ser escrita desta forma: $x' = (x - a)s + a$ (onde “s” é o fator de esticamento, e “a”, a posição da ancora)[11]. Na sentença acima, utilizei a expressão generalizando, apesar de ele ter usado um exemplo específico, porque me pareceu que a explicação dele poderia ser aplicada sem problemas a outros valores, na medida em que os valores usados por ele não eram “pontos especiais”. Pontos Especiais são pontos, como o vértice de um gráfico ou o ponto onde o gráfico intercepta a âncora, onde as relações entre os pontos originais e “pontos transformados” são mais facilmente percebidas.

O segundo episódio aconteceu somente na entrevista seguinte. Nesse momento Ron estava investigando a relação dos coeficientes de $y = ax2 + bx + c$. Em particular, ele estava buscando entender o que aconteceria com o “c” quando ele fizesse uma Translação Horizontal (TH) de 5 unidades para a direita. Ele tentava desvendar uma problemática que o vinha incomodando demasiadamente desde o inicio da entrevista. Ele tentava relacionar “c” a uma dada transformação. Ron nesse momento disse: “... I

[11] Ron não escreveu a fórmula dessa forma. Isso é minha interpretação da explicação que ele deu e das notas feitas por ele no rascunho.

ISBN 978-85-89082-23-5

know an easy way to find out what *c* will be... Just substitute... do the formula that I did [Fórmulas decorrentes das Leis 1 & 2] *y* so *x*, *x*2 ++... I think this Will work... 3*x* + 5, and the thing… transformation was to the right by… it's (*x* + 5)2 + 3(*x* + 5) + 5" [4:18]. Ele escreveu o que ele pensava que seria uma fórmula algébrica para uma TH de 5 unidades para a direita: "(*x*, *x*2 + 3*x* + 5) $\rightarrow$ (*x* + 5)2 + 3(*x* + 5) + 5" [dia 4: rascunho]. Em seguida ele desenvolveu o polinômio acima e chegou a "(*x* + 5, *x*2 + 13*x* + 45)" [dia 4: rascunho]. Esse resultado dava *c* = 45, e ele rapidamente notou que o resultado achado era diferente do que ele tinha previamente encontrado, usando apenas os ícones da janela gráfica do computador (*c* = 15).

Até esse momento o comando "esconder transformações" estava ligado, o que significa dizer que a expressão algébrica das funções transformadas não estava aparente na janela gráfica, e o entrevistador achou que era hora de mostrar a sintaxe usada por FP para a translação de 5 para a direita: $(x-5)^2+3(x-5)+5$. Ron se espantou com o que viu e não conseguiu uma explicação para o ocorrido. Parece que nesse momento ele estava experimentando uma tensão entre uma "álgebra das tabelas" e uma "álgebra dos gráficos". Por exemplo, em uma tabela é bem razoável ver uma TH de *5* sendo expressa pela expressão *x'* = *x* + 5, onde *x* é a coordenada original, e *x'*, a transformada. No gráfico cartesiano as relações algébricas estão dadas através da forma *y* = *f(x)*. Neste caso particular, FP estava escrevendo a função na forma *y* = *f(x* – 5).

Esta tensão discutida deixou Ron com um dilema para resolver: FP mostrou um resultado gráfico que ele estava convencido de estar correto e uma expressão analítica da função que ele provavelmente acreditava estar certa devido à autoridade do computador, mas não conseguia nem repudiar nem explicar o resultado. Ele criticou FP, na medida em que ele achava que, se o programa fosse mais flexível e aceitasse equações do tipo *y – a = f(x), o* problema por ele encontrado na aconteceria: "if this could plot *x* + 5 instead of *x*, it's plotting all these functions onto *x*, because that's how a function works... I want to plot a function on *x* + 5" [4:23]. Ele parecia pensar que, se pudesse fazer entrar no computador *f(x* +5), resolveria também o seu problema. Não estava claro se ele se referia a *f(x* + 5*)* ou a *y* – 5 = *f(x).* A primeira FP pode "executar", como foi dito acima, mas não pode executar nem *y* – 5 = *f(x)* ou *f(y)* = *x.* De qualquer modo, a tensão vivida por Ron ilustra como que a discrepância entre representações –

ISBN 978-85-89082-23-5

álgebra das tabelas e álgebra do gráfico[12] – pode gerar instabilidade e/ou futuras investigações.

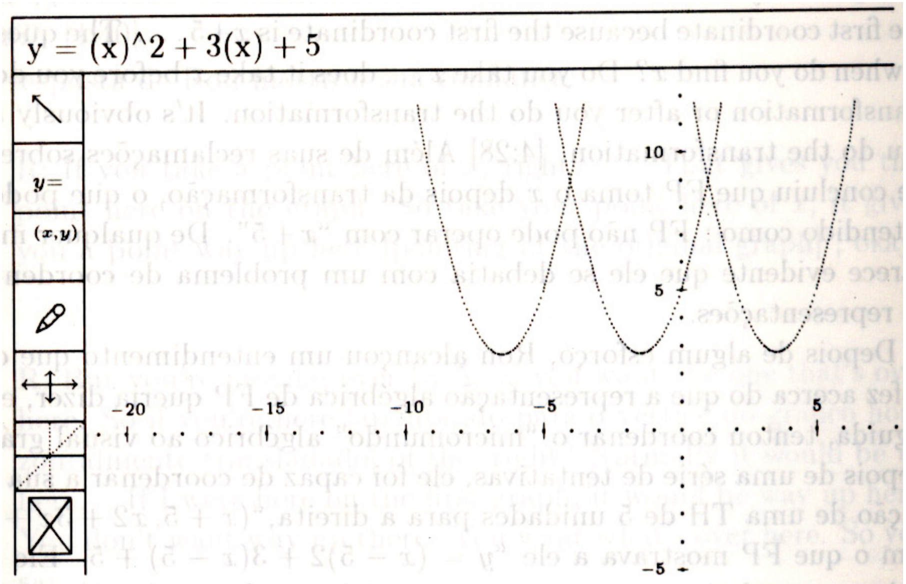

Figura 4 – Da esquerda para a direita $y = (x+5)^2 = 3(x+5)+5$, $y = x^2 + 3x + 5$ e $y = (x-5)^2 + 3(x-5) + 5$. A equação mostrada é a do gráfico central que foi “selecionado”.

De qualquer forma, Ron estava convencido de que o cálculo algébrico que o levou a achar *c* = 45 estava certo, ao mesmo tempo em que estava “balançado” pela expressão algébrica do gráfico transladado, mostrada por FP. Momentos depois, Ron foi capaz de ligar o seu pensamento visual anterior de TH com a sintaxe algébrica de FP. Apontando para os gráficos de *y* = x2 + 3*x* + 5 e *y* = (*x* – 5)2 + 3(*x* – 5) + 5 (veja figura 4), ele opinou que o segundo gráfico teria 5 subtraído de suas abscissas de tal forma que essa abscissa (subtraída), mantivesse a mesma ordenada do ponto antes de ser transladado. Entretanto, ao ser perguntado se ele estava satisfeito com essa explicação, Ron respondeu que “my logic isn’t finished... because this is *x* + 5” [4:26]. Em seguida Ron reclamou mais uma vez do desenho de FP:

“*x* is usually considered to be the first coordinate... But here, *x* is not the first coordinate because the first coordinate is *x* + 5... The question is when do you find *x*? Do you take *x*... does it take *x* before you do the transformation or after you do the transformation. It’s obviously after you do the transformation” [4:28]. Além de suas

[12] Com a expressão álgebra da tabela eu quero me referir ao que anteriormente foi denominado equações de co-variação. A álgebra do gráfico é a álgebra decorrente do emprego da usual forma *y = f(x)* para expressar funções.

ISBN 978-85-89082-23-5

reclamações sobre FP, ele concluiu que FP toma o x depois da transformação, o que pode ser entendido como: FP não pode operar com "$x + 5$". De qualquer modo, parece evidente que ele se debatia com um problema de coordenação de representações.

Depois de algum esforço, Ron alcançou um entendimento que o satisfez acerca do que a representação algébrica de FP queria dizer, e, em seguida, tentou coordenar o "micromundo" algébrico ao visual gráfico. Depois de uma série de tentativas, ele foi capaz de coordenar a sua descrição de uma TH de 5 unidades para a direita, "$(x + 5, x2 + 3x + 5)$", com o que FP mostrava a ele "$y = (x – 5)2 + 3(x – 5) + 5$. Ele concluiu que poderia reescrever o seu modelo na forma $(x, f(x – 5))$ e $(x, (x – 5)2 + 3(x – 5) + 5)$ porque

"It's like this... you translate by 5 and you get $(x + 5, f(x))$. …Then you subtract 5 [from each side] $x + 5 – 5$, so it's $x – 5$… will give you $(x, f(x – 5))$ there... [because] you want x to be the same, so you do $(x, f(x – 5))$ [4:37][13].

É possível notar que o raciocínio de Ron pode ser justificado, se pensarmos naquela expressão como equações paramétricas. Neste sentido, $(x + 5, x2 + 3x + 5)$ pode ser mudado para a forma $y = f(x)$ se $x' = x + 5$ em uma TH de +5 (as ordenadas não se modificam) e levarmos em conta $y = x2 + 3x + 5$. Da primeira equação, pode-se concluir que $x = x' – 5$ e, substituindo-a na segunda, pode-se obter $y = (x' – 5)2 + 3(x' – 5) + 5$ que é equivalente a $(x', f(x' – 5))$ ou, como proposto por Ron, $y = f(x')$.

Em seguida, o entrevistador, mais uma vez assumindo o papel de "advogado do diabo", resolveu provocá-lo: "What I want to know now is when you look at these two here (os dois gráficos mais à direita da figura 4)... How on earth it's not $x + 5$ and it is what the computer shows?" [4:40].

A reposta de Ron mostrou sua confiança:

> R: If you take a point here of x, right? ... That gives you this point here on the graph. So take your point here of x, it gives you a point way up here [pointing at the original graph], okay?

[13] Ron estava pensando em voz alta e escrevendo ao mesmo tempo. Nesta citação, a sua fala é representada usando expressões algébricas que ele de fato escreveu no seu rascunho do dia 4.

ISBN 978-85-89082-23-5

R: But you're moving over by 5, so you want the one that's over here. So if you're here [apontando para o vértice do gráfico horizontalmente transladado] of the, right? Normally it would be up here.., If I were here on the first graph, it would be way up here. You don't want way up there. You want what's over here. So you say…

R: What; you want is transformation by 5, so you want what's over here, you don't want something way up there. E So, you just take a sample of what's over here, so you move back 5 and see what's there and that's what you put down instead of putting that [4:40-41].

Ron também parecia não ter mais problemas com a coordenação da TH de 5 unidades e a expressão "*x* – 5". Usando uma linguagem visual, Ron explicou a necessidade de subtrair 5 unidades para que um ponto transladado mantivesse a mesma imagem da abscissa original. Parece que ele não só conseguiu explicar aquela situação, como também conseguiu coordenar a álgebra da tabela com a álgebra do gráfico, como mostra a tabela abaixo.

•	•		
x	y	$m = x + 5$	$n = (m - 5)23(m - 5) + 5$
-5.0	15.0	0.00	15.00
-4.6	12.4	0.40	12.36
-4.2	10.0	0.80	10.04
-3.8	8.0	1.20	8.04
-3.4	6.4	1.60	6.36
-3.0	5.0	2.00	5.00
-2.6	4.0	2.40	3.96
-2.2	3.2	2.80	3.24
-1.8	2.8	3.20	2.84
-1.4	2.8	3.60	2.76
-1.0	3.0	4.00	3.00

Figura 5 – A tabela de Ron: Estabelecendo relações entre "álgebras diferentes"

Na medida em que Ron ganhou mais confiança, ele reassumiu o controle das investigações e disse que sabia o que fazer em seguida. Ele escreveu no seu rascunho *y*

= (x – 5)2 + 3(x – 5) + 5 da seguinte maneira: $x2$ – 10x + 25 + 3x – 15 + 5. Em seguida, comparou esse resultado com a expressão original y = x2 + 3x + 5. Dessa comparação, criou uma estratégia geral pela qual poderia transformar qualquer equação da forma y = ax2 + bx + c em uma nova equação y = a'2 + b'x + c', para uma transformação de T unidades na primeira equação:

$$\text{novo } c = c - T \bullet b + T^2 \bullet a$$
$$\text{novo } b = b - T \bullet 2$$
$$\text{novo } a = a$$

[dia 4: rascunho de Ron] (regra para coeficientes)

Ron pôde generalizar mudanças nos coeficientes, baseado na experiência que acabava de ter ao coordenar a álgebra da tabela com a álgebra do gráfico. Não há a menor indicação, todavia, de, que essa generalização estava ligada ao raciocínio visual também recentemente desenvolvido por ele (uma TH de +5 levaria a uma mudança do tipo x – 5). Sugere, todavia, que Ron, que se autodenominou uma pessoa algébrica duas vezes durante as entrevistas, se sentiu mais à vontade ao se basear estritamente em álgebra por si mesma.

Esse episódio sugere como a frustração de Ron com FP se tornou uma nova problemática a partir de sua interação com o entrevistador. Também ilustra como discrepâncias entre representações podem se tornar “alavancas epistemológicas” (Borba, 1993) que geram novos conhecimentos até que a discrepância fosse superada e substituída por uma nova maneira de coordenar diferentes representações. Perguntas feitas pelo entrevistador ao final do episódio relatado levaram Ron a novas investigações, que não serão discutidas neste artigo, sugerindo como num ambiente de representações múltiplas as discrepâncias entre representações servem como alavancas epistemológicas.

Considerações finais

Neste artigo foi apresentado urn modelo desenvolvido por mim sobre como Ron lidou com os obstáculos surgidos diante dele. Pode-se ver que ele não teve dificuldades em lidar com a coordenação entre gráficos e pontes discretos, como foi ilustrado no primeiro episódio. A sua pouca experiência com a álgebra da tabela naquela ocasião talvez explique por que ele tentou no segundo episódio aplicar “mecanicamente” sua experiência anterior ao problema de coordenar a TH de 5 unidades para a direita com expressões analíticas da forma $y = f(x)$.

Esses dois episódios aqui discutidos dão suporte à idéia de que as representações “têm vida própria”. Em outras palavras, algo conhecido é representado, e é conhecido através de uma representação e de uma média que molda o que se conhece (Borba, 1993), não se podendo, pois, pensar em representações como “bolsas neutras de armazenamento de informações”. O desenvolvimento da álgebra da tabela mostra como essa “vida própria” interage com a educação matemática, ou seja, a álgebra da tabela se apresenta como importante para a educação na medida em que decompõe as mudanças em “*x*” e “*y*”, permitindo uma “perfeita” coordenação com as ações feitas no mouse. Essa mesma álgebra, que parece importante para o estudo de transformações, pode se tornar um obstáculo em um certo ponto, como ela se tornou para Ron, de acordo com o discutido no segundo episódio. Essa vida própria que a álgebra da tabela ganhou em outra representação se tornou uma alavanca epistemológica para Ron, na medida em que gerou novas problemáticas para ele como a que foi relatada no segundo episódio.

Pode-se notar também que o uso da visualização coordenado com o uso da tabela e da álgebra pode ser uma alternativa para modelos onde a álgebra ocupe um papel predominante. O uso da tabela e de visualização, que talvez tenha sido “asfixiado” na educação matemática pela álgebra, pode encontrar em currículos, como os que foram desenvolvidos nesse estudo, uma alternativa ao monopólio da álgebra na educação matemática.

Esses dois episódios também ilustram uma faceta de como representações e conhecimento se articulam. Ron, que tinha conhecimento prévio sobre vários aspectos da matemática e de computação, depara com novidades no então desconhecido aplicativo. As representações de FP “interagem” com as representações que Ron tem do que é e de como funciona a matemática. Essa interação leva Ron a construir novo conhecimento e mais uma vez agir sobre as representações do aplicativo, que se tornam então parte da sua cognição. Neste círculo de moldagem recíproca, Ron moldou o aplicativo e usou suas representações de maneira pessoal, e esse aplicativo também moldou o pensamento de Ron e a maneira como ele viu transformações de funções. Como foi ilustrado neste artigo, as representações do aplicativo usado no computador abriram possibilidades e limitaram Ron e as representações que ele tinha como fruto de sua experiência.

Referências

BORBA, M. C. **Students' understanding of transformations of functions using multi-representational software.** Tese de Doutoramento, Cornell University, Ithaca, Nova Iorque, EUA, 1993.

BORBA, M. C.; CONFREY, J. **The Role of the Teaching Experiment: Students' Construction of Transformations in a Multiple Representational Environment.** Trabalho apresentado no encontro anual do American Research Association of America (AERA) em Atlanta, Georgia, USA, Abril 12-16, 1993.

COBB, P.; STEFFE, L. **The constructivist researcher as teacher and model builder.** In: Journal for Research in Mathematics Education, 1993, 14(2), pp. 83-94.

CONFREY, J. **Using computers to promote students' inventions of the function concept.** In: S. Malcom, L. Roberts, and K. Sheingold (ed.). This year in school science. Washington D. C.: American Association for the Advancement of Science, 1992, p. 141-174.

CONFREY, J. **Function Probe© [computer program],** Santa Barbara, Ca, USA : Intellimation Library for the Macintosh, 1991.

CONFREY, J.; SMITH, E. **A Framework for functions: Prototypes, multiple representations, and transformations.** In: Proceedings of the Thirteenth Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education, Vol I, Outubro 16-19, Blacksburg, VA, USA, 1991, p. 57-63.

GARNICA, V. **A interpretação e o fazer do professor: a possibilidade do trabalho hermenêutico na educação matemática.** Dissertação de Mestrado, UNESP - Rio Claro, SP, 1992.

RIZZUTI, J. **Students' conceptualizations of functions: Effects of a pedagogical approach involving multiple representations.** Unpublished dissertation, Cornell University, Ithaca, NY, USA, 1991.

SMITH, E.; DENNIS, D.; CONFREY, J. **Rethinking functions: Cartesian Constructions.** Artigo apresentado na Segunda Conferencia Internacional de História e Filosofia da Ciência para o Ensino de Ciências, Kingston, Ontário, Canadá, 11-15 de Maio, 1992.

ANASTACIO, M. Q. **Considerações sobre a modelagem matemática e a educação matemática.** Dissertação de Mestrado, UNESP - Rio Claro, São Paulo, 1990.