Bolema, Rio Claro (SP), Ano 20, nº 28, 2007, pp. 39 a 67

Primeiro Ano num Curso de Matemática: a definição de função e a dualidade local/global em conceitos de Cálculo

First-year in an Undergraduate Mathematics Program: the function definition and the local/global duality of Calculus concepts

Antonio Olimpio Junior[1]

Resumo

Com base numa pesquisa sobre compreensões de conceitos de Cálculo Diferencial, conduzida com alunos ingressantes em um curso de Matemática de uma universidade pública brasileira, o artigo destaca a dualidade local/global como uma das dinâmicas essenciais a serem exercitadas e exploradas no tratamento de conceitos como o de derivabilidade, no contexto do primeiro ano de um curso de Matemática. Além disso, sugere que a exploração de uma particular definição de função " mais adequada às demandas educacionais em tal contexto " poderia contribuir para descristalizar e ampliar percepções construídas ao longo Ensino Médio, estimulando a fluidez na dinâmica supra-referida.

Palavras-chave: Compreensão. Cálculo. Derivabilidade. Função. Dualidade Local/Global.

Abstract

Drawing on research on understandings of differential calculus concepts conducted with first-year undergraduate mathematics majors enrolled in a Brazilian public university, the article highlights the local/global duality as one of the essential dynamics to be exercised and explored when dealing with concepts like differentiability in a context of a

[1] Mathematics Department, Syracuse University. Endereço para correspondência: 205 Carnegie Building - Syracuse, NY 13244, USA. email: aolimpio@syr.edu.

first-year undergraduate mathematics program. Moreover, it suggests that the exploration of a particular definition of function “ more suitable for the educational demands in such a context “ could contribute to decrystallize and broaden perceptions formed during high school, stimulating fluidity in the aforementioned dynamics.

Keywords: Understanding. Calculus. Differentiability. Function. Local/Global Duality.

A pesquisa em Educação Matemática no Ensino Superior é uma área de interesse emergente (RASMUSSEN et al., 2005). Caracterizada por configurar um quadro tradicionalmente desafiador para o estudante que ascende a este nível educacional, a aprendizagem do Cálculo tem sido responsável por boa parte desse interesse, uma vez que a disciplina, além de onipresente nos primeiros anos dos cursos, é uma das principais fontes de desestabilização da visão estática que o estudante tem sobre a Matemática e de perturbação de convicções construídas ao longo dos anos pré-universitários. Como consequência desses processos, novas e desafiadoras dificuldades são geradas, tanto para a aprendizagem quanto para o ensino. No caso específico dos cursos de graduação em Matemática – quer seja licenciatura ou bacharelado – é possível que tais dificuldades sejam até maiores, na medida em que a orientação implementada no ensino da disciplina tende muitas vezes a privilegiar abordagens menos procedurais e mais teóricas (uma configuração pouco usual para o neófito), embora nem sempre necessariamente com o objetivo de estimular a compreensão conceitual.

É óbvio que tais responsabilidades não podem ser atribuídas exclusivamente ao Cálculo, uma vez que as demais disciplinas nesse contexto também contribuem de alguma maneira para os processos de desestabilização de visões e de perturbação de convicções. Contudo, o Cálculo (I), além de situado no primeiro semestre do curso, materializa o primeiro contato formal do aluno com conceitos “escorregadios”, como os de limite ou de derivada, cujas dinâmicas demandam uma compreensão mais sólida, ampla e refinada sobre um outro conceito fundamental: o conceito de função.

Inspirado por esta visão, neste artigo eu utilizo um episódio tematizando o conceito de derivabilidade “ construído em Olimpio (2006) como parte de uma pesquisa conduzida com ingressantes de um curso de

Matemática " como motivação para discutir alguns aspectos dessa iniciação do graduando em Matemática à matemática universitária e para sugerir que a exploração de uma definição particular de função poderia estimular a percepção do estudante sobre a dinâmica local/global, dualidade essencial a vários conceitos de Cálculo (e da Matemática em geral), mas que tem sido pouco explorada na pesquisa em Educação Matemática em contextos similares.

O primeiro semestre em um curso de Matemática

Ao ingressar no primeiro ano de um curso de Matemática o aluno entra em contato com um mundo matemático "novo", às vezes familiar e às vezes bastante estranho. É plausível que ele se depare logo no primeiro dia com uma disciplina chamada Geometria Analítica (com tratamento vetorial). Discute-se ali, inicialmente, adição de vetores e multiplicação de escalar por vetor em espaços denominados de $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$ sobre uma entidade curiosamente chamada de corpo **R.** Neste caso, dependendo do professor, é possível que uma referência explícita a corpos não seja mencionada. Embora para uma boa parte desses alunos os conceitos mencionados sejam novidade, o fato de tais espaços serem passíveis de representações "visíveis" no "mundo real" ameniza um pouco o desconforto inicial.

A mesma sorte não terá o aluno que já no primeiro semestre se defrontar com um curso de Álgebra Linear clássico. Neste contexto é possível até que os tópicos iniciais sejam razoáveis, quando, por exemplo, a discussão abordar uma introdução às matrizes, sistemas lineares e, às vezes, ao determinante. Dependendo da abordagem, haverá alguns procedimentos novos ao se lidar com matrizes, com resolução de sistemas lineares, etc. Tudo parecerá bastante mecânico, os significantes serão muitos, mas os significados apreendidos modestos. Nada, no entanto, que para o estudante seja surpreendente: afinal trata-se de Matemática... Mas haverá, também, as compensações: a sensação de estar acompanhando (quando tudo corre bem) o roteiro e de estar "sabendo fazer algo" que certamente será cobrado na próxima prova. Algumas semanas depois, ele já terá feito alguma avaliação sobre esses conteúdos e possivelmente até obtido um resultado razoável.

Chegará, então, a hora do próximo capítulo: Espaços Vetoriais. Ali não haverá mais concessões: após alguma discussão e alguns exemplos, o professor escreverá no quadro:

Definição: Um espaço vetorial V sobre um corpo K é...

E listará os respectivos axiomas. A princípio não haverá muita (ou nenhuma) novidade nas proposições apresentadas: Em alguns momentos de sua vida escolar, o aluno já fora apresentado às propriedades da comutatividade, associatividade, etc. das operações usuais de adição e de multiplicação. Haverá até um axioma curioso, cuja leitura não raramente induzirá um sorriso quase impossível de ser contido: *Existe* $1 \in K$ *tal que, para todo* $v \in V$, $1v = v$. Tudo parecerá um tanto supérfluo: afinal, é "óbvio" que essas propriedades são válidas!

Mas deverá estar tudo bem. Quase toda a turma prestará seriamente a atenção no que o professor diz e parecerá concentrada no assunto. Haverá silêncio e uma certa deferência, além do clima de expectativa: afinal, a expressão *Espaço Vetorial* nunca fora ouvida antes e como tal ainda exercerá um certo fascínio. Além disso, o professor falará do conceito e dos axiomas com naturalidade, intimidade e, claro, achará muito interessante passagens que parecerão "óbvias". No final da aula, no entanto, haverá um certo anti-clímax: e daí?

Bem, será hora de começar a se acostumar com novos conceitos e com o método matemático, com suas definições, teoremas, demonstrações e – mais importante –: preparar-se para ir rompendo os condicionamentos construídos ao longo dos anos pré-universitários, porque, neste contexto, às vezes 0 não será menor do que 1 e 2 e 2 não será igual a 4... Bem-vindo ao curso de Matemática!

Mas, retornemos à primeira semana de aulas. A aula de GA (Geometria Analítica) terminou, o intervalo também, e a expectativa aumentará porque "ela" está chegando: sim, será ministrada a primeira aula da disciplina mais famosa e também a mais temida, já que as estórias contadas nos corredores pelos veteranos sugerem dias nublados, com previsão de tempestades ao longo do período e é praticamente certo que haverá "desabamentos" no final do ano... Para aqueles que acham tais estórias um pouco exageradas, basta que o pessoal da secretaria do departamento de Matemática tenha esquecido de retirar do edital as listagens com as notas do ano (ou do semestre) anterior. Neste caso, não haverá mais ilusões: até mesmo os calouros mais céticos ficarão convencidos da veracidade dos testemunhos, pois os dados são frios e diretos: aproximadamente metade da turma fora reprovada, se tudo ocorreu como de costume...

Finalmente, chegará o momento da primeira aula de Cálculo I e a excitação aumentará. Surpreendentemente, no entanto, os temas tratados parecerão mais ou menos familiares, exceto se o professor resolveu começar o curso listando os axiomas daquele objeto de nome curioso: o *corpo* (ordenado e completo) dos números reais. Mesmo que ele tenha optado por esta abordagem, a princípio a listagem dos axiomas não causará muitas surpresas, dada sua "obviedade". Em seguida serão apresentados os intervalos de números reais, equações e inequações serão resolvidas e algumas noções de Geometria Analítica Plana serão discutidas.

Nas aulas seguintes a definição de função como uma relação será apresentada. Tal definição, ainda que formal, também não será novidade, o mesmo ocorrendo com os exemplos de funções que começarão a ser discutidas, a maioria delas já vistas no Ensino Médio ou no cursinho pré-vestibular por boa parte da turma. Além disso, mesmo para aquelas funções não muito familiares, os procedimentos para o esboço dos gráficos respectivos parecerão similares aos que já foram vistos em vários momentos no passado: bastará escolher alguns números "bons" no eixo x, substituí-los na expressão dada por f(x), marcar os respectivos pontos no plano cartesiano e ligá-los com uma linha que pareça "razoável".

As aulas vão se sucedendo, assim como o conteúdo da disciplina, até que chegará algo realmente novo para a maioria: Limite! Haverá uma leve excitação pela novidade, mas que logo em seguida será substituída por uma sensação de desconforto: as "coisas" estão se mexendo, os pontos estão se movendo, estão tendendo..., podendo aproximar-se ou distanciar-se "tanto quanto se queira?!" O que até então era estático, estável, de repente, começará a "escorregar". O x, a famosa incógnita de uma equação, apesar de muitas vezes difícil de ter seu valor encontrado, pelo menos antes estava "parada"! Bastava saber, ou chegar, à "fórmula certa" e estaria tudo resolvido.

Dependendo da "ousadia" do professor, a definição de limite será apresentada logo em seguida, mas a esperança de que seja esclarecedora cairá logo por terra, dada a complicada sequência de símbolos envolvendo e e d, que parecerá, literalmente, grego... Passado o impacto inicial, finalmente surgirá um procedimento razoável. Parecerá familiar, bem definido e ser um dos grandes objetivos de toda a discussão: calcular o limite de uma função f num ponto a, nos casos mais "interessantes", resumir-se-á em descobrir uma maneira de "substituir o a em f(x)" sem que um tal procedimento implique na emergência de irritantes quocientes com denominador nulo. Em outras palavras, a idéia será conhecer e aplicar truques adequados de manipulação algébrica que permitirão "eliminar" tais inconveniências. A questão da existência ou não do limite, ou mesmo do que ele significa, ficarão ainda nebulosas. Em compensação, ainda que os truques de manipulação não sejam imediatos, pelo menos seus procedimentos serão "estáveis", quase "palpáveis", enfim, um conforto nada desprezível neste universo de aproximações, movimentos, indefinições e nebulosidades.

As semanas vão passando, discutir-se-á o conceito de continuidade e, posteriormente, com a introdução do conceito de derivada, novas abordagens gráficas e novos movimentos procedurais, com suas regras e técnicas, começarão a ocupar a cena principal. Como tais, mesmo com algumas possíveis dificuldades operacionais, elas poderão representar algum "conforto", dada a estabilidade de seus algortimos. Entretanto, a sensação de que tais rotinas parecem não ter "voltagem" suficiente para iluminar o universo de aproximações e de nebulosidades continuará subjacente e dificultando a compreensão conceitual.

Por mais que a descrição acima seja simplificadora, ela serve para ilustrar uma verdade: a iniciação à matemática universitária implica em forte, porém necessária, desestabilização. A segurança típica do estático é transformada rapidamente na insegurança típica da dinâmica. Não é de surpreender, portanto, a tendência natural do aluno em buscar na rotina dos algoritmos utilizados nos exercícios procedurais o conforto e a estabilidade que começam a ser minadas neste processo de transição. Problemas à vista? Sem dúvida.

O conceito de função: algumas visões

Considerando que o conceito de função é a base que sustenta a matemática universitária, eu apresentarei a seguir, de maneira apenas resumida, algumas das principais visões sobre este conceito dentro da comunidade de Educação Matemática.

As compreensões do conceito de função têm sido investigadas em duas linhas predominantes: uma abordando sua natureza como processo e objeto mental (SFARD, 1992, HAREL; DUBINSKY, 1992) e outra abordando as múltiplas representações (CONFREY, 1994, KAPUT, 1992). No contexto brasileiro e no exterior, Borba (1993), há vários anos, tem produzido estudos sobre *funções* adotando esta última linha. Há, no entanto, outro autores – por exemplo, David Tall – que reconhecem ainda uma “terceira via” (BEINEKE et al., 1992; SCHOENFELD et al., 1993) combinando as duas numa abordagem que observa simultaneamente o *desenvolvimento horizontal* (entre representações) e o *desenvolvimento vertical* (processo e objeto). Trabalhando basicamente no contexto do Ensino Superior, a abordagem *processo e objeto*, adotada, por exemplo, pelos membros do grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community), estende o *construtivismo* da teoria piagetiana para o contexto universitário quando pretende produzir, entre outras similaridades, decomposições genéticas de conceitos matemáticos abordados neste contexto (HAREL; DUBISNKY, 1992). Numa abordagem similar, Sfard (1992) transpôs o conceito filosófico de *reificação* (grosso modo, o *processo de transformar uma idéia numa coisa*) para a Educação Matemática, visando, também, a abordar as questões de compreensão conceitual nesta área. A verdade, no entanto, é que a aprendizagem do conceito de função ainda continua a desafiar alunos e educadores, particularmente no contexto da educação matemática universitária.

Metodologia da pesquisa

A investigação que serviu de base para o presente artigo desenvolveu-se sob o balizamento do paradigma interpretativo com a realização de experimentos com oito voluntários do primeiro ano de Matemática de uma universidade pública do Estado de São Paulo. Este curso é oferecido em período integral há várias décadas e, ao longo deste tempo, construiu uma ótima reputação, o que lhe tem assegurado um ótimo desempenho segundo avaliações oficiais dos órgãos governamentais competentes.

A pesquisa investigou compreensões emergentes sobre conceitos de Cálculo Diferencial a partir da integração entre escrita em linguagem natural, oralidade e o sistema de computação algébrica (CAS) MAPLE. As compreensões investigadas foram as de função, limite, continuidade e derivada, produzidas por estudantes de Cálculo I de um curso de Matemática e que cursavam esta disciplina pela primeira vez. Tal integração foi desenhada e implementada segundo o conceito seres-humanos-com-mídias, conforme proposto por Borba e Villarreal (2005). O desenho da investigação prescrevia que as compreensões dos participantes seriam "ouvidas", num primeiro momento, individualmente na forma escrita em linguagem natural e, posteriormente, num ambiente em que duplas de participantes interagiam, entre si e com o MAPLE. O objetivo era identificar estas compreensões para, a partir daí, oferecer sugestões no interesse da Educação Matemática no Ensino Superior.

Os procedimentos foram conduzidos segundo o conceito de *Experimento de Ensino* (STEFFE; THOMPSON, 2000), metodologia especialmente desenhada para a investigação do raciocínio e das compreensões matemáticas produzidas por estudantes. Os episódios foram construídos com base em dados coletados em três fases que acompanharam, de maneira aproximadamente sincronizada, durante o período de seis meses, o desenvolvimento dos conteúdos respectivos na disciplina regular de Cálculo I do curso de Matemática do qual os participantes da pesquisa eram oriundos:

Fase 1: Investigação de compreensões sobre o conceito de *função;*

Fase 2: Investigação de compreensões sobre os conceitos de *limite* e de *continuidade;*

Fase 3: Investigação de compreensões sobre o conceito de derivada.

Em cada uma das fases acima foram utilizados dois modos de abordagem aos participantes, a saber:

Atividade individual:

Cada participante respondeu, individualmente e em linguagem escrita, a um questionário com questões sobre o conceito investigado.

Atividade em dupla:

Nesta modalidade, o cenário de coleta dos dados foi totalmente reconfigurado para caracterizar um experimento no qual cada dupla de participantes, em horários exclusivos, interagiam entre si e com o MAPLE. Tais interações foram induzidas por um questionário com novas questões escritas relativas ao mesmo conceito tratado na atividade individual do encontro anterior.

Os dados foram materializados pelos seguintes meios:

- Respostas escritas fornecidas por cada participante às questões propostas no questionário inicial relativo a cada etapa da pesquisa;
- Respostas escritas fornecidas por cada dupla às questões propostas nas atividades em dupla;
- Transcrições das gravações em vídeo do diálogo produzido entre os membros de cada dupla e, eventualmente, entre o pesquisador e estes;
- Gravações das imagens do datashow onde se projetava as ações executadas por cada dupla no MAPLE — e respectivas respostas do Sistema — num processo de registro síncrono aos diálogos desenvolvidos;
- Arquivo em formato mws do MAPLE, produzidos por cada dupla durante cada experimento.

O episódio destacado – recortes

O episódio da pesquisa supra-referida, sobre o qual se baseia o presente artigo, originou-se da seguinte atividade:

Considerem a função $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Pergunta-se:

i) Sem utilizar o MAPLE, o que vocês diriam sobre a derivabilidade de f ?

ii) Utilizando o MAPLE, o que vocês diriam sobre a derivabilidade de f?

iii) Se f for derivável, como será definida a função f' ? Expliquem.

A dupla Pedro e Talita – alunos classificados como acima da média nas avaliações formais da disciplina – interagiu por mais de uma hora na busca de respostas para a questão, mas não chegaram a uma conclusão final sobre a derivabilidade da função dada. Não obstante, demonstraram, ao longo do processo, já terem construído uma rede de significados consistente -— ainda que insuficiente para uma resposta conclusiva à questão – inter-relacionando conceitos e interpretações consistentes com o tema abordado.

Segue abaixo um recorte das interações dos participantes entre si e com o MAPLE na discussão do item ii) do problema proposto. Ao item i) a resposta dada foi que a função não seria derivável pelo fato de seu gráfico ter um comporamento "caótico". Como não chegaram a uma conclusão sobre o item ii), o item iii) não chegou a ser abordado. Os códigos que aparecem nas transcrições foram usados durante a análise da versão completa do episódio, que se encontra em Olimpio (2006).

A discussão começa com uma abordagem global à função:

Talita: ($D4_{TAL}$) Deriva ela.

Pedro: ($F2_{PED}$) Opa. *[...]* Qual é a função? *[Pedro começa a digitar no computador]*. Hum... Mas o duro é que tem isto aqui, né? *[Referindo-se às duas sentenças que definem a função]*.

Talita: ($D5_{TAL}$) Será interessante antes de derivar a gente plotar o gráfico? *[aqui eles decidem plotar o gráfico da primeira sentença de f]*

```
plot(x^2*sin(1/x),x=-0.2..0.2);
```

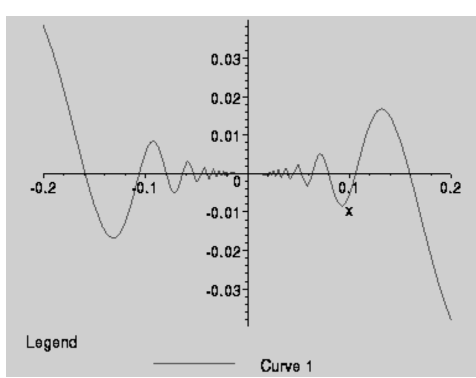


Gráfico 1

O comportamento "caótico", segundo eles, do gráfico de f continua a gerar dúvidas mesmo depois de experimentarem intervalos com amplitudes diferentes, o que parece sugerir que f não seria derivável no ponto x = 0. Assim, uma nova abordagem (global), usando a primeira sentença da definição da função é proposta:

Pedro: E a derivada? Faz assim... ($D3_{PED}$) Estranho, porque parece que se você usar as técnicas de derivação parece que sai.

```
diff(sin(1/x)*x^2,x);
```

$$2\,x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Talita: **($D7_{TAL}$) Ele sai com a derivada!**

A surpresa de ambos ($D7_{TAL}$), ($D3_{PED}$) é justificável. Ora, se o gráfico de f apresenta um "mau comportamento", como é possível existir a derivada de f... ? Novamente, uma abordagem global à f parece gerar uma contradição e dificultar a compreensão de um comportamento local.

> **Pedro**: Entendeu? Mas, ..., não, ($D4_{PED}$) se você usar a Regra do Produto aqui em cima, ele sai, ó. Entendeu? Mas, tudo bem, isso não quer dizer nada.
> **Talita**: Se você usar só conta algébrica, assim, só prá..., você vai achar que existe a derivada.
> **Pedro**: O quê que eu vou fazer? Eu vou plotar essa função.

Pedro decide plotar a "função derivada" obtida acima. O movimento sugere uma exploração do MAPLE para investigar se o gráfico respectivo pode oferecer alguma pista sobre a derivabilidade de f.

```
plot(2*x*sin(1/x)-cos(1/x),x=-4..4);
```

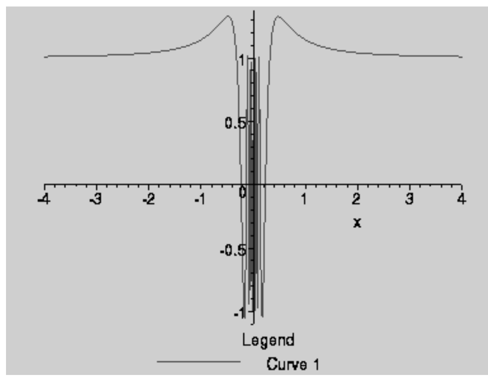


Gráfico 2

Pedro: (D5$_{PED}$) Viu? Continua estranho, aí, ó...
Talita: (D9$_{TAL}$) Mas ele dá a derivada! Isso é que estranho!
Pedro: Só se eu colocar o seguinte, ó... Não, Tali, isso aqui, ele não deve ter um valor muito bem definido aqui. Ah, não sei... Pera aí... Porque, por exemplo, (D6$_{PED}$) se isto aqui é a derivada, é a inclinação da reta tangente. A gente pode tentar traçar a reta tan... Quer ver? ó. Eu vou traçar o gráfico, ó.
Pedro: Vai ter que dar uma reta aqui.

```
plot([sin(1/x)*x^2,sin(1/0.1)*(0.1)^2+(cos(1/0.1)+
2*sin(1/0.1)*0.1)*(0.1)],x=-0.2..0.2);
```

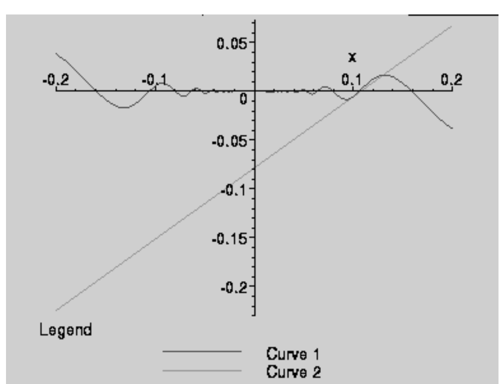


Gráfico 3

Talita: (D10$_{TAL}$) Deu certo, ó! *[risos]*
Pedro: (D7$_{PED}$) Está me deixando intrigado... *[pausa]*
Talita: (D12$_{TAL}$) Tenta fazer essa reta no ponto zero.
Pedro: É o que eu estou tentando. (F4$_{PED}$) Estou substituindo o zero nas funções.
Pedro: (F5$_{PED}$) Mas aí no ponto zero não pode por causa do seno que é de 1/x.
Pedro: (D8$_{PED}$) É..., no zero ela não pode ter derivada. Claro que não vai ter derivada por causa disso aqui, ó *[referindo-se à impossibilidade de denominadores iguais a zero]*.
Talita: (F6$_{TAL}$) É, essa função diz que é zero para x igual a zero. *[pausa]* Entendeu?

É razoável a hipótese de que somente a esta altura é que a condição f(0) = 0 tenha realmente chamado a atenção de Talita (e, provavelmente, de Pedro). A abordagem por tangentes talvez tenha contribuído para esse movimento. Isto, no entanto, não se configurará numa surpresa, se supusermos, como defenderei mais abaixo, que esses "acidentes" na definição de uma função, não estão, em geral, "na pauta" de iniciantes à matemática universitária.

O foco local neste momento aparentemente induz a dupla a investigar a continuidade de f em x = 0. A partir da função Limit do MAPLE, a conclusão é que f é contínua. Mas a dúvida continua.

Pedro: (D10$_{PED}$) Aquela função, ela vai representar pontas, ó. Por isso que ela não vai ser derivável.
Talita: Será? [apontando para o gráfico da função] (F7$_{TAL}$) Sempre não são curvas que estando próximas parecem pontas?
Pedro: Não é, quer ver, ó? (F6$_{PED}$) Quanto mais a gente aproxima, mais caótico fica. Viu?
Talita: Sim, mas está muito pequenininho. (D15$_{TAL}$) Será que chega a ser ponta?
Pedro: (D11$_{PED}$) Você pergunta se chegam a ser bicos, né?

Finalmente (no experimento, aproximadamente depois de quarenta minutos de discussão), Talita traz à cena a idéia da derivada num ponto:

Talita: (D17$_{TAL}$) Como que era aquele negócio prá achar a derivada no ponto tal? Você acha a derivada normal e depois coloca no ponto, ou você…
Pedro: (D12$_{PED}$) Não, você acha a derivada normal e põe no ponto.

Talita e Pedro parecem ter se lembrado do caráter local da derivada, mas continuam vinculando o cálculo da derivada de uma função f num dado ponto p à existência de uma "derivada normal", representada por uma fórmula, sobre a qual se pode substituir o valor x = p.

Talita: É o que a gente está fazendo?
Pedro: É. Que foi isso aqui, ó. [Pedro volta à expressão da derivada e confere]
Pedro: [voltando à questão proposta] Então, o que você diria?
Talita: [risos] (D19$_{TAL}$) E agora eu não sei se é derivável ou não.
Pedro: (D13$_{PED}$) Eu também não sei agora.

A dupla continua em suas tentativas de decidir se f é derivável ou não, inclusive com abordagens inesperadas e criativas, mas não chegam à uma conclusão e nem chegam a abordar o item iii) da questão proposta.

Discussão

Várias conjecturas poderiam ser aqui propostas sobre o fato de a dupla não ter conseguido chegar à uma conclusão sobre a derivabilidade de f, a maioria delas fundamentando-se em dois pontos principais: a) o fato de nenhuma definição formal de derivabilidade, quer seja num ponto ou num conjunto, ter emergido durante a discussão e b) o fato de a análise ter se processado quase que exclusivamente com base numa interpretação gráfica " fortemente influenciada pelos *outputs* gerados pelo MAPLE " da derivabilidade.

Embora seja inegável o impacto de tais *outputs* nas compreensões dos participantes (OLIMPIO, 2006), ou da visualização, em geral, na aprendizagem matemática (BORBA; VILLARREAL, 2005), noções intuitivas como “curva suave”, “sem bicos”, “sem furos”, etc. não são suficientes para dar conta do conceito de derivabilidade em casos como o apresentado, já que o gráfico de f nas proximidades de $x = 0$, mesmo com os recursos gráficos do MAPLE, apresenta um comportamento difícil de ser reconhecido visualmente. Por outro lado, também a abordagem analítica com base nas definições formais de derivabilidade (num ponto e num conjunto), somente terá chances de ser razoável ao aluno nesta fase inicial de formação, se este for orientado desde o começo do curso a exercitar seu “olhar” para os novos elementos e métodos que povoam a paisagem matemática neste cenário. Não é, portanto, sem razão que a dupla em pauta tentou explorar ao máximo o potencial gráfico do MAPLE.

A idéia de que uma função é uma “curva suave” no plano cartesiano e que “precisa” ser representada por uma expressão analítica do tipo $f(x) = ...$ (numa sentença única) é uma das que se cristalizam com facilidade no estudante no Ensino Médio. Breidenbach et al. (1992) e Carlson (1997), por exemplo, mostram que boa parte dos estudantes não vê como funções as relações que não podem ser representadas por uma equação ou por uma fórmula. Contudo, qualificar sumariamente tais concepcões como “equivocadas” (*misconceptions*) é ignorar a perspectiva histórica na evolução do conceito, já que estas identificaram, por alguns séculos, o próprio conceito de função.

Assim, a tendência natural do alunos de “atacar” a função globalmente, inclusive quando esse “ataque” for uma operação como, no caso, a derivação, é esperada. Além disso, mesmo que estejam atentos à eventuais singularidades da função, tal atenção pode não ser suficiente, já que seria necessário também que estivessem aptos a superar a usual cristalização que dificulta a fluidez na dinâmica local/global, demandada não apenas no caso particular da análise da derivabilidade, mas também da de outros conceitos, como o de continuidade. Em suma, as dificuldades do aluno de Cálculo I para condensar e sedimentar significativamente, em alguns meses, conceitos que levaram séculos para amadurecer não são nada razoáveis.

Sob o ponto de vista formal, uma função f : A $\rightarrow$ **R** é *derivável num ponto* $a \in A \cap A'$[2] se, e somente se, f '(a) existe. E f : A $\rightarrow$ **R** é *derivável no conjunto A* se, e somente se, f é derivável em todo ponto $a \in A \cap A'$. É óbvio que pontual não é sinônimo de local, mas a questão em pauta é menos essas diferenças do que as dificuldades no tratamento do conceito de derivabilidade da função f no conjunto A, isto é, globalmente, e o conceito de derivabilidade da função f no ponto *a*, isto é, "localmente", além, claro, da dinâmica que se deve estabelecer entre os dois.

O destaque atribuído à dualidade local/global se deve a que esta pode ser uma das chaves para compreendermos algumas das dificuldades enfrentadas pela dupla protagonista do episódio e pelos demais participantes da pesquisa (e, provavelmente, por alunos de primeiro ano de Matemática, em geral) no tratamento da questão proposta e de outras similares. Além disso, esta dualidade é destacada também por Rezende (2003, p. 372) como uma das grandes dificuldades de natureza epistemológica do Cálculo.

E é sob a perspectiva acima que eu sugiro um olhar especial e diferenciado para a exploração da liberdade e das dinâmicas inerentes ao conceito que suporta quase todos os demais no contexto de um curso de Matemática: o conceito de função. Ocorre que quando se fala em aspectos dinâmicos do conceito de função, em especial no Cálculo, o foco natural da discussão tende a ser apenas a dinâmica da variação, materializada, em geral, por expressões analíticas geradas a partir de funções elementares. Sobre isso, Rezende (2003, p. 242) afirma:

> [...] o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral se deu através de uma relação de simbiose deste, principalmente, com a geometria, a física e a filosofia. A álgebra participa do processo com a sua forma abstrata de pensar, com o seu simbolismo, tendo uma fundamental participação no desenvolvimento da noção de variável, que possibilitará a construção daquele que é, sem dúvida, um dos conceitos básicos do Cálculo e da própria matemática: o conceito de função. É exatamente nesse contexto histórico que "nasce" o conceito de função, isto é, a noção se estabelece a partir de uma relação funcional implícita entre as quantidades variáveis. O cumprimento de certas exigências por parte dessa relação funcional é conseqüência

> de um processo de depuração histórica e matemática. Mas o que interessa para o Cálculo é, essencialmente, essa relação de interdependência entre as quantidades variáveis. É exatamente a partir dela que resolveremos o problema da variabilidade, isto é, da "medida" da taxa de variação de uma das variáveis em relação à outra.

Não resta dúvida de que o que interessa ao Cálculo é essa interdependência entre quantidades variáveis. Os principais objetos de interesse são as variabilidades "razoáveis", isto é, que possam ser medidas com a precisão exigida em um dado contexto. É importante descobrir *como* uma grandeza varia em relação à outra e, mais, sabendo-se como variou é possível se investigar *quanto* variou, informação que, novamente, se configura como relevante. Não há dúvida de que esta forma de dinâmica é a essência (matemática) do Cálculo. Contudo, sob o ponto de vista educacional, há também necessidade de se exercitar outras dinâmicas que possam contribuir para os processos de descondicionamento, de ampliação de percepções e que se traduzam em evolução do amadurecimento matemático, intensivamente demandado no contexto de um curso de Matemática.

Embora seja verdade que uma definição matemática formal tem, em geral, grandes chances de ser estéril para um neófito, os níveis de abstração e de esterilidade percebidos dependerão sempre da existência e da articulação de pelo menos três fatores cruciais: contexto adequado, exploração sistemática de suas potencialidades e significados construídos compatíveis com o conceito definido. Assim, por exemplo, no contexto do Ensino Médio, o foco está localizado no aspecto *global* das chamadas *funções elementares* (afins, lineares, quadráticas, modulares, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas, etc.). Como são poucas (ou inexistentes) as singularidades nessas funções e o foco é global, uma exploração mais detalhada das potencialidades de uma particular definição de função não seria recomendável, até porque o tempo diponível sequer é suficiente para que fatos básicos sobre as próprias funções elementares sejam detalhadamente explorados. Além disso, questões de limite, continuidade e diferenciabilidade não são usualmente tratadas neste contexto. Alguns livros-textos dedicados ao Ensino Médio trazem esses conteúdos, mas, considerando a atual situação educacional brasileira, pouquíssimas escolas os implementam de fato. Em resumo, se o foco sobre o conceito de função no Ensino Médio é global e os conceitos locais de limite, continuidade e diferenciabilidade não são ali estudados, qualquer exploração local, ou do trânsito local/global do conceito tornam-se, de fato, estéreis.

Nosso foco, no entanto, está no Ensino Superior. Ali, os conceitos mencionados – e a quase totalidade de suas idiosincrasias – devem ser exercitados e explorados em suas potencialidades, sob pena de se dificultar o descondicionamento e a evolução da maturidade matemática do aluno. Não resta dúvida de que há, portanto, ambiente para que o conceito e sua "nova" definição formal " que será apresentada abaixo " sejam explorados. Enfraquecer ou até desestimular o seu uso pode também enfraquecer o arsenal do aluno para abordar com menos atrito a maior parte dos conceitos subseqüentes (não apenas no Cálculo!) e dificultar sua lida com a matemática universitária.

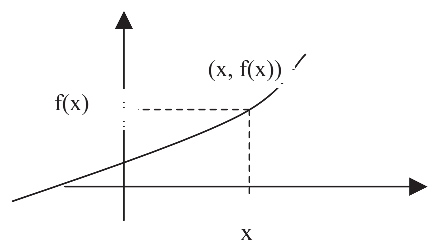
A definição de função

Vejamos, agora, a definição formal de *função*, contida no livro-texto[3] utilizado pelos participantes em seu curso regular, e a eles distribuída durante parte dos experimentos:

Entendemos por uma **função f uma terna (A, B, a $\rightarrow$ b**), onde A e B são dois conjuntos e **a** $\rightarrow$ **b** uma regra que nos permite associar a *cada* elemento **a** de A um *único* **b** de B. O conjunto A é o ***domínio*** de f e indica-se por D_f, assim A = D_f. O conjunto B é o ***contradomínio*** de f. O único b de B associado ao elemento a de A indicado por f(a); diremos que f(a) é o *valor* que f *assume* em a ou que *f(a)* é o *valor que f associa* a *a*. Uma função f de domínio A e contradomínio B é usualmente indicada por f : A $\rightarrow$ B.

Uma função de uma variável real a valores reais *é uma função f : A $\rightarrow$ B , onde A e B são subconjuntos de **R**. Até menção em contrário, só trataremos com funções de uma variável real a valores reais.*

Seja f: A $\rightarrow$ B uma função. O conjunto G_f = { (x, f(x)) | x pertence a A} denomina-se ***gráfico* de f;** assim, o gráfico de f é um subconjunto do conjunto de todos os pares ordenados (x, y) de números reais. Munindo-se o plano de um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, o gráfico de f pode então ser pensado como o lugar geométrico descrito pelo ponto (x, f(x)) quando x percorre o domínio de f (Fig 1):



Observação: Por simplificação, deixaremos muitas vezes de explicitar o domínio e o contradomínio de uma função; quando tal ocorrer, **ficará implícito que o contradomínio é R e o domínio é o "maior" subconjunto de R para o qual faz sentido a regra em questão**. É usual representar uma função f de uma variável real a valores reais e com domínio A, simplesmente por y = f(x), x ∈ A. Neste caso, diremos que x é a *variável independente,* e y, a *variável dependente.* É usual, ainda, dizer que y é função de x.

O autor é explícito em definir uma função como uma **terna**. Durante os experimentos, nenhum dos participantes (não apenas os da dupla em pauta), entretanto, citou este termo, e apenas um fez referência ao fato de que o conceito de função envolve, necessariamente, três componentes. Ora, mas quando os alunos falam em função como relação (ou lei, ou inter-relação), pode-se argumentar que estariam implicitamente admitindo que tal relação é entre elementos de dois conjuntos arbitrários**.** Ainda que esta hipótese fosse verdadeira, o problema permaneceria intacto: os componentes **domínio** e **contradomínio** não terem o mesmo *status* da **regra** na composição do conceito e, em conseqüência, não poderem constituir a unidade que é carregada pela noção de **terna.**

Neste sentido, quando Guidorizzi (2000) acrescenta a observação acima logo após sua definição de função, ele está enfraquecendo sumariamente a potência da concepção subjacente à definição recém enunciada. Ora, se o domínio depende da regra e o contradomínio já está dado, a regra (entendida, em geral, como uma expressão analítica de sentença única) retorna ao status de liderança no conceito, mantendo-se, portanto, na posição que, compreensivelmente, já desfrutava ao longo do Ensino Médio.

É óbvio que o objetivo do autor ao acrescentar a observação é tão somente o de "economizar" nos enunciados dos exemplos e exercícios posteriores, deixando para explicitar domínios e contradomínios "específicos" apenas quando as exceções demandarem tais especificidades. Este "atalho" é encontrado também em outros livros de Cálculo e é tradicionalmente usado na disciplina. O problema é que esta opção pela "economia" pode trazer, na escala pedagógica, um efeito colateral indesejável neste estágio da vida acadêmica do estudante de Matemática, a saber: contribuir para que, ao falar de função, ele continue a fixar seu olhar na componente regra (expressão analítica) e a relegar os componentes domínio e contradomínio do conceito a posições meramente formais, preservando-se, portanto, a tradição herdada do Ensino Médio que, naquele contexto, poderia ser justificável.

Neste sentido, observemos, novamente, a definição. Ela afirma que uma função é uma terna (A, B, $a \to b$). O que isto implica? Implica que definir uma função é explicitar esses três elementos: domínio, contradomínio e regra. Há liberdade não apenas para a escolha de uma regra – que pode ser inteiramente arbitrária – mas, também, dos outros elementos, desde, claro, que haja compatibilidade entre os três e a condição de existência e unicidade de imagem para cada elemento do domínio seja preservada.

Embora essa definição não possa ser considerada nova, em termos históricos ela é razoavelmente recente, uma vez que surge numa forma similar já no contexto da Teoria dos Conjuntos como uma elaboração do grupo Bourbaki em 1939 (BOURBAKI, 1960, p. 76). É curioso notar que a chamada definição "moderna" de função, que se popularizou, que está presente em boa parte dos livros atuais de Matemática, e que, de maneira não surpreendente, apareceu nos dados da pesquisa supra-referida é a que estabelece que "função é uma *relação...*" (outra definição popular é a que afirma que "uma função é uma *regra* que ..."), ao passo que em Bourbaki (1960) uma "função f é uma *terna...*", sendo que apenas o *gráfico* G_f de f é caracterizado como uma relação.

O problema aqui é que as definições "modernas" popularizadas de função, além de pouco úteis, tendem a obscurecer a importância das três componentes que necessariamente caracterizam o conceito, num processo que enfraquece as possibilidades do estudante explorar a liberdade que lhe é assegurada toda vez que este pretende definir uma função. Assim, é natural que a seguinte crítica apareça com frequência :

> É verdade, no entanto, que o conceito de função 'evoluiu' no processo histórico de construção do conhecimento matemático: sai do âmbito do Cálculo, enquanto relação entre quantidades variáveis, para o âmbito da Teoria dos Conjuntos, como uma operação especial entre conjuntos. Neste último contexto, função é conjunto de pares (ou ternos, quadra, etc., dependendo do número de variáveis) ordenados, que satisfazem determinadas propriedades algébricas, mas, efetivamente, não é essa idéia de função que foi essencial para o desenvolvimento do Cálculo. Afinal, não derivamos "conjuntos", nem tampouco os integramos, e nem fazemos uso dessa definição formal de função em qualquer momento de um curso normal do Cálculo, ou mesmo de Análise. Em verdade, a definição formal de função é tão abstrata, quanto estéril, uma vez que pouco contribuiu para o desenvolvimento do conhecimento matemático de um modo geral" (REZENDE, 2003, p. 343)

Infelizmente, um problema similar pode ocorrer mesmo com a definição bourbakiana apresentada por Guidorizzi (2000), caso ela não seja explorada em suas potencialidades. Assim, se os exercícios e a prática subsequente com funções continuar omitindo – em cumprimento à observação que segue a definição acima – as componentes domínio e contradomínio, o estudante estará implicitamente sendo induzido a continuar colocando foco sobre a componente *regra* (entendida, em geral, como uma expressão analítica de sentença única) da terna que define a função, num movimento que, dada as usuais experiências com o conceito no Ensino Médio, somente contribuirá para preservar o enrijecimento desta concepção. Em outras palavras, esta componente continuará "identificando" a função. Ora, mas é óbvio e está implícito que uma regra não "opera" sozinha, pois sempre depende do quê transforma e no quê transforma. A questão está justamente aí: é óbvio e está implícito para quem?

Assim, por exemplo, a regra $f(x) = x^2$ é automaticamente associada à uma função que não é injetora, não é sobrejetora e seu gráfico é uma parábola. Ora, mas g : $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, com a mesma regra $g(x) = x^2$, é injetora, sobrejetora e seu gráfico não parece uma parábola no aspecto usual, enquanto que h : $\{0, 1\} \to \mathbf{R}$, também com $h(x) = x^2$, é injetora, não é sobrejetora e seu gráfico é constituído apenas pelos pontos (0, 0) e (1, 1). A regra de todas as funções é a mesma e, portanto, não é surpresa quando os estudantes afirmam que as três funções, quando vistas apenas pelas suas regras, são iguais.

Uma outra classe de exemplos seria a dos exercícios onde é solicitado que o aluno determine o domínio da função, muito comum nos livros de Cálculo. Assim, o exemplo a seguir é típico: dada $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ determine "**o**" domínio da função. Ora, mas o domínio não é um componente de uma função tanto quanto sua regra e, neste caso, quando já se tem uma regra, não se poderia "inventar" um domínio e um contradomínio, observando apenas que os três elementos sejam compatíveis? É óbvio que não há problema (matemático) algum com a questão: o domínio suposto é o maior (sob a relação de ordem usual de inclusão) subconjunto de **R** para o qual a regra da função faz sentido, e o contradomínio é o próprio **R**, como, de resto, já estava subentendido. O problema está na escala pedagógica, isto é, em como o estudante vai "administrando" conceitualmente essas questões: se for para "determinar **'o'** domínio" então não há porque ficar "inventando" nem explorando novos domínios. Assim, o que quero argumentar é que exercícios desse tipo tendem a dificultar o rompimento ¯ crucial neste estágio da matemática do Ensino Superior ¯ do condicionamento que o estudante traz consigo.

Mas, mudemos agora o foco da componente *domínio* para o *contradomínio* no conceito de função. Dos três componentes que constituem o conceito, o *contradomínio* é seguramente o que tem o menor *status*. Seu papel é relegado ao segundo plano e tomado – até as raras menções em contrário – tacitamente como o conjunto **R** dos números reais. Analisemos, então, a seguinte situação:

O conceito de função inversa aparece em momentos importantes ao longo do curso de Matemática, inclusive no Cálculo, durante – ou mesmo antes – da exploração detalhada das funções exponenciais, logarítmicas, trigonométricas e trigonométricas inversas. Isto já seria suficiente para tornar desnecessária qualquer argumentação em favor de um olhar mais cuidadoso para todos os componentes de uma função. Ocorre que a existência da inversa de uma função f depende de que f seja bijetora, logo sobrejetora, que, por sua vez, é uma propriedade que está diretamente vinculada ao contradomínio C_f de f. Assim, basta uma restrição de C_f ao conjunto-imagem de f, Im(f), para que qualquer função f de domínio D_f seja transformada numa nova função $f_S : D_f \to Im(f)$, com $f_s(x) = f(x)$ para todo x, que preserva todas as características de f – incluindo, obviamente, seu gráfico – só que agora detendo o "opcional" da sobrejetividade. A meu ver, este tipo de manipulação é mais um dos exercícios que ajudariam a configurar um "espaço de descondicionamento" que deveria fazer parte do ambiente de aprendizagem contextualizado no primeiro ano de um curso de Matemática. Neste sentido, o leitor há de convir que a omissão ou até mesmo o mero enfraquecimento dessas idéias no referido contexto pode induzir dificuldades no tratamento de questões como a seguinte:

Tomemos a função $f(x) = x^2$, apresentada, como de costume, na forma tradicional, isto é, sem referências a seu domínio e seu contradomínio. Como um aluno deveria responder à seguinte pergunta: f(x) é invertível? A resposta seria sim, mas como $g(x) = \sqrt{x}$ pode ser a inversa de f se f não é bijetora? Como argumentar significativamente sobre os condicionantes implícitos a possíveis respostas à questão sem que os conceitos supra-referidos sejam trazidos à cena?

Mantendo ainda a mesma linha argumentativa, ampliemos ligeiramente o foco para abarcar não apenas o contradomínio, mas também a estrutura que o suporta e consideremos o seguinte exemplo, comum no estudo de limites:

Mostre que $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ (a demonstração não é necessária aqui; basta que se esteja "convencido" de sua validade.)

Com qual função estamos trabalhando? Vamos supor, como de costume, que a estrutura subjacente seja **R**. Caso a função seja, por exemplo, $f : \mathbf{R} - \{0\} \to \mathbf{R}$, com $f(x) = \frac{1}{x}$ para todo x, teríamos, de fato, zero como limite. Sacrifiquemos, agora, por um momento, a estrutura de corpo de **R** (e sua completude) retirando o elemento zero e passemos a trabalhar sobre o universo $\mathbf{R} - \{0\}$ tomando a função $g : \mathbf{R} - \{0\} \rightarrow \mathbf{R} - \{0\}$, com $g(x) =$ para todo x. Neste caso, o limite deixará de existir, ou seja, bastou uma "leve mexida" na estrutura subjacente ao contradomínio para que se desestabilizasse um resultado que possivelmente já estaria impregnado no estudante. Além disso, os domínios são iguais e f(x) = g(x) para todo x. Não seria tentador dizer que f = g? Para o estudante seria óbvio...

Embora a idéia básica de limite de uma função f(x) quando x tende a a seja a de representar uma tendência de comportamento de f numa vizinhaça de a, conflitos como o de f(x) atingir ou não seu limite, de retas secantes antingirem ou não uma tangente, etc. são comuns nos processos de aprendizagem deste conceito e têm sido foco de interesse de vários pesquisadores. Przenioslo (2004), por exemplo, discute várias concepções e conflitos sobre o conceito de limite no nível universitário. Neste sentido, explorar as possibilidades de manipulação da estrutura de suporte do contradomínio de f pode, talvez, contribuir também para ampliar percepções neste contexto. Respostas mais seguras sobre essa questão dependerão, obviamente, de novas pesquisas.

Vale aqui relembrar que defender a definição (e a exploração) do conceito de função como uma terna, ao contrário do que pode parecer, não é paradoxal ao caráter dinâmico do Cálculo. Pelo contrário, trata-se de um estímulo à exploração de um outro movimento desta dinâmica, isto é, o trânsito local/global em vários conceitos essenciais da disciplina. Neste sentido, se é certo que as primeiras noções de função nascem num contexto ímplicito (ou explícito) de movimento, ou de variação no tempo, também é certo que a definição bourbakiana inspirada na Teoria dos Conjuntos, apesar de sua máscara estática, pode estender as possibilidades de exploração de novas dimensões dinâmicas, imprenscindíveis no trato com a Matemática atual, como, aliás, as seções anteriores e a próxima ilustram.

O caso da Álgebra Linear

Cálculo de Funções Reais de uma Variável Real e Álgebra Linear são duas disciplinas típicas do primeiro ano de qualquer curso de Matemática. Seguem praticamente juntas no tempo, mas raramente se interceptam. É certo, no entanto, que a derivada é uma transformação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita, logo, uma matriz, e as matrizes são objetos por excelência da Álgebra Linear nestes espaços. Ocorre que, no primeiro ano, o Cálculo se ocupa apenas de **R**, um espaço vetorial de dimensão 1 quando tomado sobre o próprio corpo **R**. Transformações lineares nestes espaços seriam representadas por matrizes 1 x 1 que, convenhamos, não seriam de muita utilidade.

Entretanto, no segundo ano, as funções, agora já no Cálculo II, são de várias variáveis, com seus domínios (e contradomínios) naturalmente se generalizando para dimensões maiores do que 1. Como conseqüência, as intuições sobre funções, gráficos, limites, continuidade, derivadas, derivabilidade, diferenciabilidade, etc, são obrigadas a sofrer uma considerável inflexão. As funções, antes associadas imediatamente à uma linha no plano cartesiano, são agora "difíceis de se ver". Na melhor das hipóteses, trabalhando com uma função muito bem comportada, em geral de algum subconjunto limitado de $\mathbf{R}^2$ em **R**, é possível a visualização de um esboço de seu gráfico em 3D. Caso o aluno tenha a sorte de ter à disposição mídias com os recursos do MAPLE, por exemplo, esta visualização ficará consideravelmente mais fácil de ser obtida e a interação se tornará enriquecida. Um grau de liberdade a mais nas dimensões do domínio ou da imagem de f será, no entanto, suficiente para que sua representação gráfica usual deixe de ser factível, mesmo com suporte computacional. Como ficarão, então, neste contexto, os conceitos de diferenciabilidade, de derivabilidade, de derivada parcial, de limite, de continuidade, etc., sem falar nas generalizações do próprio conceito de integral?

Ainda com propósitos comparativos e ilustrativos, situemos o tema *função* no cenário de uma aula típica de Álgebra Linear. Embora o formalismo das definições apresentadas neste contexto seja talvez até mais ostensivo do que do Cálculo, vejamos o que lá, em geral, ocorre:

Ao discorrer sobre uma dada transformação linear, o professor explicita o domínio e o contradomínio desta transformação. Assim, por exemplo, ele escreve:

*Seja T : **R**^{3} →**R**^{2} uma transformação linear definida por T(x, y, z) = (2x, 2y), para todo (x, y, z) de **R**^{3}.* Dificilmente ele escreveria apenas: seja T(x, y, z) = (2x, 2y). No caso do Cálculo, é provável que escrevesse apenas: considere a função (linear) f(x) = 2x. Além disso, em Álgebra Linear é frequente o destaque dispensado às imagens dos elementos de uma base do espaço vetorial do domínio de T, ou seja, se [u, v, w] representa uma base deste espaço, T(u), T(v) e T(w) quase sempre são trazidos à cena, uma vez que geram a imagem de T, um subespaço importante do contradomínio de T. Em outras palavras, é freqüente a presença de elementos pontuais (locais) na "ação" de uma função (transformação) numa aula de Álgebra Linear. É natural, portanto, que o exercício desse "movimento" vá induzindo o estudante a olhar mais cuidadosamente para uma transformação, atentando-se não apenas para a "regra" mas também para as características dos espaços que lhe servem de domínio e contradomínio, assim como para as singularidades locais, tais como T(0) = 0, para qualquer transformação linear T.

Contribuindo para a formação de uma visão mais aberta do conceito de transformação (função), ao ser solicitado a dar um exemplo de transformação linear, o estudante perceberá imediatamente que suas primeiras escolhas deverão ser a respeito do domínio e do contradomínio de T. Só a partir daí é que ele pensará numa regra de associação entre os elementos. É claro que no início da aprendizagem suas escolhas serão bem limitadas, mas não há, de todo modo, um contradomínio *default* ou um domínio restrito fazendo o papel do onipresente intervalo de números reais. A meu ver, o exercício desta flexibilidade é pedagogicamente desejável e certamente poderia trazer dividendos em termos de maturidade matemática e de amplitude de visão do estudante em relação à Matemática. Infelizmente, este exercício não tem, em geral, seu correspondente no âmbito do Cálculo. Ali, os problemas usualmente propostos parecem não ter potencial suficiente para gerar e manter a "voltagem" necessária para induzir a descristalização de alguns condicionamentos que dificultam a percepção da liberdade inerente à definição ora discutida e ao próprio conceito de função. Na realidade, ele "vê" a definição, mas, sem exercitá-la em suas potencialidades, não consegue enxergar seu alcance.

Conclusão

Muitos outros exemplos poderiam ser aqui citados para sustentar a posição de que o estudante de Matemática que está iniciando seu curso universitário poderia se beneficiar de um exercício sistemático de manipulação dos componentes de uma função e de exploração da liberdade subjacente ao conceito. Na verdade, os dividendos deste processo podem transcender, em muito, o contexto do primeiro ano de Matemática, já que, afinal, o conceito de função localiza-se na base da própria Matemática atual. Mais uma vez, vale a pena relembrar que o principal objetivo de tal exercício não seria apenas o de explorar a definição em seu aspecto formal, mas, sim, o de ampliar percepções sobre o conceito e romper eventuais condicionamentos. Ao favorecer a percepção da liberdade sobre a qual, em última análise, o conceito se sustenta, este exercício poderia contribuir para "desengarrafar" o trânsito entre aspectos locais e globais, não apenas no conceito de função, mas, principalmente, em quase todos os subseqüentes, como a derivabilidade (ou não) de funções "caóticas" (ou nem tanto).

Referências:

BEINEKE, J. et al. Horizontal and vertical growth of students' conception of function. In: HAREL, G.; DUBINSKY, E. (Ed.). **The concept of function:** aspects of epistemology and pedagogy. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1992. p. 133–149. (MAA Notes, n. 25).

BORBA, M. C. **Students' understanding of transformation of functions using multi-representational software**. 1993. 2 v. Tese (Doutorado) – Faculty of the Graduate School, Cornell University, 1993, Ithaca.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking.** New York: Springer, 2005.

BOURBAKI, N. **Elements de mathèmatiques:** theorie des ensemble. Paris: Herman, 1960.

BREIDENBACH, D.; DUBINSKY, E.; HAWKS, J. Development of the process conception of function. **Educational Studies in Mathematics**, n.23, 1992, p. 247-285.

CARLSON, M. P. Obstacles for college algebra students in understanding functions:What do high-performing students really know? **AMATYC Review**, n.19(1), 1997. p. 48-59.

CONFREY, J. Six approaches to transformation of function using multi-representational software. In: CONFERENCE OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 8., 1994, Lisboa. **Proceedings…** Lisboa: Universidade de Lisboa, 1994. v. 2, p. 217–224.

GUIDORIZZI, H. **Um curso de cálculo**. São Paulo: LTC, 2000. v. 1.

HAREL, G; DUBINSKY, E. The nature of the process conception of function. In: HAREL, G.; DUBINSKY, E. (Ed.) **The concept of function**: aspects of epistemology and pedagogy. Washington: Mathematical Association of America, 1992. p. 85-106. (MAA Monograph, n. 25).

KAPUT, J. Technology and mathematics education. In: GROUWS, D. A. (Ed.) **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: MacMillan, 1992.
p. 515–556.

OLIMPIO, A. **Compreensões de conceitos de cálculo diferencial no primeiro ano de matemática:** uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática. 2006. 263 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, 2006. Disponível em: http://www.biblioteca.unesp.br/bibliotecadigital/document/get.php/4724/olimpiojunior_a_dr_rcla.pdf Acesso em: 20 mar. 2007.

PRZENIOSLO, M. Images Of The Limit of Function Formed in the Course of Mathematical Studies at the University. **Educational Studies in Mathematics.** Dordrecht: Kluwer. n. 55, 2004. p103-132.

RASMUSSEN, C.; ZANDIEH, M.; KING, K.; TEPPO, A.Advancing mathematical activity: a practice-oriented view of advanced mathematical thinking. **Mathematical Thinking and Learning**, Mahwah, v. 7, n. 1, p. 51–73, 2005. doi:10.1207/s15327833mtl0701_4

REZENDE, W. M. **O ensino de cálculo:** dificuldades de natureza epistemológica. 2003. 450 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

SFARD, A. Operational origins of mathematical notions and the quandary of reification: the case of function. In: HAREL, G.; DUBINSKY, E. (Ed.) **The concept of function:** aspects of epistemology and pedagogy. Washington: Mathematical Association of America, 1992. p. 59–84. (MAA Monograph, n. 25).

SCHOENFELD, A. et al. Learning: the microgenetic analysis of one student's evolving understanding of a complex subject matter domain. **Advances in Instructional Psychology,** Hillsdale, v. 4, p. 55–175, 1993.

STEFFE, L. P.; THOMPSON, P. W. Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. In: LESH, R.; KELLY, A. E. **Research design in mathematics and science education.** Hillsdale: Erlbaum, 2000. p. 267-307.

Aprovado em julho de 2007
Submetido em maio de 2007