Bolema, Rio Claro (SP), Ano 21, nº 30, 2008, pp. 111 a 130

A Abstração Reflexionante e a Produção do Conhecimento Matemático

Reflexive (*réfléchissante*) Abstraction and Mathematical Knowledge Production

Clélia Maria Ignatius Nogueira[1]
Regina Maria Pavanello[2]

Resumo

Piaget afirma que a abstração reflexionante é o processo por excelência de produção do conhecimento matemático. Este trabalho teve por objetivo identificar a presença da abstração reflexionante ou de seus componentes (reflexionamento e reflexão) na descrição que matemáticos fazem da forma como produzem novos conhecimentos e discutir possíveis implicações pedagógicas deste processo nas aulas de Matemática.

Palavras-chave: Educação Matemática. Abstração reflexionante. Conhecimento matemático.

Abstract

Piaget assumes that reflexive *(réfléchissante*) abstraction is the process by which mathematical knowledge is produced. The aim of this article is to confirm to identify the presence of the reflexive abstraction or its components (*réfléchissement* and reflection) in mathematicians description of the way they produce mathematical new knowledge as well as to discuss possible pedagogical implications of this process in Mathematics classrooms.

Keywords: Mathematical education. Reflexive abstraction. Mathematical knowledge.

---

[1] Professora Doutora do Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática da Universidade Estadual de Maringá (UEM). clelia@wnet.com.br.
[2] Professora Doutora do Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática da Universidade Estadual de Maringá. reginapavanello@hotmail.com.

O conhecimento matemático

Desde os primórdios da civilização o conhecimento matemático tem fascinado a humanidade. Este fascínio inicialmente levou os homens a atribuírem caráter sagrado aos números e às formas geométricas, tanto que, como enfatiza Omnès (1996, p.72), "sempre houve um sentimento de perfeição, de divino, nos números e nas figuras". Para além do misticismo, desde Platão até os dias atuais, a natureza do conhecimento matemático tem intrigado os filósofos e epistemólogos que, mais do que os próprios matemáticos, têm se debatido, procurando entender, entre outros aspectos, o que é Matemática, onde ela existe, quais são seus objetos de estudo e quanta Matemática pode existir (DAVIS e HERSH, 1986, p. 31-51).

A Matemática recebe um tratamento diferenciado em praticamente todos os sistemas filosóficos, por si só e pelo fato deste conhecimento ser, ao mesmo tempo, um objeto de cultura e uma ferramenta para o desenvolvimento das diferentes ciências, além de se constituir em instrumento de comunicação interdisciplinar. Assim é que, para o filósofo grego Platão (427- 347a.C), a Matemática faria parte do mundo das idéias e, o matemático, utilizando apenas a razão, o raciocínio dedutivo, "descobriria" as "verdades matemáticas", que jamais poderiam ser verificadas mediante uma experiência com objetos do mundo real. Para Aristóteles (384-322 a.C.), a Matemática seria constituída de construções elaboradas pelos matemáticos a partir das percepções sensoriais que estes teriam dos objetos do mundo real e, portanto, suas verdades poderiam ser comprovadas a partir de experiências com objetos do mundo real. Descartes (1596-1650) concebia alegoricamente o conhecimento como uma grande árvore, cujas raízes seriam a metafísica, o tronco a física e que teria como ramos a astronomia, a medicina, etc. Na concepção cartesiana, a Matemática representaria a seiva, a própria condição de possibilidade de conhecimento.

Segundo Machado (2005), tanto os filósofos racionalistas, como Leibniz, quanto os empiristas, como Hume, dividem as proposições em duas classes que se excluem mutuamente e esgotam o universo das proposições: as analíticas, que englobam as verdades da razão e as empíricas, que expressam os fatos. Uns e outros concordam, todavia, que as proposições da Matemática são analíticas, reduzindo suas discordâncias para a interpretação que dão às proposições empíricas.

A Matemática ocupa uma posição especial no sistema elaborado pelo filósofo alemão Kant (1724 - 1804). Para este pensador, os resultados da Matemática seriam obtidos no mundo das idéias, mas poderiam ser aplicados e comprovados no mundo real. Dito de outra forma, as verdades matemáticas seriam obtidas mediante a dedução (raciocínio do matemático, razão), mas poderiam ser comprovadas empiricamente, ou seja, as proposições matemáticas são analíticas e, ao mesmo tempo, concordam com a realidade. De maneira ampla, a concepção kantiana da Matemática extrapola a dicotomia do conhecimento matemático independer da observação dos fenômenos ou se originar a partir de questões colocadas pela observação empírica.

Apesar da solução kantiana, estas duas concepções, a de que a Matemática é uma axiomática - podendo ser construída sem que necessariamente exprima o mundo real ou se origine deste - e a de que a Matemática é um exercício de observação - podendo ser desenvolvida a partir de atividades práticas, ou da experiência – são ainda atuais e reproduzem o que Piaget (1896-1980) chama de "problema central da epistemologia".

Os problemas epistemológicos da Matemática

De acordo com Piaget (1975), como o mundo das construções geométricas e analíticas extrapola o mundo real ao mesmo tempo em que concorda com ele, compreender esta correspondência e esta superação tem inspirado todas as epistemologias metafísicas desde Platão a Descartes e desde Kant a Husserl.

> A possibilidade de uma ciência matemática rigorosamente dedutiva e que ao mesmo tempo se adapte exatamente à experiência constitui, desde sempre, o problema central da epistemologia. A questão é mais perturbadora ainda do ponto de vista genético.
> De fato, por um lado a Matemática concorda com a realidade física de modo muito detalhado. Nunca sucede que o físico - por múltiplas e diversas que sejam as estruturas ou as

> relações que descobre no mundo material - encontre uma estrutura que não possa expressar-se com precisão em linguagem matemática, como se existisse uma espécie de harmonia pré-estabelecida entre todos os aspectos do universo físico e os marcos abstratos da geometria e da análise. Além disso, há algo mais: acontece que este acordo se realiza não só no momento do descobrimento de uma lei física, ou a *posteriori,* como os esquemas matemáticos antecipam, com anos de distância, o conteúdo experimental que logo será inserido neles. As formas geométricas e analíticas podem elaborar-se sem preocupação alguma com a realidade, se tem a segurança não só de que a experiência jamais poderá questioná-las, como também de que - e este é o ponto paradoxal - a experiência as levará em conta, cedo ou tarde e se adaptará perfeitamente a elas. (PIAGET, 1975, p.63).

Quando se envereda pelo caminho da análise epistemológica da Matemática surgem, além da natureza do conhecimento matemático e seu acordo com o real, outras questões igualmente intrigantes: o de ela se impor de maneira necessária, permanecendo rigorosa apesar de seu caráter construtivo, e o de sua fecundidade, apesar de partir de poucos conceitos e axiomas relativamente pobres. Estes dois últimos problemas podem ser resumidos numa única questão, a de "como é possível a Matemática?". E mais, se o desejo for unificar estes dois problemas com o que se refere ao acordo da Matemática com a realidade, a única questão a ser respondida será a da natureza dos "seres" matemáticos, e isto é surpreendente: em se tratando de uma ciência exata e rigorosa, não existe consenso sobre o que são os "seres" matemáticos.

O problema epistemológico da fecundidade da Matemática se evidencia quando se constata que estão sendo produzidos novos conhecimentos matemáticos em praticamente todos os países do mundo e, como assinalam Davis e Hersh (1986, p.35), "mesmo as chamadas nações emergentes desejam todas criar programas de Matemática atualizados nas universidades". Ainda segundo os mesmos autores (p.43), a produção matemática existente é tal que, ao final da década de 1940, von Neumann estimava que um bom matemático conseguiria saber apenas dez por cento do conhecimento disponível naquela época, o que torna razoável se perguntar se esta produção pode continuar indefinidamente, sem que haja a possibilidade de saturação.

Para analisar a questão da fecundidade, Piaget parte do pressuposto de que ela existe, o que caracteriza um problema que é, ao mesmo tempo, genético e histórico-crítico pela própria natureza das contínuas novidades que surgem em decorrência do trabalho dos matemáticos e que não são nem invenções e nem descobertas. Não são invenções porque lhes falta o grau de liberdade próprio das invenções; ao contrário, cada nova relação estabelecida ou nova estrutura determinada já traz consigo uma necessidade, uma espécie de "só poderia ser desta forma" (NOGUEIRA, 2007, p. 135). Não são também descobertas, pois não existem de antemão, como entendia Platão. Não sendo então as novidades em Matemática nem invenções e nem descobertas, "elas só podem ser construções e mais, construções necessárias, levantando, por conseguinte, a questão de seus mecanismos constitutivos" (NOGUEIRA, 2007, p. 135).

A Epistemologia Genética se encarrega de mostrar, no que se refere aos mecanismos constitutivos da construção da Matemática, a convergência existente "entre o que dizem os matemáticos e o que revela a análise dos estágios elementares" pelos quais passam os indivíduos em seu processo de desenvolvimento cognitivo, e levanta as possíveis hipóteses acerca das "raízes psicológicas e mesmo biológicas de tais construções" (PIAGET, 1990, p.78).

Na perspectiva piagetiana, do ponto de vista dos matemáticos, a fecundidade da Matemática se deve, de maneira geral, à possibilidade de introduzir, indefinidamente, operações sobre operações, além de ser possível a combinação de estruturas. Assim, por ser traduzida como uma "construção de estruturas" e pelo fato de tal construção ser indefinidamente aberta, a fecundidade da Matemática estaria estabelecida.

Dessa forma e sob esse aspecto, de acordo com Nogueira (2007), os "seres" matemáticos assumem um novo sentido, deixando de constituir uma espécie de objetos "ideais", com existência interior ou exterior ao sujeito (dependendo da corrente de pensamento) perdendo, portanto, o caráter ontológico. Em outras palavras, os objetos matemáticos, à medida que mudam de nível, mudam de função, de modo que determinados objetos matemáticos, ao deixarem de ser considerados isoladamente, passam a ser estudados como estruturas em função do relacionamento existente entre eles (por exemplo, os números inteiros, ao serem estudadas as relações existentes entre eles, dão origem ao Anel dos Inteiros); porém essas estruturas convertem-se, em um outro patamar, em objeto de teoria (o Anel dos Inteiros é um objeto de estudo da Teoria dos Grupos); e assim sucessivamente, de forma que tudo pode tornar-se um "ser", dependendo do estágio em que está sendo analisado.

Ao contrário das aprendizagens exógenas e das teorias empíricas, o próprio das estruturas lógico-matemáticas é jamais desprezar ou invalidar as precedentes, mas, sim, superá-las, integrando-as a título de subestruturas, mantendo as imperfeições iniciais dentro das fronteiras excessivamente estritas das formas de partida. A continuidade das formas gerais de coordenação é assegurada por um fenômeno análogo.

Piaget considera a Matemática como um "sistema de construções que se apóiam igualmente, nos seus pontos de partida, nas coordenações das ações e nas operações do sujeito e procedendo igualmente por uma sucessão de abstrações reflexionantes em níveis mais elevados". Dessa forma, do ponto de vista genético, para compreender o estatuto epistemológico do conhecimento matemático importa buscar nos seus primórdios, as conexões entre as estruturas matemáticas nascentes e as estruturas operatórias do sujeito. (PIAGET et al, 1980, p.339).

Embora possa ser considerada irreverência a comparação entre um matemático e uma criança, Piaget reconhece ser quase impossível negar a semelhança existente entre essa "contínua construção intencional e refletida de operações sobre operações e as primeiras sínteses ou coordenações inconscientes que permitem a construção dos números ou das medidas", bem como das adições, multiplicações, proporções, entre outras operações (PIAGET, 1990, p.80).

Tal interpretação da Matemática contraria a opinião da grande maioria dos cientistas e historiadores das ciências para os quais não existe nenhuma relação entre a formação das noções e operações em seus estágios mais elementares e a sua evolução nos níveis superiores. Esse reduzido interesse que, em geral, é dedicado aos estágios elementares é decorrente da "concepção comum de um desenvolvimento dos conhecimentos que seria linear, substituindo-se cada etapa à etapa precedente", o que levaria a um contato de cada última etapa apenas com a imediatamente anterior e nunca com as primeiras (PIAGET e GARCIA, 1987, p.17).

Como os sucessivos estádios de construção do saber matemático são seqüenciais, isto é, "cada um é, ao mesmo tempo, o resultado das possibilidades abertas pelo precedente e condição necessária do subseqüente", cada estádio começa pela reorganização, em outro patamar, das principais novidades dos níveis precedentes, o que estabelece a "integração nos estádios superiores de determinadas ligações, cuja natureza só é explicada na análise dos estádios elementares", de modo que o mecanismo essencial a esta construção é a abstração reflexionante (PIAGET e GARCIA, 1987, p.17). Assim, a Matemática se constitui em um notável exemplo de construção do saber mediante a abstração reflexionante.

De fato, historicamente falando, são três os grandes períodos de evolução da Matemática, a Matemática grega, o período entre os séculos XV e XIX e a produzida a partir do século XIX até os dias atuais, e:

> [...] o realismo grego, que apenas se ocupa dos estados permanentes (figuras e números), forneceu-nos, entretanto, um conjunto de conhecimentos prévios, necessários à descoberta das transformações algébricas e infinitesimais do século XVII, e a análise destas últimas era indispensável para que pudessem constituir-se as estruturas específicas das Matemáticas do século XIX e de hoje (PIAGET e GARCIA, 1987, p.18).

A abstração reflexionante

Matemática e abstração sempre estiveram relacionadas, tanto que, segundo Machado (1990), um dos *slogans* que caracterizam a Matemática é que "a Matemática é abstrata". Uma representação social da Matemática que, ainda segundo este autor, serve como justificativa para as dificuldades assumidas por um grande número de pessoas em relação a esta disciplina escolar.

Esta imbricação entre Matemática e abstração pode ter sua origem na crença de que a Matemática se originou não da necessidade do homem de contar os objetos, mas do processo de abstração necessário para esta contagem, isto é, do fato de o número não depender dos objetos a serem contados. Esta abstração, que se apóia, mas não depende dos objetos, é denominada por Davis e Hersh (1986) de abstração como extração e, na teoria piagetiana, de abstração pseudo-empírica. No caso das representações de entes geométricos, por exemplo, a abstração que se faz presente é a que Davis e Hersh (1986) denominam de Abstração como Idealização e, coincide com a concebida por Aristóteles.

Aristóteles já destacava a importância do processo da abstração na elaboração de conhecimentos. Por isso, para ele, as formas inteligíveis seriam extraídas por abstração a partir do mundo sensível mediante os seguintes passos: o ponto inicial é a realidade; as abstrações são feitas, a partir da base, levando em consideração as características comuns dos objetos; na elevação de um nível para o seguinte posterior, os objetos são agrupados a partir de suas classes de equivalências, e o conceito genérico - significando todas as determinações nas quais os objetos estão de acordo - é o supremo da pirâmide e diz respeito à representação abstrata da coisa ou idealização.

Já em 1950, Piaget insistia sobre a necessidade de distinguir entre dois tipos de abstração, segundo suas fontes exógenas e endógenas: uma apoiada sobre objetos, que é denominada de abstração empírica, e outra, procedente de ações ou operações do sujeito, denominada de abstração reflexionante.

A abstração empírica consiste em extrair de uma classe de objetos suas características comuns. Porém, mesmo em suas formas mais elementares, ela não se constitui apenas em puras percepções porque para se abstrair qualquer propriedade de um objeto, como seu peso ou sua cor, é necessário utilizar instrumentos de assimilação (estabelecimento de relações, significações, etc.), oriundos de esquemas sensório-motores ou conceituais, presentes no próprio sujeito e não fornecidos pelos objetos. A abstração do ponto de vista aristotélico - ou abstração como idealização como referida por Davis e Hersh - corresponde, na teoria piagetiana, à abstração empírica.

Piaget considera os aportes da abstração empírica como indispensáveis por fornecerem conteúdos de conhecimento, por permitirem controlar as antecipações e levantarem questões. Esses aportes são, todavia, secundários, pois não são eles que estão em jogo na formação de instrumentos de conhecimento (classificação lógica, as operações aritméticas, a possibilidade de combinatória, etc.), instrumentos estes que não se encontram como tais na realidade, pois são coordenações ou estruturas de atividades intelectuais do sujeito. Assim, toda abstração empírica necessita, para se efetivar, de quadros de conhecimentos que foram criados graças a uma abstração reflexionante prévia.

Por sua vez, a abstração reflexionante se apóia tanto sobre estruturas que permitem ao sujeito captar um determinado conteúdo como sobre as atividades cognitivas do sujeito (esquemas ou coordenações de ações, operações, etc.) para extrair novos caracteres e utilizá-los para outras finalidades (novas adaptações, novos problemas, etc.). Desta forma, em todos os níveis, enquanto a abstração empírica fornece os dados, a abstração reflexionante é estruturante e comporta sempre dois componentes inseparáveis:

Reflexionamento, isto é, a projeção (como por um refletor) sobre um patamar superior daquilo que é extraído do patamar inferior (por exemplo, a representação simbólica de uma ação), o que caracteriza o *continuum* da construção do conhecimento segundo a Epistemologia Genética;

Reflexão é o ato de reconstrução e reorganização sobre o patamar superior daquilo que foi transferido do inferior, ou seja, ela reconstrói sobre o novo plano B o que foi colhido no plano de partida A, ou estabelece uma relação entre os elementos extraídos de A com os já situados em B. É assim que se elaboram os conceitos ou se generalizam propriedades.

Com os seus dois componentes, a abstração reflexionante pode ser observada em todos os estágios do desenvolvimento humano. Desde o nível sensório-motor, por exemplo, o bebê já é capaz, para resolver um problema novo, de valer-se de certas coordenações de estruturas já construídas para reorganizá-las em função de novos dados. Em níveis superiores, quando a reflexão é obra do pensamento, isto é, sempre que uma abstração reflexionante se tornar consciente, ela é denominada *abstração refletida.* Na verdade, trata-se de uma reflexão consciente sobre a reflexão, enquanto aspecto da abstração reflexionante (na Matemática, por exemplo, a álgebra é o resultado de uma abstração refletida sobre a aritmética). O relacionamento entre abstração reflexionante e empírica é complexo e não simétrico, pois se a primeira se torna cada vez mais autônoma (ela é a única a operar na lógica e na Matemática puras), a segunda só avança porque se apóia sobre a primeira.

Piaget distingue ainda um outro tipo de abstração, a abstração pseudo-empírica, que embora se encontre presente na psicogênese do conhecimento matemático, não participa da elaboração do saber matemático científico. Nas abstrações pseudo-empíricas, apesar da leitura dos resultados ser feita a partir de objetos materiais, como se fossem abstrações empíricas, as propriedades constatadas são, na realidade, introduzidas nesses objetos por atividades do sujeito (por exemplo, contar pedrinhas). De fato, ela é uma variedade da abstração reflexionante, pois conta com a ajuda de observáveis exteriores, porém construídos graças a ela. Dito de outra forma, a abstração é pseudo-empírica, sempre que o objeto for modificado pela ação do sujeito e enriquecido por propriedades retiradas de coordenações já construídas por este (por exemplo, ordenar os elementos de um conjunto).

O conceito de abstração reflexionante permite mostrar a continuidade que sustenta a formação de conhecimentos mesmo por ocasião da aparição de formas novas, além de dar conta dos progressos incessantes da ciência, que podem ser produzidos, também, na ausência de experimentação.

O estudo

O estudo que relatamos é parte do projeto “A pesquisa enquanto eixo formador no curso de Licenciatura em Matemática”, desenvolvido durante os anos de 2005 e 2006, e do qual participaram as autoras e seis acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Maringá (UEM), quatro do terceiro e dois do quarto ano, que se dispuseram a participar de uma pesquisa em Educação Matemática, fato inédito até então para estes licenciandos acostumados à pesquisa em Matemática. O projeto tinha dois grandes objetivos, um dos quais era proporcionar aos acadêmicos a participação em atividades de investigação no âmbito da Educação Matemática e, o outro, analisar o impacto dessa participação em sua formação e em sua concepção de pesquisa.

O principal objetivo da investigação na qual os acadêmicos atuaram como pesquisadores foi investigar, mediante a aplicação do método clínico piagetiano, as relações entre área e perímetro em crianças e adolescentes ouvintes e surdos e em adultos escolarizados ou não, com a finalidade de compreender o conceito piagetiano de abstração reflexionante. Os acadêmicos envolvidos no projeto participaram de seminários teóricos nos quais foram abordados tópicos da teoria piagetiana, principalmente o processo da abstração reflexionante e a Epistemologia da Matemática à luz da Epistemologia Genética.

Durante a realização dos seminários, percebemos a dificuldade dos acadêmicos, não acostumados a discussões filosóficas sobre a natureza da Matemática, em estabelecer as relações entre a produção deste conhecimento e a abstração reflexionante, conforme defende Piaget. Desta forma, ampliamos as atividades do projeto e incluímos uma investigação cujo objetivo era procurar identificar a presença da abstração reflexionante ou de seus componentes (reflexionamento e reflexão) na descrição que matemáticos fazem da forma como produzem novos conhecimentos. Para tanto, foram realizadas entrevistas semi-estruturadas com seis pesquisadores da UEM nas quais se buscava levar os entrevistados a discorrer sobre o seu processo pessoal de produção do conhecimento matemático.

Os entrevistados foram escolhidos em função de terem produção sistemática e reconhecida entre seus pares, nacional e internacionalmente, e por serem oriundos de diferentes cursos de graduação e pós-graduação, inclusive no exterior, e por já terem sido pesquisadores em outras instituições. Como, além disso, possuem especialidades variadas, Matemática Aplicada; Topologia Algébrica e Análise, entre outras, esperávamos que suas respostas pudessem denotar diferentes concepções sobre a produção do conhecimento matemático.

As entrevistas foram realizadas pelos acadêmicos a partir de um roteiro do qual constavam, entre outras, as seguintes questões: O que é pesquisa em Matemática? De onde surgem os problemas ou o que os intrigam, o que os motivam a pesquisar em Matemática? O que é produzir em Matemática? Quando um objeto matemático tem significado? Quando e como é possível a criação de novos objetos matemáticos? Quando uma estrutura Matemática torna-se um objeto matemático e quando este é incorporado a uma nova estrutura? Existe criação em Matemática?

As entrevistas foram gravadas e transcritas e os depoimentos colhidos foram analisados em consonância com o objetivo proposto, ou seja, identificar, na descrição que os entrevistados fazem da forma como produzem novos conhecimentos em Matemática, a presença dos componentes da abstração reflexionante (reflexionamento e reflexão).

Os matemáticos e o processo de abstração reflexionante

Não esperávamos que nossos entrevistados tivessem familiaridade com os conceitos piagetianos em foco, motivo pelo qual baseamos nossa análise na identificação, em seus depoimentos, de falas que explicitassem as principais características da abstração reflexionante: o *continuum* dos conhecimentos, no caso do reflexionamento, e a generalização ou re-organização destes para a reflexão.

a) O reflexionamento

Nossos entrevistados, ao discorrerem sobre como são produzidos novos conhecimentos em Matemática, defendem ou a concepção platônica de que os conhecimentos já existem previamente e só precisam ser "descobertos", ou de que podem ser inventados. Isto pode ser confirmado com os depoimentos a seguir:

> *[...] eu acredito que **a Matemática já existe, que ela está aí**. **O que a gente tem que fazer é descobrir.** Quando eu falo que está aí, por exemplo, as relações já existem, as relações entre os objetos. Ninguém vai inventar, eu não acredito nisso. Ninguém inventa, por exemplo, os números complexos e nem mesmo os números, isso já existe. [...] Então a Matemática para mim não é inventada e nem criada, ela está aí, todas as relações, como na física,*

> *ninguém vai inventar a lei da gravitação, ela já existe e alguém a entendeu* (P_2).
>
> *Eu acho que a Matemática é inventada por nós. Somos seres com deficiências e assim construímos, mesmo que com toda dedicação, de maneira que falta sempre algo para completar. Não acredito que exista divindade na Matemática, que a mesma é produto disso, mas que ela é inventada por nossas mentes* (P_4).

O matemático P_5 demonstra perceber que os novos conhecimentos se apóiam em anteriores, indicando uma concepção de conhecimento como processo, e, portanto, elaborado mediante construção. Todavia, ao não ter clareza desta concepção epistemológica a situa como uma mistura entre criação e descoberta.

> *Logo eu poderia resumir para você o seguinte, você pode pegar em qualquer artigo de Matemática, você vai olhar a bibliografia e vai perceber que o matemático está fazendo no artigo alguma coisa que outro parou de fazer, ou não foi na direção que este está indo. Mas o conteúdo é algo que já foi plantado há algum tempo e que isso ai, muitas vezes, está perdido no passado. [...] É uma mistura de criação e descoberta* (P_5).

Apesar de alguns dos entrevistados terem explicitado que a elaboração do conhecimento matemático se dá por descoberta, invenção, criação, ou uma mistura delas, todos, em outros trechos de suas falas afirmam que para produzir conhecimento novo em Matemática é necessário apoiar-se em conhecimentos anteriores, o que caracteriza o reflexionamento no sentido piagetiano. É o que se pode depreender pelos destaques em negrito nos depoimentos a seguir:

> *O interessante é que na Matemática nunca se descarta o que já foi feito e demonstrado, ao contrário, você* ***sempre utiliza o anterior para ampliar um pouco mais e avançar um pouco mais*** (P_1).
>
> Quanto aos problemas, podem vir de duas maneiras em geral: **uma delas seria você já ter lido um trabalho científico**

> **e você já fechou um determinado problema e aí você questiona, será que vale para outro caso?** E em um caso mais geral? Esse é um caminho, a partir de um resultado você tenta generalizar (P_2).
>
> Pra mim (a Matemática) é um conhecimento **que permite uma divisão segundo cada afirmação posterior é baseada numa afirmação anterior**. Pode ser obtida usando lógica. **Cada afirmação posterior pode ser obtida de uma afirmação anterior.** [...] **dado o primeiro tijolo, cada um posterior é um corolário do anterior, corolário lógico** (P_3).
>
> *Tem áreas que estão em formação e assim sendo, novas descobertas* ***parecem coisas isoladas, mas que podem mais tarde ter ligações****.* ***Pode-se ter também os complementos de teorias já bem formadas*** (P_4).
>
> *[...] primeiro você tem que estar inserido numa área e saber o que está acontecendo naquele momento nesta área, senão você não vai fazer pesquisa, vai fazer apenas coisas que já foram feitas.* ***[...] Observa-se, por exemplo, determinado resultado e analisa-se se podem ser utilizadas outras técnicas mais sutis para se chegar no mesmo resultado*** (P_6).

Fica assim caracterizada a crença de nossos entrevistados na existência de um *continuum* na produção do conhecimento matemático, pois consideram o conhecimento como processo em um devir constante, o que evidencia um dos componentes da abstração reflexionante: o reflexionamento.

b) A reflexão

Ao discorrerem sobre como são produzidos novos conhecimentos em Matemática, nossos entrevistados descrevem ações que se caracterizam como re-organização de conhecimentos anteriores (estabelecimento de novas relações; novas propriedades; novos métodos de resolução para um mesmo problema; generalização de resultados), enfim, movimentos próprios da reflexão, na perspectiva piagetiana.

Isto pode ser confirmado com os depoimentos a seguir:

*Em geral, **você parte de algo que você já conhece e gostaria de melhorar.** [...] **Depois você define novas coisas, com certas propriedades que ainda não existem na Matemática e assim vai criando Matemática** [...]. **Depois com este objeto novo, vai se buscar relações com outros objetos já criados, o que perpetua o processo*** (P_1).

*Vou dar um exemplo. Fiquei sabendo há pouco tempo que surgiu uma nova teoria chamada geometria tropical, porque foi criada aqui no Brasil, em São Paulo, ela só funciona aqui por causa dos trópicos e está sendo muito utilizada. De início surgiu para problemas computacionais, nada ligado à Matemática abstrata. **Mas observou-se que determinados objetos se ligavam a outras estruturas. Então você percebe que ela tem ligações que não eram vistas a princípio, mas que hoje já são. E a combinação com estas estruturas produzem resultados próprios.** De início o pessoal falou legal, bonito, ta ali isolado. **Mas o que aconteceu foi que percebeu-se muitas ligações e que aquilo fazia parte de uma estrutura maior ainda*** (P_2).

*Sempre tem vice e versa. Um exemplo também que me vem a mente é a relação entre a Matemática e a mecânica quântica. O conceito de aceleração surgiu na época para Newton no conceito abstrato de derivada e depois se tornou um conceito puramente matemático de várias aplicações na mecânica nova. **Então de um lado, a mecânica newtoniana de início, empurrou um movimento matemático e objetos matemáticos que foram construídos, tais como a derivada e a integral, e que depois foram aplicados em outro desenvolvimento da própria mecânica*** (P_3).

*É importante que se tenha pelo menos o conhecimento suficiente para analisar e perceber outras maneiras de se observar aquele conteúdo. [...]. **O para que fazer a produção se resume a complementar coisas ainda incompletas ou solucionar outros problemas que ainda não possuem respostas*** (P_6).

[...] primeiro você tem que estar inserido numa área e saber o que está acontecendo naquele momento nesta área, senão você não vai fazer pesquisa, vai fazer apenas

> *coisas que já foram feitas.* ***[...] Observa-se, por exemplo, determinado resultado e analisa-se se podem ser utilizadas outras técnicas mais sutis para se chegar no mesmo resultado*** (P_6).

Os depoimentos deixam evidente que, para nossos entrevistados, a produção de novos conhecimentos em Matemática está intimamente ligada à re-organização, em um patamar superior, de conhecimentos anteriores, o que caracteriza a reflexão.

c) A abstração reflexionante

Os objetos matemáticos, ao deixarem de ser considerados isoladamente, passam a ser estudados como estruturas, estruturas essas que, por sua vez, convertem-se, em um outro patamar, em objeto de teoria, e assim sucessivamente. Esta possibilidade de, em Matemática, se construir indefinidamente estruturas que, por sua vez, convertem-se, em um outro patamar do conhecimento, em objeto de teoria e assim sucessivamente, implica, ao mesmo tempo, em considerar o conhecimento anterior à luz de novas condições e, então, a reorganizá-lo. Este duplo movimento, continuidade (reflexionamento) e transformação (reflexão), caracteriza a abstração reflexionante, detectada nos trechos de depoimentos que seguem:

> *[...]* ***Qualquer estrutura matemática é também um objeto de estudo, quando se tem um interessado em estudar aquilo****.* ***Esta se fortalece quando se consegue resultados interessantes com ela em outras áreas, por exemplo. Neste momento ela se estabelece completamente na Matemática (e se torna um objeto)*** (P_1).

> ***Então eu acredito que as estruturas matemáticas podem aparecer a princípio isoladas,*** *mas sou fiel de que a Matemática é tudo uma coisa só, uma coisa universal, tudo é harmonioso****. Por mais que se faça as coisas isoladas, tudo pode se juntar*** *e uma hora vai. Esse é o meu ponto de vista.* ***A combinação de estruturas faz parte de algo maior*** (P_2).

> ***Bem, as estruturas são criadas e depois podem ser aplicadas em outras teorias tornando-se um objeto desta nova teoria. Então estas aplicações servem para auxiliar na construção de novas estruturas*** (P_5).
>
> *Bem**, em algum momento toda estrutura vira ferramenta** [...] No fundo eu não consigo separar muito, **pois uma ferramenta é uma estrutura e uma estrutura é uma ferramenta. Acredito que seja como um ciclo; começa com uma estrutura a princípio "isolada" e que depois possui aplicações a outras teorias que formam novas estruturas*** (P_6).
>
> ***De início, se tem um primeiro resultado em formato simples. É a estrutura recém formada**. Depois você começa a utilizar este novo resultado em outros locais. **Começam a ocorrer aplicações ou desenvolvimentos maiores nesta estrutura**. Um bom exemplo que posso usar é a utilização que faço de alguns teoremas. Uso-os para muitas coisas, são os meus objetos ou ferramentas. No início eram de certa forma uma estrutura nova sem nenhuma aplicação* (P_4).

As falas de nossos entrevistados evidenciam que, para se avançar em Matemática, geralmente se procuram generalizações, aplicações a novas situações, mudança de condições iniciais ou novos métodos de resolução para um mesmo problema. Para dar conta desses desafios, o matemático precisa inicialmente retirar do conhecimento que já possui aquilo que deseja manter em outro nível, isto é, projetar o que deve permanecer do conhecimento anterior para um novo patamar (reflexionamento) e então reorganizar, reestruturar esse novo conhecimento, mediante as novas condições ou necessidades (reflexão). Dessa forma, o conhecimento anterior não se perde, mas fica embutido no novo, reorganizado, reestruturado e isto, desde os conhecimentos mais elementares até os mais sofisticados. Ora, reflexionamento e reflexão são os dois componentes da abstração reflexionante.

Uma vez tendo identificado a abstração reflexionante no processo de produção do conhecimento matemático pelos matemáticos entrevistados, cabe discutir agora se este fato teria implicações na elaboração do conhecimento matemático em sala de aula.

O processo de abstração reflexionante e a Educação Matemática

A ênfase atribuída aos problemas epistemológicos e a ausência de preocupações didático-pedagógicas nos estudos de Piaget acarretaram relações controvertidas e mesmo conflituosas entre a Epistemologia Genética e a educação escolar, particularmente em função do caráter geral da primeira. Desta forma, poderia parecer estranho comparar o processo de produção de conhecimento pelos matemáticos, em suas pesquisas, e a construção dos conhecimentos matemáticos escolares pelos aprendizes. Este fato é reconhecido pelo próprio Piaget:

> Ora, apesar da irreverência que pode aparentemente haver, na comparação entre um matemático e uma criança, dificilmente negaríamos um certo parentesco entre essa contínua construção intencional e refletida de operações sobre operações e as primeiras sínteses ou coordenações inconscientes que permitem a construção dos números ou das medidas, das adições ou multiplicações, das proporções, etc. (PIAGET, 1990, p.79/80).

No entanto, essa discussão é necessária quando se observa, nas aulas de Matemática, o predomínio de atividades que enfatizam a memorização de definições, de fórmulas e de regras, o treino intensivo nos procedimentos algorítmicos, em detrimento da construção dos conhecimentos - e tudo isso coexistindo, muitas vezes, com um discurso impregnado de inspiração piagetiana.

A teoria piagetiana, por descrever as leis gerais do processo de construção do conhecimento do sujeito epistêmico, possui caráter universal e, portanto, de aparente inaplicabilidade na sala de aula, habitada por sujeitos particulares confrontados com uma situação específica. Embora possa parecer complexa esta aplicação, algumas recomendações da Educação Matemática para uma ação pedagógica que extrapole o paradigma da transmissão de conteúdos e da seqüência de apresentação euclidiana dos conhecimentos matemáticos (exemplos e exercícios), traduzem para a sala de aula, mesmo que de maneira implícita, a essência do processo de abstração reflexionante.

De fato, se a abstração reflexionante se apóia, como dito anteriormente, sobre todas as atividades cognitivas do sujeito (esquemas ou coordenações de ações, operações, conhecimentos já elaborados, etc.), para delas retirar novos caracteres e utilizá-los para outras finalidades (novas adaptações, novos problemas, novos conceitos, etc.), traduzir isto para a sala de aula significa nada mais nada menos do que seguir a orientação de "partir do conhecimento prévio" do aluno, ou seja, considerar o seu "repertório matemático" como ponto de partida para a elaboração de novos conhecimentos.

Uma dificuldade para uma ação pedagógica fundamentada neste pressuposto pode estar em conhecer o "repertório matemático" dos alunos. Para isso, é necessária uma diagnose inicial que pode ser concretizada mediante a proposição, em sala de aula, de atividades exploratórias relacionadas ao novo conceito que se pretende apresentar. A observação criteriosa dos alunos enquanto estes se desincumbem da tarefa proposta e a análise de suas produções permitem ao professor apreender seus conhecimentos e suas dificuldades.

Outra dificuldade é saber utilizar os conhecimentos já construídos pelo aluno como ponto de partida para as novas construções, de modo a, em linguagem piagetiana, provocar o reflexionamento, que é um componentes da abstração reflexionante. Para isso, as hipóteses, elementos ou condições envolvidos nas atividades exploratórias devem ser modificados ou ampliados de maneira a provocar o necessário desequilíbrio que desafie o aluno a refletir sobre o conhecimento elaborado, projetando-o para um patamar superior.

Uma vez estando construído o novo conhecimento, porém numa situação particular e contextualizada, o mesmo deve ser reorganizado para adquirir seu caráter geral e poder ser aplicado a outras situações, ou seja, realizar a reflexão, segundo a teoria piagetiana. Esta reorganização, que se dá pela consideração dos invariantes percebidos em cada uma das atividades realizadas e pelo estabelecimento de relações entre os conhecimentos anteriores e os em construção, pode ocorrer quando o professor apresenta exemplos de situações já conhecidas, porém que devem ser referenciadas ao tema em questão, ou quando, em conjunto com o aluno, formaliza os conhecimentos construídos. É assim que as generalizações, propriedades e conceitos são elaborados. A consciência deste conhecimento decorre do que Piaget chama de abstração refletida, que é a reflexão sobre a reflexão, ou a capacidade de expressar, de maneira escrita, oral ou pictórica, os conhecimentos construídos.

Diferentes tendências da Educação Matemática, como as Investigações Matemáticas, a Modelagem e a Resolução de Problemas por proporem situações que desafiam os alunos a questionar seus conhecimentos, de maneira a adaptá-los, complementá-los, reorganizá-los, generalizá-los, favorecem o processo de abstração reflexionante e possibilitam, a exemplo do relatado por nossos entrevistados, a construção de novos conhecimentos pelos estudantes.

Referências

DAVIS, P. J.; HERSH, R. **A experiência matemática**. 3 ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1986.

MACHADO, N. J. **Matemática e realidade**: análise dos pressupostos filosóficos que fundamentam o ensino da Matemática. 6. ed. São Paulo: Cortez, 2005.

MACHADO, N. J. **Matemática e língua materna**: análise de uma impregnação mútua. São Paulo: Cortez, 1990.

NOGUEIRA, C. M. I. **Classificação, seriação e contagem no ensino do número**: um estudo de Epistemologia Genética. Marília: Oficina Universitária Unesp, 2007.

OMNÉS, R. **Filosofia da ciência contemporânea**. São Paulo: EDUNESP, 1996.

PIAGET, J. **Epistemologia genética**. São Paulo: Martins Fontes, 1990.

PIAGET, J. **Introduccion a la epistemologia genética:** el pensamiento matemático. Buenos Aires: Paidós, 1975. v. 1

PIAGET, J. et al. **Lógica e conhecimento científico**. Porto: Civilização, 1980.

PIAGET, J.; GARCIA, R. **Psicogênese e história das ciências**. Lisboa: Dom Quixote, 1987.

Aprovado em janeiro de 2008
Submetido em setembro de 2007