O Desafio de Substituir Letras por Números: que conteúdos e estratégias podem ser desenvolvidos?

The Challenge of Replacing Letters with Numbers: What contents and strategies can be developed?

Helena Noronha Cury[1]

Maria Laura Feipe Bugarín Sampaio[2]

Resumo

Neste artigo, apresentamos um tipo de desafio matemático denominado criptaritmética, que consiste na substituição de letras por números. Consideramos tais desafios como problemas, porque não há fórmulas prontas para resolvê-los, sendo necessário utilizar estratégias de resolução de problemas. Buscamos fundamentação em autores como Polya, Schoenfeld e Guzmán, que discutem tais estratégias, listando algumas de suas sugestões. A seguir, exemplificamos a solução desses problemas, detalhando o raciocínio empregado e, a partir de um caso mais simples, sugerimos uma atividade a ser proposta a alunos de Ensino Fundamental. A atividade sugerida envolve um grupo de professores e alunos, de modo que cada participante possa pensar sobre substituições de letras por números em vários conteúdos, olhar criticamente e ser desafiado, em uma tentativa de fazer da resolução de problemas algo mais do que exercícios rotineiros. Concluímos tecendo considerações sobre a necessidade de levar novos tópicos, como a criptaritmética, para cursos de formação de professores, para que os futuros mestres tenham condições de elaborar ou adaptar atividades que possam auxiliar os estudantes a desenvolver a criatividade.

Palavras-chave: Desafios Matemáticos. Estratégias de Resolução de Problemas. Criptaritmética.

Abstract

In this paper we present a kind of mathematical challenge called cryptarithmetic, which consists of the replacement of letters with numbers. We consider such challenges as problems, because there are no ready formulas to solve them, making it necessary to use problem solving strategies. We seek theoretical support from the writings of authors like Polya, Schoenfeld and Guzmán who discuss such strategies, listing some of their suggestions. We also give a few examples of solutions, detailing the reasoning employed, and suggest an activity for middle school students based on a simpler case. The activity suggested is designed for a group of teachers and students, in such a way that each participant can think about replacing letters with numbers, look at them critically and be challenged, so that he/she may experience problem solving as something more interesting than working on routine exercises. We conclude with some comments on the need to introduce new topics, like cryptarithmetic, to teacher education courses, so that future teachers may become more capable of inventing or adapting activities that would help students to develop creativity.

Keywords: Mathematical Challenges. Problem Solving Strategies. Cryptarithmetic.

Introdução

[1] Doutora em Educação, Professora da Faculdade de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul/ PUCRS. Endereço para correspondências: Avenida Ipiranga, 6681. Porto Alegre, RS. CEP: 90619-900. curyhn@pucrs.br

[2] Licenciada em Matemática, Mestre em Educação em Ciências e Matemática. Endereço para correspondências: 631, Sierra Vista LN, Valley Cottage, NY. Zip Code 10989. laurafsam@optonline.net

Para tornar a Matemática mais “aceitável” para aqueles que a ela não se dedicam profissionalmente – e aqui se incluem os alunos da Educação Básica e a maior parte dos estudantes de cursos superiores - muitos matemáticos e professores de Matemática têm se esforçado em encontrar conteúdos interessantes, metodologias ou recursos novos. Martin Gardner, matemático americano que por muitos anos foi responsável por uma coluna de passatempos matemáticos na revista *Scientific American*, introduz mais uma obra sobre recreações matemáticas com a seguinte frase: “Um professor de matemática, não importa quanto goste de sua disciplina ou quão forte seja seu desejo de comunicá-la, está perpetuamente enfrentando uma esmagadora dificuldade: como conservar seus alunos acordados?” (GARDNER, 1975, p. ix). Continuando suas observações, o mesmo autor conclui que a melhor maneira de fazer com que a Matemática seja interessante para os alunos e leigos é abordá-la com jeito de jogo. E no que ele chama de “jogo”, encontram-se passatempos, quebra-cabeças, paradoxos, enigmas, desafios.

Outro autor que se dedicou a escrever um livro de diversões matemáticas, David Aguilar (1981), em um posfácio divertido sugere aos leitores que o livro se converta em um elemento, na mesinha de cabeceira, tal como o despertador e o sonífero. Ou seja, que sirva para despertar o interesse, mas também para relaxar ou induzir o sono.

Na contra-capa de dois livros da Coleção “O prazer da Matemática”, da Editora Gradiva, de Lisboa (GUZMÁN, 1990; BERLOQUIN, 1991), encontramos uma frase atribuída a Leibniz: “Não há homens mais inteligentes do que aqueles que são capazes de inventar jogos. É aí que o seu espírito se manifesta mais livremente. Seria desejável que existisse um curso inteiro de jogos tratados matematicamente."

Dessa forma, é razoável supor que os estudantes possam se interessar por problemas curiosos, desde que sejam apresentados de uma forma que lhes chame a atenção, que os desafie ou que traga elementos do cotidiano com um toque de *non-sense*, recurso comum em piadas, por exemplo, em que o não-esperado faz a diferença na hora da conclusão da história. Nossa dificuldade, como professores de Matemática, é encontrar o meio-termo entre uma atividade que desperte a curiosidade, desafie o estudante e, ao mesmo tempo, lhe permita construir um conhecimento novo ou desenvolver estratégias de resolução de problemas. Na busca de soluções, não necessariamente são exigidas fórmulas ou equações, mas, ao propor tais atividades aos alunos, acreditamos ser fundamental colocar uma dose de curiosidade, outra de bom senso e completar com uma medida cheia de raciocínio lógico. E deixá-los saborear a mistura!

Os desafios de substituir letras por números e a resolução de problemas

Em vários livros que envolvem Matemática como diversão, encontramos um certo tipo de quebra-cabeça que compreende contas de adição, subtração, multiplicação ou divisão, cujos elementos não são números, mas letras. O desafio consiste em descobrir os valores numéricos associados a cada letra, de modo que o resultado esteja correto. Esse tipo de problema envolve conteúdos de Teoria dos Números, importantes para qualquer nível de ensino, mas também propicia uma excelente oportunidade de desenvolver estratégias de resolução de problemas.

Um desafio matemático em que há uma correspondência biunívoca entre os números e as letras (ou símbolos) substituídos é também chamado de "criptaritmética"[3]. A palavra foi introduzida em uma revista belga de Matemática recreacional, em 1931. (LOGICVILLE, 2005). A criptaritmética pode ser considerada sob a ótica da criptografia[4], mas nesse caso necessitamos buscar outros conhecimentos, como linguagens de programação, ou relacioná-la com outras áreas, como espionagem, segurança nacional, proteção às transações comerciais pela Internet, etc. O tema é muito amplo e pode ser abordado, por exemplo, historicamente, a partir das primeiras tentativas de codificar mensagens (KAHN, 1996; SINGH, 2001), ou literariamente, como faz Brown (2005), no *best-seller* "Fortaleza Digital", em que o autor envolve criptógrafos em uma aventura que mistura terrorismo e informática.

Nosso interesse, neste artigo, é discutir as possibilidades de uso de criptaritmética em aulas de Matemática. Vamos chamar este tipo de desafio de "substituição de letras por números" e considerá-lo um *problema*, para o qual não temos uma fórmula pronta e para cuja solução precisamos usar estratégias para solucioná-lo. O desafio maior, no caso dos problemas de substituição de letras por números, é a possibilidade de fugir da rotina exasperante dos simples exercícios rotineiros, como bem indica Polya (1972, p. 8):

> Devo confessar que não me sinto cômodo quando escuto uma pessoa que fala da resolução de problemas e não pode discriminar se são rotineiros ou não. E me sinto particularmente incômodo quando a conduta total da pessoa que fala me desperta a suspeita de que ela nunca resolveu um problema não rotineiro.

Em sua obra clássica, *A Arte de Resolver Problemas*, Polya (1978) apresenta quatro fases de resolução: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do

---

[3] Agradecemos ao colega Antonio José Lopes pelos comentários sobre criptaritmética na lista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) cujo endereço é sbem-l@rc.unesp.br, que nos levaram a escrever este artigo.

[4] Palavra derivada de "kriptos", oculto, e "graphein", escrever. (SINGH, 2001).

plano e retrospecto da solução encontrada. Para cada uma das fases, aponta uma lista de indagações e sugestões que o solucionador deve seguir para chegar ao resultado. Ao definir os termos usados no livro, Polya introduz a expressão “Heurística Moderna”, que, segundo ele, “[...] procura compreender o processo solucionador de problemas, particularmente as *operações mentais*, *típicas* desse processo, que tenham utilidade” (POLYA, 1978, p. 87 – grifo do autor).

Schoenfeld (1980, p. 795), ao descrever habilidades de resolução de problemas, fala em estratégia heurística, que define como “[...] uma sugestão ou técnica geral que auxilia os solucionadores de problemas a compreender ou resolver um problema”. No mesmo artigo, o autor aponta uma lista de heurísticas freqüentemente usadas, que são, na verdade, as sugestões e indagações de Polya, com outra roupagem. De forma semelhante a Polya (1978), Schoenfeld (1980) divide as heurísticas segundo a fase de resolução do problema: análise, exploração e verificação.

Para a análise, esse autor sugere, por exemplo: a) escolher valores especiais para exemplificar o problema e entender o que acontece; b) examinar casos-limite, para explorar o domínio de possibilidades. Para a exploração do problema, sugere: a) substituir condições por outras equivalentes; b) recombinar os elementos de maneiras diferentes; c) introduzir elementos auxiliares; d) reformular o problema, supondo que se obteve uma solução e determinando suas propriedades; e) construir um problema análogo com menos variáveis; f) tentar explorar problemas relacionados, que tenham formas, dados ou conclusões similares.

Schoenfeld (1980) propõe, ainda, algumas indagações que o solucionador deve se fazer para verificar a solução encontrada: a) todos os dados pertinentes foram usados? b) a solução está de acordo com estimativas razoáveis? c) a solução pode ser obtida de outra forma?

Psicólogos cognitivistas, trabalhando sob o enfoque do processamento da informação, analisam os processos mentais envolvidos na resolução de problemas, muitas vezes trazendo as diferenças entre os novatos e os especialistas.[5] Chi e Glaser (1992) citam estratégias estudadas na solução de jogos e desafios, como o xadrez, a Torre de Hanói, o problema dos missionários e canibais e os problemas criptaritméticos. Entre essas estratégias, apontam a análise meios/fins em que a idéia geral é “[...] descobrir que diferenças existem entre o estado inicial atual e o estado desejado, e então descobrir operações que as reduzam” (CHI;

[5] De certa forma, pode-se dizer que Hadamard (1945), analisando o processo de invenção no campo da Matemática, com exemplos de como matemáticos e cientistas famosos chegaram às suas descobertas, foi um precursor nesses estudos.

GLASER, 1992, p. 259); o estabelecimento de sub-objetivos, que consiste em “[...] escolher um estado intermediário no trajeto da solução, para alcançar um objetivo temporário” (CHI; GLASER, 1992, p. 260); o gerar e testar, que consiste em “[...] gerar um conjunto de possíveis soluções para um determinado problema diretamente, e depois testa-las uma de cada vez para ver se é a solução correta” (CHI; GLASER, 1992, p. 262).

Johsua e Dupin (1999), ao revisar marcos referenciais psico-cognitivos para a Didática das Ciências e da Matemática, comentam os trabalhos de teóricos do processamento da informação, mas criticam certas heurísticas consideradas gerais. Por exemplo, ao mencionar a estratégia análise meios/fins, esses autores julgam ser possível “[...] que se disponha de critérios para julgar a validade de um resultado sem que sua natureza exata seja conhecida de antemão: o objeto do problema é definir o fim ao mesmo tempo em que este é atingido. Encontrar uma solução de uma equação é um problema desse tipo” (JOHSUA; DUPIN, 1999, p. 86). No entanto, consideramos que as estratégias são apresentadas de uma forma geral para que sejam analisadas ou empregadas quando conveniente; além disso, resolver uma equação não é, em princípio, um “problema”, na acepção em que estamos usando esta palavra, neste artigo.

Outro autor que oferece estratégias para resolver problemas é Guzmán (1990) e com sua lista, em linguagem simples, ele se dirige ao leitor que vai se defrontar com os problemas apresentados no livro: “[...] minha atenção é ajudar-te a calçar os sapatos dos grandes pesquisadores da matemática e a olhar através da sua lupa, o que será, geralmente, olhar através de algumas destas estratégias que te apresento” (GUZMÁN, 1990, p. 13).

Os conselhos de Guzmán lembram, também, as sugestões de Polya e as heurísticas de Schoenfeld. Para começar, sugere: antes de fazer, tente entender. A seguir, lista as estratégias segundo três fases de resolução do problema, que podemos sintetizar como: busca, exploração e reflexão, as mesmas apontadas por Schoenfeld. Resumindo as sugestões de Guzmán, temos algumas que podem ser lembradas facilmente, por sua formulação simples: procurar semelhanças com outros problemas; começar pelo mais fácil; procurar regularidades; fazer um esquema; modificar o problema; escolher uma notação favorável; usar redução ao absurdo; visualizar a solução final; explorar as idéias que deram certo; revisar os passos dados na resolução, para entender como foi possível resolver o problema ou, em alguns casos, porque não se chegou à solução; tentar uma simplificação da solução; entender como funcionou o método empregado, para poder usá-lo de novo.

Tendo revisado as idéias de alguns teóricos que abordaram as estratégias de resolução de problemas, vamos, a seguir, exemplificar seu uso.

Alguns exemplos de problemas de substituição de letras por números

Partindo do pressuposto de que os desafios do tipo “substituir letras por números” são problemas, no sentido dado por Polya (1975)[6], vamos apresentar alguns exemplos, para verificar as estratégias que podem ser desenvolvidas. Um dos mais conhecidos desafios deste tipo foi estudado por Newell e Simon (1972) e pode ser apresentado com o seguinte enunciado:

Sabendo que D=5, substitua as dez letras diferentes das palavras abaixo pelos algarismos de 0 a 9, de forma que a soma esteja correta:

$$\begin{array}{r} \mathit{DONALD} \\ +\ \underline{\mathit{GERALD}} \\ \mathit{ROBERT} \end{array}$$

Na resolução de um problema desse tipo, não há regras para iniciar; é necessário ver o desafio como um todo e reconhecer regularidades. Evidentemente, a primeira providência é substituir D por 5, o que nos faz descobrir, imediatamente, que T vale 0. Qual o próximo passo? Na visão do todo, notamos que O+E=O, o que lembra a propriedade do elemento neutro da adição e pode nos fazer pensar que E seja 0. Mas já temos a letra T que vale 0, portanto vamos evocar outras propriedades da operação de adição, que nos levam a 9+n=10+(n-1), com 0≤n≤9; assim, para que O+E=O, é necessário que N+R=B seja maior que 10, de forma que tenhamos 1+O+E=O, o que nos leva a E=9. Uma nova visão do todo nos faz perceber que A+A=E=9; como 2A é par, novamente entendemos que L+L=R>10, para que tenhamos 1+2A=9 e A=4.

Voltamos mais uma vez ao esquema original, agora já com algumas letras determinadas:

$$\begin{array}{r} 1\,1\quad 1\,1\ \ \\ 5ON4L5 \\ +\ \underline{\mathrm{G\,9\,R\,4\,L5}} \\ \mathrm{ROB\ 9\ R0} \end{array}$$

Notamos que 1+2L=R; por outro lado, 1+5+G=R e R<10 (pois a soma original tem apenas 6 algarismos). Se 6+G=R e R<10, temos as possibilidades para R: 7 ou 8 (pois já sabemos que G não pode ser 0 e que 9=E). Se R=7, temos 1+2L=17 , 2L=16 e L=8; se R=8, assim 1+2L=18, ou seja, 2L=17, o que é impossível. Logo, R=7 e L=8.

---

[6] “[...] ter um problema significa: *buscar conscientemente alguma ação apropriada para conseguir um propósito claramente concebido, mas não imediatamente alcançável*.” (POLYA, 1975, p. 4 – grifo do autor).

Com isso, descobrimos que G=1 (pois 1+5+G=7). Fazendo um retrospecto parcial, quais números já foram determinados? T=0, G=1, A=4, D=5, R=7, L=8, E=9. Faltam apenas os números 2, 3 e 6. Se N+7=10+B (porque "vai 1"[7] para a coluna à esquerda), então N=3+B e, evidentemente, N=6 e B=3. Com isso, temos O=2 e está resolvido o desafio[8]:

$$\begin{array}{r} 526485 \\ +\ 197485 \\ \hline 723970 \end{array}$$

Quais conteúdos e estratégias foram envolvidos? O conhecimento do sistema de numeração de base 10; as propriedades dos números naturais; as propriedades associativa, comutativa e do elemento neutro da adição de naturais; a relação de ordem nos naturais; o raciocínio lógico, com argumentos do tipo $p \rightarrow q$, $p \mid q$ (*modus ponens*) ou $p \rightarrow q$, $\sim q \mid \sim p$ (*modus tollens*).[9]

Em termos de estratégias, reconhecemos regularidades; examinamos casos-limite; modificamos o problema, a cada novo resultado obtido; visualizamos a solução final e revisamos os passos para verificar até onde já havíamos chegado; no final, fizemos um retrospecto, para testar a solução obtida.

Com essa base, podemos pensar em outros desafios do mesmo tipo, nos quais outros elementos de Teoria dos Números podem ser introduzidos. Talvez o problema mais conhecido, publicado em 1924 (LOGICVILE, 2005), seja a historinha do rapaz que, tendo viajado para um país de língua inglesa para estudar, vê-se sem dinheiro e resolve enviar ao pai uma mensagem de forma criativa, para mostrar que estava progredindo nos estudos da língua:

$$\begin{array}{r} \text{S E ND} \\ +\ \text{MORE} \\ \hline \text{MONEY} \end{array}$$

Se letras diferentes forem substituídas por número diferentes, a pergunta é: quanto dinheiro queria o rapaz?

[7] A expressão "vai 1" foi usada, como abuso de linguagem matemática, para que não se perca o caráter coloquial do raciocínio apresentado.

[8] Uma possibilidade de resolver o problema por tentativa e erro é encontrada em: http://www.geocities.com/Athens/Agora/2160/puzzle52.html

[9] Um argumento é um conjunto de sentenças em que uma delas (a conclusão) é conseqüência das outras (as premissas). Um argumento é válido quando a verdade das premissas é incompatível com a falsidade da conclusão. Entre os argumentos chamados simples ou elementares, estão o *modus ponens* (se *p* então *q*, *p*, logo *q*) e *o modus tollens* (se *p* então *q*, *não q*, logo *não p*) (HEGENBERG, 1966).

Um exame inicial mostra que são 8 os números a serem descobertos e que $M=1$. Neste caso, tentativa e erro serão usados com mais freqüência, pois não temos “dicas” imediatas. Podemos examinar $S+1\geq 10$; neste caso, teremos $S\geq 9$, o que determina $S=9$ e $O=0$. Mas, essa conclusão implica em que $E+0=N<10$ e isso só é possível se tivermos “vai 1” na coluna das centenas, determinando que $1+E+0=N$, ou seja, $E+1=N$. Portanto, na coluna das dezenas, temos $E+1+R=10+E$, o que nos leva a $R=9$, o que é absurdo, pois já temos $S=9$. Assim, concluímos que “vai 1” na coluna das dezenas e temos $1+E+1+R=10+E$, o que nos leva a $R=8$.

Recapitulando, temos: $O=0$, $M=1$, $R=8$ e $S=9$. O que nos falta? Atribuir às letras que restam (D,E,N,Y) os números 2, 3, 4, 5, 6 ou 7. Mas vemos que $D+E=10+Y$. Assim, $Y=D+E-10$, o que nos permite fazer tentativas, sabendo que Y tem que ser maior do que 1 (porque já temos 0 e 1) e portanto, $D+E$ tem que ser maior do que 11. Mas, adicionando dois a dois os números que sobram, temos somente as seguintes possibilidades: $5+7$ ou $6+7$.

Se $D=5$ e $E=7$, temos que $E+1=N=8$, o que é absurdo, pois já temos $R=8$; se $D=7$ e $E=5$, obtemos $N=6$ e $Y=2$, o que torna a adição verdadeira. Mas temos que verificar se é única a solução. Tentemos, então, a única possibilidade que sobra (pois $D=6$ e $E=7$ leva ao mesmo absurdo de obter $N=8$): $D=7$ e $E=6$. Mas, desse modo, teremos $N=7$, o que também é absurdo, pois não podemos ter letras iguais. Com isso, concluímos a busca, descobrindo que o rapaz estava pedindo ao pai 10.652 unidades monetárias.

Que conhecimentos foram usados? Novamente, o sistema de numeração de base 10; as propriedades das operações nos naturais; a relação de ordem nos naturais; os argumentos lógicos. Quanto às estratégias, desta vez fizemos uso do raciocínio indireto várias vezes, recombinamos os elementos, modificamos o problema a cada resultado obtido e entendemos como funciona a solução, para poder usá-la novamente. Em geral, estes desafios exigem um ir-e-vir constante entre as diversas tentativas, até concluirmos a solução, com a testagem da resposta.

Nesses dois exemplos, apresentamos minuciosamente uma maneira de solucionar, para mostrar os passos envolvidos. Baseamo-nos em Polya (1978), que apresenta um problema de Geometria para exemplificar as suas sugestões; em Lakatos (1978), que constrói toda a obra em notas de rodapé que tratam de um problema cuja resolução é esmiuçada com os alunos; e em um exemplo apresentado por McGivney e DeFranco (1995), de uma demonstração em Geometria Plana, *à la Pólya*, como dizem os autores. Evidentemente, a forma de resolver varia de pessoa para pessoa, mas, em linhas gerais, há um padrão de “ataque” para este tipo de problema, que consiste, principalmente, em analisar cuidadosamente os elementos dados. Como diz Guzmán (1990), antes de fazer, é necessário entender o que se quer.

Se simplificarmos as condições (usando menos letras ou mais dados preliminares) dos desafios de substituir letras por números, podemos explorar conteúdos de Ensino Fundamental ou Médio; já no Ensino Superior, em um curso de Licenciatura em Matemática, podemos aprofundar conceitos de Teoria dos Números, nesses ou em outros desafios do mesmo tipo. Assim, vamos, a seguir, propor algumas atividades que podem ser usadas em salas de aula de Ensino Fundamental.

Uma proposta de atividade para explorar os desafios de substituir letras por números

Em um livrinho para crianças, Sachar (1989) apresenta desafios divertidos e ensina a resolvê-los, misturando problemas de lógica e criptaritmética. O autor começa o livro contando a história de uma menina que se espanta com os problemas propostos pela professora, pois esta mistura aritmética e ortografia. Em um primeiro momento, a professora pergunta à turma: "quanto é elf+elf ?"[10] A menina fica surpresa, alguns alunos pensam um pouco e finalmente alguém responde: "fool". Temos, então, a conta:

$$\begin{array}{r} \text{elf} \\ +\ \text{elf} \\ \hline \text{fool} \end{array}$$

Com esta resposta, a professora começa, então, a resolver o problema, mostrando que f=1 e que, se temos f+f, já sabemos que l=2. Dessa forma, na casa das dezenas, temos l+l=o, ou seja, 2+2=4, descobrindo o valor da letra "o". Finalmente, se e+e=14, temos e=7. Como dissemos antes, se simplificarmos o problema, usando menos letras e mais condições iniciais (o fato de somar palavras iguais), podemos aplicá-lo em uma aula de Ensino Fundamental.

O que chama a atenção nessa narrativa de Sachar (1989)? O fato de que a professora não dá a resposta, ou seja, quando ela lança a pergunta, "[...] não há nenhuma maneira de adivinhar a resposta exata que ela está procurando. Você tem que esperar que alguém dê a ´resposta`. Então, você pode calcular a solução numérica para o problema." (SACHAR, 1989, p. 7).

Esta idéia nos leva a propor uma atividade para alunos de 7ª ou 8ª série, procurando interagir com professores de outras disciplinas e buscando uma maior motivação para a "brincadeira". Podemos propor aos colegas da nossa escola a criação de um grupo, que vai

[10] Vamos conservar as palavras originais em inglês, mas uma sugestão de problema adicional seria a elaboração de desafios do mesmo tipo, com palavras em português.

trabalhar em conjunto para elaborar situações que convidem o aluno a construir desafios de substituir letras por números, sugerindo mensagens interessantes a serem expressas. O objetivo não é avaliar o desempenho dos alunos em um processo de resolução de problemas matemáticos, mas desenvolver ações relativas a situações problematizadoras, num trabalho conjunto professor-aluno, de modo que cada um dos envolvidos possa pensar sobre tais situações, olhá-las criticamente e ser desafiado, em uma tentativa de fazer da resolução de problemas algo mais do que exercícios rotineiros.

Essa atividade pode ser feita paralelamente às atividades da série ou integrada às atividades propostas por disciplinas, não necessariamente da área de exatas. Cada professor pode solicitar aos alunos a criação de um desafio; o professor de Língua Portuguesa pode indicar o estudo de pronomes, como em "eu + tu = nós"; o professor de Ciências pode sugerir a elaboração de uma "conta" com nomes de animais; o professor de Geografia pode indicar "operações" com nomes de cidades do Estado em que se localiza a escola; e assim por diante.

Os estudantes, trabalhando em grupos, podem se responsabilizar pela criação de um desafio, para ser aplicado a alunos de outras turmas ou séries, com palavras referentes a um determinado assunto, e tentar propor uma "resposta" que tenha sentido. Dessa maneira, estaremos, também, potencializando e dinamizando formas de registro e de comunicação entre um número maior de alunos, exercitando o diálogo e a argumentação no momento de expor estratégias de resolução.

No livro de Sachar (1989), a menina que se espantava com os desafios criptaritméticos resolve propor a substituição das letras de "one+one=two" por números. Mas, após dar uma "dica" para os leitores – *a letra "o" indica um número par ou ímpar?* – o autor comenta que os outros desafios propostos pela menina – "one+two=three", "five+two=seven", etc. – são todos impossíveis. Assim, é importante que os alunos saibam, desde o início, que alguns problemas desse tipo não têm solução e que o desafio maior é criar alguns que sejam possíveis de resolver.

Borba e Villarreal (2005, p. 34 – tradução nossa), ao tecer considerações sobre resolução de problemas, citam Polya, que a considera uma prática que "[...] implica o engajamento dos estudantes em atividades que os façam viver a cultura matemática, a experimentar a descoberta matemática". Nesse sentido, consideramos que a atividade sugerida para os alunos do Ensino Fundamental permite que o professor de Matemática não explique o conteúdo específico envolvido nos desafios, mas "[...] guie os estudantes na busca dos conteúdos matemáticos para resolver o problema" (BORBA; VILARREAL, 2005, p. 34-35 –

tradução nossa), o que lhes permitirá compreender aspectos do sistema posicional de numeração que são fundamentais para a aprendizagem de Álgebra.

Nos conteúdos das outras disciplinas, os alunos terão que buscar, com os professores, em livros, na Internet, informações que lhes permitam construir os desafios com significado; por exemplo, se usarem nomes de cidades, o professor poderá analisar como os estudantes entenderam as relações geográficas, socioeconômicas, culturais, que envolvem a "resposta" proposta.

A escolha de idéias criativas, com base em raciocínio lógico, pode mostrar aos alunos e professores que nem todos os problemas trabalhados em aula precisam estar atrelados a um algoritmo ou a um único método de resolução, o que permitirá o debate entre as diversas propostas e o desenvolvimento da capacidade de argumentação. Essa proposta de atividades não considera como foco principal o conteúdo, mas a iniciativa dos alunos em propor situações diferentes e contextualizadas. Estas, por sua vez, exigem deles e dos professores uma organização e compreensão diferenciada das informações e dos conteúdos, pois devem ser pertinentes as propostas por eles formuladas.

Nessa proposta de atividade para explorar as substituições de letras por números, é preciso que alunos e professores se engajem em um trabalho sem cobranças, em que os conteúdos trabalhados – tanto os matemáticos quanto os das demais disciplinas – não sejam objeto de testes ou exames, que, conforme D´Ambrosio (2005, p.106), "[...] são instrumentos de intimidação, para conduzir o educando aos desígnios do educador. A criatividade e a individualidade do educando são ignoradas".

Efetivamente, a proposta leva em conta que professores e alunos podem se conscientizar sobre suas formas de pensar, pois as barreiras rígidas da autoridade se esvaem, no momento em que os professores mostram suas dificuldades e os alunos, muitas vezes, conseguem resultados mais rapidamente. Vianna (2002), ao refletir sobre o uso da história da Matemática associada à resolução de problemas, tece comentários que vêm ao encontro do que pensamos sobre a avaliação:

> Usar a resolução de problemas em sala de aula implica em uma mudança de hábitos antigos no que diz respeito à realização de provas e ao modo de corrigir. Em primeiro lugar, falemos da correção: perde sentido a forma tradicional de considerar os resultados "certos"; é necessário levar em conta fatores como a capacidade de formular perguntas, de fazer conjecturas, do uso de diferentes estratégias, a interpretação dos resultados e as possibilidades de fazer generalizações (VIANNA, 2002, p. 404)

Considerações finais

Neste artigo, partimos de algumas considerações sobre desafios matemáticos e, em especial, sobre os problemas de substituir letras por números – a criptaritmética -, revisamos idéias sobre resolução de problemas e estratégias, exemplificamos esses desafios e propusemos uma atividade para alunos de Ensino Fundamental. No entanto, essa proposta não se sustenta se o professor de Matemática continuar enfocando o ensino dessa disciplina com uma visão fragmentada sobre os conteúdos. Muitas vezes, alunos de Metodologia do Ensino de Matemática ou de Prática de Ensino, em cursos de Licenciatura em Matemática, se surpreendem, ao iniciar suas práticas pedagógicas, por encontrar, em escolas de Educação Básica, professores que não aceitam trabalhar com propostas novas e, inclusive, rechaçam o trabalho do estagiário, se ele traz alguma idéia que possa desestabilizar suas certezas ou levá-lo a abandonar a "muleta" do livro-texto tradicional.

Os estudantes, muitas vezes, percebem o trabalho com resolução de problemas como uma tarefa específica da Matemática, que indica o término do estudo de algum assunto. Procuram solucionar essas situações, tendo em mente a aplicação de propriedades e algoritmos, embora, em alguns momentos, não identifiquem ou compreendam, com segurança, os dados disponíveis. No entanto, entendem, como desafio, encaixar os dados do problema num modelo de resolução, considerado "padrão". Na maioria das vezes, solicitam a atenção do professor, para conferir resultados, deixando de lado discussões de alternativas de resolução, mesmo quando este os incentiva a isso.

O professor, por sua vez, em muitas ocasiões encontra-se preso à idéia de que trabalhar com problemas significa propor situações em que o aluno possa desenvolver a habilidade de identificar operações apropriadas, enfocando palavras-chave e aplicando métodos ou procedimentos adequados, de modo a obter uma resposta correta. Dessa maneira, acaba oferecendo atividades "prontas", selecionadas de livros didáticos ou construídas por ele, nem sempre levando em conta o interesse do aluno.

Ao propor atividades com substituição de letras por números, sabemos que não é fácil sua execução, porque não têm respostas prontas e podem levar o professor a errar, o que, em uma concepção de Matemática como domínio das certezas absolutas, não é aceitável por muitos docentes. Onuchic e Allevato (2004, p.223), ao enfatizar os aspectos didáticos da resolução de problemas, apontam essas dificuldades:

> Não há dúvida de que ensinar com problemas é difícil. As tarefas precisam ser planejadas ou selecionadas a cada dia, considerando a compreensão dos alunos e as necessidades do currículo. [...] Se há um livro-texto tradicional, será preciso, muitas vezes, fazer modificações.

No entanto, as mesmas autoras consideram que há boas razões para ensinar com problemas, pois os alunos “[...] necessitam refletir sobre as idéias que estão inerentes e/ou ligadas ao problema” (ONUCHIC; ALLEVATO, 2004, p.223). Dessa forma, a Matemática faz sentido para o aluno e a resolução de um problema não-rotineiro lhe dá a segurança de que é capaz de fazê-lo.

Ao propor a criação de um grupo de professores e alunos, em que uma atividade vai ser proposta como desafio e para a qual os alunos são convidados a participar, estamos considerando uma mudança na sala de aula, a construção de um ambiente em que professores planejam, observam e analisam as atividades de forma coletiva e colaborativa. Todos podem dar palpites, porque a criação de “contas” com palavras que tenham significado e cujas “soluções” relacionem os conceitos apresentados, é uma situação não esperada, para a qual ninguém tem uma fórmula pronta. É necessário ser criativo, engajar-se em buscas, aceitar os erros, testar, solicitar auxílio, enfim, desenvolver a capacidade de trabalhar em equipe com um objetivo comum.

Se os professores de várias áreas se dispuserem a trabalhar sem medo de se expor, os alunos também se sentirão incentivados a contribuir e a Matemática – cujos conteúdos estão implicitamente embutidos na busca das soluções – perderá um pouco da sua característica de excluir os menos aptos: não haverá maior ou menor aptidão, mas maior ou menor envolvimento de pessoas, em busca de uma solução para um problema comum.

D´Ambrosio (2005), ao mencionar a necessidade de estimular a criatividade das novas gerações, também aponta a incorporação de novos tópicos nos currículos dos cursos de formação de professores de Matemática. Entre eles, a criptografia. Assim, trabalhar com criptaritmética é uma sugestão, também, para os cursos de Licenciatura em Matemática, pois os desafios podem ser aprofundados com o uso de conceitos de Teoria dos Números, como divisibilidade, números primos e congruência módulo m, fundamentais para todo o trabalho dos criptógrafos. (SINGH, 2001).

Gauss tinha apenas 24 anos quando desenvolveu resultados e apresentou notações sobre a relação de congruência módulo m, até hoje empregados (SANTOS, 1998). Sarah Flannery, uma garota irlandesa de 16 anos, ganhou o prêmio Jovem Cientista Europeu do Ano, em 1999, pelo desenvolvimento de um algoritmo que inovou o sistema de codificação de dados na Internet. (FLANNERY; FLANNERY, 2000). Ao narrar seu interesse pelos desafios, Sarah aponta o ambiente em que vivia, sempre estimulada pelo pai, professor de Matemática, para resolver problemas, quebra-cabeças, jogos, desafios. Dessa forma, motivar os estudantes, em qualquer nível de ensino, para desenvolverem atividades de substituição de letras por números pode levá-los a buscar conceitos de Teoria dos Números que lhes serão úteis na resolução de problemas de vários tipos.

E para os futuros professores, que serão responsáveis pelas mudanças curriculares exigidas pelas transformações da sociedade em termos de processos de ensino e aprendizagem, a possibilidade de explorar a Teoria dos Números de uma forma lúdica pode levá-los, posteriormente, a propor atividades que desenvolvam, em seus alunos, a criatividade, "[...] permitindo a cada indivíduo realizar seu potencial e atingir o máximo de suas capacidades" (D'AMBROSIO, 2005, p. 97).

Referências

AGUILAR, D. **Como jugar y divertirse con las matemáticas**. Madrid: Altalena, 1981.

BERLOQUIN, P. **100 jogos numéricos**. Lisboa: Gradiva, 1991.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking**. New York: Springer, 2005.

BROWN, D. **Fortaleza digital**. Rio de Janeiro: Sextante, 2005.

CHI, M. T. H.; GLASER, R. A capacidade para a solução de problemas. In: STERNBERG, R. **As capacidades intelectuais humanas**: uma abordagem em processamento de informações. Porto Alegre: Artes Médicas, 1992. p. 250-275.

D´AMBROSIO, U. Armadilha da mesmice em educação matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 18, n. 24, p. 95-109, 2005.

FLANNERY, S.; FLANNERY, D. **In code**: a mathematical journey. London: Profile Books, 2000.

GARDNER, M. **Mathematical carnival**. Harmondsworth: Penguin Books, 1975.

GUZMÁN, M. de. **Aventuras matemáticas**. Lisboa: Gradiva, 1990.

HADAMARD, J. **An essay on the psychology of invention in the mathematical field**. Princeton: Princeton University Press, 1945.

HEGENBERG, L. **Lógica simbólica**. São Paulo: Herder, 1966.

JOHSUA, S.; DUPIN, J.J. **Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques**. 2. ed. Paris: PUF, 1999.

KAHN, D. **The codebreakers**: the story of secret writing. New York: Scribner, 1996.

LAKATOS, I. **A lógica do descobrimento matemático**: provas e refutações. Rio de Janeiro: Zahar, 1978.

LOGICVILLE. **Cryptarithm**. Disponível em: < http://www.logicville.com/cryptarithm.htm > Acesso em: 20 nov. 2005.

McGIVNEY, J. M.; DeFRANCO, T. C. Geometry proof writing: a problem-solving approach à la Pólya. **Mathematics Teacher**, Syracuse, NY, v. 88, n. 7, p. 552-555, 1995.

NEWELL, A.; SIMON, H. A. **Human problem solving**. Eglewood Cliffs, NY: Prentice-Hall, 1972.

ONUCHIC, L. de la R. ; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A.V.; BORBA, M. C. **Educação matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo; Cortez, 2004. p. 213-231.

POLYA, G. Problemas. **Conceptos de Matemática**, Buenos Aires, v. 9, n. 35, p. 4-10, 1975.

______. Ideas y objetivos fundamentales de la educación matemática. **Conceptos de Matemática**, Buenos Aires, v.6, n. 21, p. 4 -9,13, 1972.

______ . **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

SACHAR, L. **Sideways arithmetic from Wayside School**. New York: Scholastic, 1989.

SANTOS. J. P. de O. **Introdução à teoria dos números**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1998.

SCHOENFELD, A. H. Teaching problem-solving skills. **American Mathematical Monthly**, Washington, v. 87, n. 10, p. 794-805, 1980.

SINGH, S. **O livro dos códigos**. Rio de Janeiro: Record, 2001.

VIANNA, C. R. **Resolução de problemas.** Curitiba: Futuro Congressos e Eventos, Jornadas de 2002. p. 401-410. Série Temas em Educação I.