



As Operações com Frações e o Princípio da Contagem

Math Operations and the Principle of Counting

Prof. Dr. Renato Borges Guerra¹

Prof. Dr. Francisco Hermes Santos da Silva²

Resumo

Este artigo tem como objetivo desenvolver uma proposta de ensino de operações entre frações cuja relevância está no respeito à maturidade cognitiva dos alunos, bem como subsidiar a prática docente de professores não-especialistas do conhecimento matemático, mas que ensinam Matemática nas séries iniciais. Para tanto, apoiados em pressupostos da geometria grega, evocamos o princípio da contagem para a iniciação dos aprendizes sobre as operações com frações, admitindo que este conceito se constitua um dos conhecimentos prévios de excelência que deve estar presente na estrutura cognitiva dos alunos das séries iniciais, comportando sua utilização para a aprendizagem de número e das operações com frações.

Palavras-chave: Princípio da contagem. Operações com Frações. Área de Retângulo.

Abstract

This article aims at developing an education proposal to teach fraction which has its relevance with respect to learners' cognitive maturity. The work also aids teachers

¹ Dr. em Engenharia Elétrica - Universidade Federal do Pará – UFPA – Prof. do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas – PPGECM – Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico – NPADC. rguerra@ufpa.br. Rua Tiradentes/303. Reduto-Belém-PA. CEP: 66053-330.

² Dr. em Educação Matemática - Universidade Federal do Pará – UFPA – Prof. do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas – PPGECM – Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico – NPADC. fhermes@ufpa.br. Av. Pedro Álvares Cabral, 1153. Marambaia-Belém-PA. CEP: 66613-150.

who are non-experts in Mathematics, but teach beginners. We base our efforts on Greek geometry, evoking the concept of counting to initiate beginners in operations with fractions. We consider the counting concept as primary knowledge in learners' cognitive structure as far as number learning and calculation with fractions are concerned.

Key-words: Counting Principle. Operations with Fractions. Rectangle Area.

Introdução

O estudo das operações com frações no ensino básico, em geral, tem-se apoiado em pressupostos teóricos algébricos refinados, como os conceitos de relação de equivalência e conseqüentes classes de equivalências (Nunes, 2003; Nunes e Bryant, 1997), em que não se opera com as frações e, sim, com as classes a que elas pertencem. Isso é ofuscado limitando tais pressupostos ao conceito de frações equivalentes e esse último à idéia minimalista de que frações equivalentes são iguais. Isso, embora possa promover a obtenção dos algoritmos de operações entre frações, não atribui significados a esses algoritmos que acabam se tornando, não raro, incompreensíveis para os alunos do Ensino Fundamental das séries iniciais e para aqueles não-especialistas em Matemática, mas que atuam no ensino de tal tema.

O interesse sobre o tema é revelado, por exemplo, na extensa referência constante do trabalho desenvolvido por Fandiño Pinilla (2007), que trata das pesquisas desenvolvidas sobre frações nas décadas de 1970 a 2000 e pertinentes com o objetivo deste trabalho no contexto da Educação Matemática no sentido de que “os conceitos fundamentais devem repetir-se a partir de diferentes enfoques, indicando o caminho para suas possíveis extensões e aplicações que o aluno terá que buscar no futuro por conta própria, quando necessitar.” (SANTALÓ, 2001, p.16).

Tendo tido conhecimento da literatura citada acima e apoiados no princípio da contagem que aliado ao estudo de Lima (1991) sobre medidas de áreas e números em que, de modo subjacente, são relacionadas aos números reais, propomos neste artigo uma abordagem do ensino de frações. A relação entre número e área nos conduz a pensar que se pode operar com as frações

do mesmo modo que se manipulam com as áreas, “buscando reconstruir el concepto de número a partir del establecimiento de um isomorfismo operatório entre números y cantidades, aceptando que se puede operar com los números del mismo modo que se manipularían las cantidades em general” (BERGE; SESSA, 2003, p. 173).

Os pressupostos supracitados permitem significar as técnicas operatórias para frações, todas como processos de contagem, estrutura já presente no sistema cognitivo da maioria das crianças desde a primeira série, além de ser útil para justificar algoritmos operatórios existentes nos livros como mostraremos a seguir.

A nosso ver, a relevância desta proposta é respeitar a maturidade cognitiva dos alunos, como também subsidiar a prática docente de professores não-especialistas do conhecimento matemático, mas que ensinam Matemática nas séries iniciais.

O Princípio da Contagem e o conceito de número

Segundo os estudiosos da história do conceito de número, o homem primitivo sentiu a necessidade de relacionar quantidades para resolver problemas de ordem prática e utilitária. Um desses estudiosos, Georges Ifrah (1989, p. 25) lista algumas possibilidades como:

aqueles que guardavam rebanhos de carneiros ou de cabras, por exemplo, precisavam ter certeza de que, ao voltar do pasto, todos os animais tinham entrado no curral. Os que estocavam ferramentas ou armas, ou que armazenavam reservas alimentares para atender a uma vida comunitária, deviam estar aptos a verificar se a disposição dos víveres, armas ou instrumentos era idêntica à que eles haviam deixado anteriormente. Aqueles, afinal, que mantinham relações de inimizade com grupos vizinhos necessitavam saber, ao final de cada expedição militar, se o efetivo de seus soldados estava completo ou não.

Tais necessidades contribuíram sobremaneira para o aparecimento do primeiro procedimento aritmético conhecido, hoje, como correspondência um a um “que confere, mesmo aos espíritos mais desprovidos, a possibilidade

de comparar com facilidade duas coleções de seres ou de objetos, da mesma natureza ou não, sem ter de recorrer à contagem abstrata” (idem p. 25).

Mas as necessidades se multiplicam quanto mais complexa fica a sociedade e, segundo este princípio, a humanidade desenvolveu o conceito de contagem com base no pressuposto da correspondência um a um, que exige o conceito de número. Sendo assim,

“contar” os objetos de uma coleção é destinar a cada um deles um símbolo (uma palavra, um gesto ou um sinal gráfico, por exemplo) correspondente a um número tirado da “seqüência natural dos números inteiros”, começando pela unidade e procedendo pela ordem até encerrar os elementos. Nesta coleção assim transformada em seqüência, cada um dos símbolos será, conseqüentemente, o número de ordem do elemento ao qual foi atribuído. E o ‘número de integrantes deste conjunto’ será o número de ordem do último de seus elementos (IFRAH, 1989, p. 44).

Dessa forma, a contagem abstrata como concebemos hoje é impossível sem a compreensão do conceito de número, pois “o número de elementos de uma coleção é inteiramente dependente da ordem de “numeração” de seus elementos” (idem, p. 45).

Continua o autor, afirmando que:

São necessárias três condições psicológicas para que um homem saiba contar e conceber os números no sentido em que os entendemos: ele deve ser capaz de atribuir um ‘lugar’ a cada ser que passar diante dele; ele deve ser capaz de intervir para introduzir na unidade que passa a lembrança de todas as que precederam; ele deve saber conceber esta sucessão simultaneamente (idem, p. 45)

Concebe-se, portanto a geração dos números inteiros por um princípio lógico denominado de recorrência que associa cada número ao seu anterior acrescido de uma unidade o que permitiu ao filósofo Schopenhauer, segundo Ifrah (1989) estabelecer um “postulado” da existência do número nos seguintes termos: “Todo número inteiro natural pressupõe os precedentes como causa de sua existência”, o que leva à conclusão inevitável de Ifrah de que:

nosso espírito só é capaz de conceber um número sob o ângulo da abstração se já tiver assimilado os números precedentes; sem esta capacidade intelectual, os números voltam a ser noções globais bastante confusas no espírito do homem” (IFRAH, 1989, p. 47)

Além disso, se considerarmos que “... a raiz de toda quantificação e de todo pensamento numérico e operativo se relaciona com a construção mediante repetição de unidades discretas e sua união” (LINS; GIMENEZ, 1997, p.67), e ainda que “na construção e na análise semântica de frações aparece claramente a idéia de unidade” (Idem), parece, então, natural pensarmos as frações a partir dos inteiros que aqui se põe de forma evidente e, conseqüentemente, nos leva à proposta do ensino de operações com frações por meio do conceito de contagem como mostramos a seguir.

A Área do Retângulo, o Princípio da Contagem e as Operações com Frações.

Como relacionamos o princípio da contagem, a área do retângulo e as operações com as frações? Para responder a esta pergunta, evocamos a idéia de área de um retângulo como o produto de dois segmentos, ou seja, “el rectángulo comprendido por los dos segmentos” feita por Euclides a partir do livro II, segundo Bergé e Sessa (2003, p. 173), e o cálculo de sua área na forma posta por Lima (1991) que passamos a descrever.

Quando tomamos um quadrado de lado 1, dito quadrado unitário, como medida unitária de área e dividimos esse quadrado em n partes iguais, cada uma dessas partes terá $1/n$ da unidade de área. Desse modo, por exemplo, quando dividimos o quadrado unitário em 3 partes iguais, cada parte mede um terço de unidade de área como é representado esquematicamente pelos retângulos de dimensões 1 e $\frac{1}{3}$.

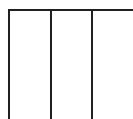


Fig. 1

Podemos interpretar que um retângulo de lados iguais a 1 e $\frac{1}{3}$, tem área igual a $1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ e isso nos permite observar que $\frac{1}{3}$ está contido 3 vezes na unidade e escrever $1 \div \frac{1}{3} = 3$. Ainda de acordo com os nossos pressupostos, se considerarmos a área $\frac{1}{3}$ como uma “nova unidade”, podemos dizer que a nova medida da área do quadrado unitário é $3\left(\frac{1}{3}\right)$.

Se dividirmos um dos lados de um quadrado unitário em 3 partes iguais e o lado adjacente em 4 partes iguais, obteremos 12 retângulos de área $\frac{1}{12}$, como mostra a figura seguir:

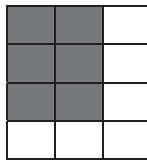


Fig.2

Assim, se tomarmos na figura o retângulo com lados adjacentes representados por $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ e, identificamos uma área contendo exatamente 6 retângulos de área $\frac{1}{12}$. Fica evidente o processo de contagem na representação das frações e no cálculo da área $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ representada por 2 colunas de 3 unidades de $\frac{1}{12}$. Mais ainda, quando da análise da figura nos

permite depreender que $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = (2 \times 3) \left(\frac{1}{12} \right) = \frac{2 \times 3}{3 \times 4}$, pois o total 12 de

unidades de $\frac{1}{12}$ é determinado pelos números 3 e 4 que dividiram os lados adjacentes do quadrado unitário.

Agora, consideremos as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{3}$ representadas a partir do quadrado unitário como segue:



Fig.3

As duas primeiras colunas representam a fração $\frac{2}{3} = 2\left(\frac{1}{3}\right)$ e, portanto, a divisão de $\frac{2}{3} \div \frac{1}{3} = 2$ que é o número de vezes que a unidade $\frac{1}{3}$ está contida exatamente em $\frac{2}{3}$.

Consideremos agora a divisão $\frac{2}{4} \div \frac{1}{3}$ e tomemos as representações dessas frações nos quadrados unitários a seguir:

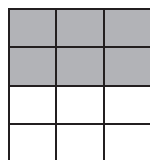


Fig. 4a

$\frac{2}{4}$

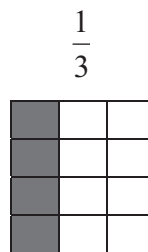


Fig. 4b

$\frac{1}{3}$

Observamos nas figuras que a unidade $\frac{1}{3}$ não cabe exatamente um número inteiro de vezes em $\frac{2}{4}$, e, então se torna necessário dividir a unidade em unidades menores de modo que estas caibam exatamente um número inteiro de vezes em $\frac{2}{4}$. Para isso, basta observarmos na figura que a unidade $\frac{1}{3}$ contém exatamente 4 unidades de $\frac{1}{12}$, ou seja, $\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$. Como $\frac{1}{12}$ cabe exatamente 6 vezes em $\frac{2}{4}$, a medida da área $\frac{2}{4}$ em relação à unidade de área $\frac{1}{3}$ é $6\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$, ou seja $\frac{2}{4}$, contém exatamente 6 vezes a quarta parte da unidade $\frac{1}{3}$ e podemos escrever que $\frac{2}{4} \div \frac{1}{3} = 6\left(\frac{1}{4}\right)$.

Destacamos aqui a “nova unidade” que é comum e pode ser considerada a partir da unidade referencial utilizada inicialmente nos levando a buscar mais uma motivação na matemática grega que, embora não medisse magnitudes, por não fixar uma unidade, as comparava. No livro X, teorema 5, Euclides explicita que se dois segmentos são comensuráveis, ou seja, têm uma medida comum, a razão entre eles é igual à razão que guardam entre si dois números. Aqui, similarmente, admitir ter uma medida comum para duas áreas A e B, segundo Bergé e Sessa (2003, p. 168), é dizer que se nenhum múltiplo inteiro de A cabe exatamente em B, é possível dividir a área A em n partes iguais de modo tal que a área A/n caiba exatamente m vezes na área B e, neste caso, a medida de B em relação a A é $m(A/n)$, ou que $B/A = m/n$. Isso evidencia a medida por meio de processo de contagem de unidades comuns de retângulos que representam as frações.

Reivindicamos esse modo de comparar para medir por meio de uma

unidade a ser definida de acordo com a conveniência de quem mede ou do que é medido, de forma a sistematizá-la como já acontece em nosso cotidiano, ou seja, a escolha da unidade define a medida. No cotidiano escolhemos essas unidades de forma tão natural que não nos damos conta dessa escolha. Por exemplo, quando alguém diz que a distância entre duas cidades mede 120 quilômetros, adotou como unidade o quilômetro, mas, no entanto, para medir a largura de uma porta, usa naturalmente o centímetro afirmando que uma porta padrão tem 80 cm de largura. Fazemos as escolhas das unidades que nos são mais convenientes e, não raro, não nos damos conta de que uma mesma grandeza pode apresentar medidas numericamente diferentes tomando como referenciais comparativos diferentes unidades.

Isso permite assumir o princípio da contagem no estudo das operações com frações por meio da hipótese da existência de uma unidade comum, evidenciada pela representação de frações em retângulos, e, igualmente

importante, que a fração $\frac{m}{n}$, a razão ou quociente entre dois inteiros, pode

ser, então, interpretado como m unidades de $\frac{1}{n}$. Passemos agora à nossa proposta.

Operações com frações

A multiplicação $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ geometricamente foi evidenciada nos exemplos acima como a área de um retângulo, ou seja, o produto das frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ é representado pela área do retângulo de dimensões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, e este conterá unidades de área $\left(\frac{1}{b \times d}\right)$ resultantes da divisão dos lados adjacentes do quadrado unitário em b e d partes iguais, respectivamente. Isso nos permite

escrever o produto $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$.

Como mostramos nos exemplos anteriores, representando as frações por retângulos, podemos interpretar a divisão de frações como a medida de um retângulo tomando o outro retângulo como unidade de referência, ou seja, o quociente da divisão entre as frações $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ é tomado como a medida da área $\frac{a}{b}$ por meio da unidade de área $\frac{c}{d}$. Assim, do ponto de vista

algorítmico, se as frações estão escritas em relação à unidade comum $\frac{1}{p}$, o resultado surge da divisão dos numeradores, como justificado a seguir:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = m \left(\frac{1}{p} \right) \div n \left(\frac{1}{p} \right) = \frac{m \div n}{p \div p} = \frac{m \div n}{1} = \frac{m}{n}$$

Todos os casos, multiplicação ou divisão, podem ser interpretados pela manipulação das figuras como um processo de contagem. Essa mesma manipulação é naturalmente observada nas operações de adição e subtração, ou seja, a adição e a subtração são realizadas geometricamente, adicionando ou subtraindo unidades comuns de área.

Assim, por exemplo, se queremos efetuar a adição entre as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$, então precisamos encontrar uma unidade comum entre elas e então contá-las. Para isso basta proceder do mesmo modo que no exemplo anterior, como mostramos a seguir:

$$\frac{2}{3} = 8 \left(\frac{1}{12} \right) \text{ e } \frac{3}{4} = 9 \left(\frac{1}{12} \right) \text{ portanto } \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = 8 \left(\frac{1}{12} \right) + 9 \left(\frac{1}{12} \right) = 17 \left(\frac{1}{12} \right) = \frac{17}{12}$$

E para subtrair:

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = 9 \left(\frac{1}{12} \right) - 8 \left(\frac{1}{12} \right) = 1 \left(\frac{1}{12} \right) = \frac{1}{12}$$

A caracterização das operações com frações como um processo de contagem, estrutura já estabelecida no sistema cognitivo da maioria dos alunos, estabelece uma relação com os inteiros no sentido em que operar com elas é similar a operar com os inteiros.

Os algoritmos da divisão, da adição e da subtração de frações

Os procedimentos adotados acima nas operações com frações admitem a existência de uma unidade comum. Mais precisamente, assumindo que duas frações podem ser vistas como representações de áreas, as áreas representadas pelas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ têm sempre uma área comum

representada pela fração $\frac{1}{p}$, que está contida exatamente um número inteiro

m de vezes na primeira e exatamente um número inteiro n de vezes na segunda, como observado nos exemplos aqui tratados. De fato, se considerarmos que uma fração é a razão de dois inteiros, numerador e denominador, pode-se afirmar que uma unidade comum sempre existe, pois ela é definida a partir das unidades explicitadas pelos denominadores das frações. Assim, se tomarmos

as frações $\frac{a}{b} = a\left(\frac{1}{b}\right)$ e $\frac{c}{d} = c\left(\frac{1}{d}\right)$, então existe a unidade $\frac{1}{b \times d}$ que está

um número inteiro m de vezes em $\frac{a}{b}$ e um número inteiro n de vezes em $\frac{c}{d}$,

pois tomando os inteiros a e c , temos que:

$$m\left(\frac{1}{b \times d}\right) = \left(\frac{m}{b \times d}\right) = \left(\frac{a \times d}{b \times d}\right) = \frac{a}{b} \quad \text{e} \quad n\left(\frac{1}{b \times d}\right) = \left(\frac{n}{b \times d}\right) = \left(\frac{c \times b}{d \times b}\right) = \frac{c}{d}$$

De modo mais geral, se p é múltiplo comum de b e d , existem inteiros

r e s tais que $p = r \times b$ e $p = s \times d$, e então $\frac{1}{p}$ é uma unidade comum para

as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, pois tomando os inteiros $m' = r \times a$ e $n' = s \times c$, temos:

$$\frac{a}{b} = \frac{r \times a}{r \times b} = r \times a \left(\frac{1}{r \times b} \right) = m' \left(\frac{1}{p} \right) \text{ e } \frac{c}{d} = \left(\frac{s \times c}{s \times d} \right) = s \times c \left(\frac{1}{s \times d} \right) = n' \left(\frac{1}{p} \right)$$

Isso nos permite justificar o algoritmo para a divisão de frações usada nos livros didáticos, observando que, pelos procedimentos aqui adotados, a divisão entre as frações pode ser expressa por:

$$\left(\frac{a}{b} \right) \div \left(\frac{c}{d} \right) = m \left(\frac{1}{p} \right) \div n \left(\frac{1}{p} \right) = \frac{m \div n}{p \div p} = \frac{m}{n} \Rightarrow \left(\frac{a}{b} \right) = \left(\frac{m}{n} \right) \times \left(\frac{c}{d} \right)$$

E daí, deprendermos que:

$$\left(\frac{a}{b} \right) \times \left(\frac{d}{c} \right) = \left(\frac{m}{n} \right) \times \left(\frac{c}{d} \right) \times \left(\frac{d}{c} \right) = \left(\frac{m}{n} \right) = \left(\frac{a}{b} \right) \div \left(\frac{c}{d} \right)$$

Ou seja, para efetuarmos a divisão entre duas frações, efetuamos o produto da primeira pelo inverso da segunda. Isso é um algoritmo prático visto que evita a determinação de uma unidade comum entre elas.

No entanto, nas operações de adição e subtração não é possível o cálculo sem que esteja na mesma unidade, ou seja, precisamos encontrar a

unidade comum $\frac{1}{p}$ entre as frações de modo que possamos contá-las. Assim,

tomando os inteiros $m' = r \times a$ e $n' = s \times c$, temos:

$$\frac{a}{b} = \frac{r \times a}{r \times b} = r \times a \left(\frac{1}{r \times b} \right) = m' \left(\frac{1}{p} \right) \text{ e } \frac{c}{d} = \left(\frac{s \times c}{s \times d} \right) = s \times c \left(\frac{1}{s \times d} \right) = n' \left(\frac{1}{p} \right)$$

E, portanto:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = m' \left(\frac{1}{p} \right) \pm n' \left(\frac{1}{p} \right) = (m' \pm n') \left(\frac{1}{p} \right) = \frac{m' \pm n'}{p}$$

Ou ainda:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{m'}{p} \pm \frac{n'}{p} = \frac{m' \pm n'}{p}$$

E assim estabelecemos que, na adição (subtração) de frações com mesmo denominador, conservamos os denominadores e adicionamos (subtraímos) os numeradores. Em particular, podemos tomar o novo denominador, ou seja, o menor múltiplo comum de b e d, que define a nova unidade usualmente utilizada.

Considerações finais

Os procedimentos acima mostrados buscam construir uma compreensão das operações com frações pela manipulação de áreas de forma a relacioná-las a uma “concretude geométrica” que julgamos desejáveis, considerando os aspectos histórico-conceituais que subsidiam a construção dos conhecimentos escolares sobre esse tema. O princípio da contagem evidenciado pela contagem de uma unidade mostra a estreita relação operatória entre frações e números inteiros provendo de significados as técnicas algorítmicas adotadas nos fazeres escolares. Essas técnicas algorítmicas são práticas e estabelecem modos de se operar com frações que, posteriormente, são sistematizados em fazeres escolares como o das regras operatórias para expressões algébricas, ditas racionais, e não apresentando, talvez por isso, uma conexão com os números inteiros e, conseqüentemente, com o princípio de contagem.

Parece que os procedimentos se mostram inadequados para operar com mais de duas frações, embora possam ser empregados em operações com um número qualquer de frações, mas constituem os primeiros passos que julgamos necessários para a valorização das técnicas empregadas nos livros didáticos como o uso do m.m.c. para adicionar ou subtrair frações.

Ao mesmo tempo julgamos que as técnicas adotadas nesse texto constituem um fazer matemático de evocação epistemológico-conceitual que podem subsidiar outros fazeres docentes diretamente relacionados como, por exemplo, o de medida de áreas de figuras planas; construção de números com vírgula em diferentes sistemas de base de numeração; a relação entre frações e áreas de retângulos que induz à construção de uma relação de

equivalência usada amiúde em textos da matemática superior para o estudo da construção dos racionais; além de proporcionar, de modo direto, a construção do conceito de grandezas comensuráveis; ou ainda, suscitar questões das relações entre esse conceito e do conceito de enumerável na construção dos números reais, entre outras.

Julgamos ter evidenciado nesta proposta que o conceito de contagem, próprio dos números inteiros, pode ser estendido ao estudo das operações com frações e constituir uma alternativa para justificar os algoritmos operatórios entre frações, além de poder subsidiar um fazer docente com o propósito de promover a compreensão do sujeito que se inicia no processo de aprendizagem de tais operações.

Referências

BERGÉ, A.; SESSA, C. Completitud y continuidad revisadas através de 23 siglos: aportes a uma investigação didática. **Relime**, v.6, n.3, p.163-197, jul. 2003.

FANDIÑO PINILLA, M.I. Fractions: conceptual and didactic aspects. **Acta Didactica Universitatis Comeniana**. Issue 7, p. 81-115, 2007.

IFRAH, G. **Os números**: a história de uma grande invenção. Tradução de Stella M. de Freitas Senra. São Paulo: Globo, 1989.

LIMA, E.L. **Medida e forma em geometria**. Rio de Janeiro: SBN, 1991. (Coleção professor de matemática).

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas-SP: Papyrus. 1997.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artmed, 1997.

NUNES T. Criança pode aprender frações. In: GROSSI, E.P. **Por que ainda há quem não aprende?**: a teoria. Rio de Janeiro: Vozes, 2003. p.119-148.

SANTALÓ, L. A. Matemática para não-matemáticos. In: PARRA, C; SAIZ, I. (Orgs). **Didática da Matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed. 2001. p 11-25.

Aprovado em abril de 2008
Submetido em maio de 2007