



A Construção do Conhecimento sobre Número Fracionário

Construction of Knowledge about Fractional Number

Nilza Eigenheer Bertoni¹

Resumo

Estudos, experimentações e reflexões ao longo de vinte anos conduziram nossas investigações na direção da construção dos conceitos de fração e de número fracionário pelos alunos. Nesses anos, distintas tendências ocorreram em nossas investigações, cada uma decorrente de e revista após observações do pensar e agir do aluno, bem como da profundidade e alcance do conhecimento construído. Na primeira dessas fases, usávamos material manipulativo; na segunda, abstrações reflexivas sobre figuras geométricas divididas; na terceira, objetos que se apresentavam divididos no mundo real, o que nos levou a situações que envolvessem esses objetos e aos números fracionários associados. Isso nos revelava uma interface com idéias de Vergnaud sobre a formação de conceitos, apresentada na Teoria dos Campos Conceituais. Passamos a investigar e experimentar o desenvolvimento de uma proposta para a aprendizagem dos números fracionários seguindo os elementos dessa concepção, que inclui situações iniciais, esquemas dos estudantes na ação e representações do conceito. Nesse texto, apresentamos a trajetória de nosso trabalho, a re-elaboração da proposta na última fase e resultados obtidos. A proposta que desenvolvemos centra a aprendizagem das frações na construção de um número, explicitando a que vem a ser esse número e o que ele quantifica, bem como suas relações com os números naturais.

Palavras-chave: Fração como Número. Vergnaud - Formação de Conceitos. Contagem, Divisão, Medida priorizadas em relação a Figuras Geométricas Divididas.

¹ Mestre em Matemática pela Universidade de Brasília. Membro do COMPASSODF-Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática do Distrito Federal
Endereço para correspondência: SQS 211 Bloco G apto. 301 CEP: 70274-070, Brasília/DF.
Email: nilzab@conectanet.com.br

Abstract

Studies, experimentation, and reflections over the course of twenty years have led our investigations in the direction of students' construction of the concepts of fraction and fractional number. Distinct trends can be identified in our investigations over the years, each resulting from and reviewed following observations of students' thinking and reactions as well as the depth and reach of the knowledge constructed. In the first of these phases, we used manipulative material; in the second, reflexive abstractions regarding divided geometric figures; in the third, objects that showed themselves divided in the real world, which led us to situations involving these objects and their associated fractional numbers. This revealed to us an interface with the ideas of Vergnaud regarding the formation of concepts, presented in the Theory of Conceptual Fields. We began to investigate and experiment with the development of a proposal for learning fractional numbers according to the elements of this conception, which includes initial situations, schemes of the students in action, and representations of the concept. In this context, we present the trajectory of our work, a re-elaboration of the proposal in the final phase, and our findings. The proposal we developed centers on the learning of fractions in the construction of a number, making explicit its aim and what it quantifies, as well as its relations with natural numbers.

Key-words: Fraction as number. Vergnaud – Formation of Concepts. Counting, Division, Measures prioritized in relation to Divided Geometric Figures.

Introdução

Constatações a respeito das limitações dos processos utilizados para o ensino e a aprendizagem de frações, efetuadas por nós ao longo de projetos de investigação e intervenção em escolas², bem como de programas³ para os quais formulamos e aplicamos propostas para o ensino desse tema, foram o fio condutor e impulsionador de nossos estudos e experimentos, voltados para a formação dos conceitos de fração, de número fracionário e da representação fracionária desse número. Consideramos que, a despeito do uso social e generalizado da representação decimal para o número racional, tais conceitos são mais adequados a certas situações de quantificação e

¹Um Novo Currículo de Matemática da 1ª a 8ª séries. UnB/Matemática - CAPES/MEC/PADCT/SPEC (SUBPROGRAMA EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA).

²PROFORMAÇÃO- Programa de Formação de Professores em Exercício, FUNDESCOLA-SEED/MEC; VEREDAS – Formação Superior de Professores. SEE/MG; PIE- Curso de Pedagogia para Professores em Exercício no Início de Escolarização, FE/UnB-SEE/DF.

comparação do que a representação decimal. Por exemplo, ao compararmos um terço e um quarto, a representação em decimais seria pouco significativa e desnecessária. A representação fracionária pode ainda constituir-se em apoio para a introdução da representação decimal. Além disso, consideramos a representação fracionária relevante na compreensão mais ampla de números racionais, de proporções, frações algébricas, probabilidade.

A ênfase na construção desse número foi motivada por inúmeras respostas inadequadas dos alunos a questões propostas. Por exemplo, interrogando-se sobre *o que é fração*, são comuns respostas do tipo *é pedaço, é aquele negócio de dividir figuras, é cortar tiras*. Já a pergunta *fração é número?* gera muitas dúvidas, mas, com certa frequência, aparece a resposta *são dois números*. Constata-se, também, certo evitamento da notação fracionária, muitas vezes por um não entendimento das mesmas, entre alunos que já conhecem os decimais. Pires (2004, p.107) cita o exemplo de Carla, que, para calcular o total de líquido formado por *meio litro*, mais *um quarto de litro*, mais *outro quarto*, opta por trabalhar com decimais, escrevendo, erroneamente, 1 quarto como 1,25. Infelizmente, tanto do ponto de vista da compreensão conceitual, quanto do entendimento, aplicação e resolução corretos das operações, as deficiências na aprendizagem dos números fracionários e, de modo mais geral, dos racionais, persistem longamente, não encontrando, por vezes, possibilidades de superação ao longo do ensino básico. Baldino (2006) narra:

tenho um aluno que está fazendo cálculo I pela terceira vez; já aprendeu razoavelmente as regras de derivação. Para ele, um terço menos um nono dá um sexto. Quando os colegas se espantaram, ele corrigiu para menos um sexto.

Objetivos deste texto

O objetivo deste texto é apresentar uma seqüência histórica das diversas propostas que já elaboramos e experimentamos, em equipe ou sozinha, para o ensino e a aprendizagem do número fracionário, cada uma impulsionada pela anterior; das tendências que as caracterizaram, de suas vantagens e limitações, e de como elas nos conduziram em direção às idéias de Vergnaud

sobre a formação de conceitos e a uma proposta fundamentada nessas idéias. O caminho mais longo foi até chegar ao marco inicial da teoria – perceber que o início de tudo deveriam ser situações significativas que tornassem o conceito útil e necessário. Porque nem os materiais manipulativos, as fichas, canudos ou tiras divididas, nem as figuras geométricas divididas, nem a designação de pedaços de pizza apresentavam situações que demandassem realmente uma construção desses novos números. A partir do confronto dos alunos com tais situações, os outros componentes constitutivos da formação do conceito afloraram e desdobraram-se, naturalmente ou com mediação do professor – esquemas, invariantes e representações. Isso conduziu a uma reelaboração de nossa proposta, da qual apresentamos os principais elementos e resultados obtidos. O objetivo do texto é mostrar como a necessidade de novos números – quantificadores para novas situações – surgiu no bojo de situações, como relações entre eles foram progressivamente elaboradas e de como esses números imiscuíram-se entre os números naturais, já conhecidos dos alunos.

Abordagens conceituais e metodológicas

Dificuldades na aprendizagem dos números fracionários são apontadas na literatura e nas avaliações nacionais, como as do SAEB– Sistema de Avaliação da Educação Básica, desenvolvido pelo INEP/MEC (2001,2003). Vários autores atribuem as dificuldades à complexidade, ou às múltiplas facetas do número racional, mencionando *subconstrutos* ou *personalidades* desses números. A noção de que um número racional assume diferentes personalidades, e esse conjunto de subconstrutos o caracterizam, foi introduzida por Kieren (1976) e, em princípio, adotada por vários autores, como Behr *et al.* (1983).

Embora compartilhando da necessidade desse estudo mais amplo, que integra o campo conceitual dos números fracionários, optamos por focar inicialmente a abordagem conceitual desses números na característica quantificadora essencial dos mesmos, no fato de cada um ser um substrato comum a todas as coleções quantificáveis por ele, associado, por exemplo, a resultados de contagem ampliada, divisão ou medida.

Behr e Post (1992) citam essa característica numérica em outras

palavras: “Vamos pensar cuidadosamente sobre o que pode estar envolvido para que uma criança compreenda que $\frac{3}{5}$ representa uma só entidade, compreender o que é essa entidade, que ela tem um tamanho e que tamanho é esse”.

Em nossa proposta, procuramos a compreensão da entidade numérica fracionária anterior à representação escrita. Centramos a proposta na construção de um número, explicitando a que vem a ser esse número e o que ele quantifica, bem como suas relações com os números naturais.

O conceito claramente formado do que esses números quantificam conduz à várias percepções: de que há uma ampliação do que era suscetível de ser quantificado; de que é possível comparar, em termos de quantidade representada, esses números entre si e com os números naturais, do reconhecimento de que os novos números entremeiam-se entre os números naturais e do posicionamento dos mesmos na reta numérica - conhecimentos que servem de suporte à exploração de outras funções desses números.

Mais recentemente, Moreira e David (2005, p.61) mencionaram aspectos desse conhecimento necessário aos alunos (contrapondo-os ao que é veiculado nos cursos de graduação):

As extensões numéricas que se operam na escola são de natureza totalmente diferente já que o conjunto e a estrutura que resultam do processo de extensão apresentam-se como um universo genuinamente novo para o aluno.

[...] no caso da ampliação dos naturais aos racionais positivos, o professor tem que levar em conta que a criança, até certa altura da sua vida escolar, apenas reconhece como números os inteiros positivos. Assim, a aquisição da noção abstrata de número racional está associada a um longo processo de elaboração e reelaboração, quase que elemento a elemento.

Entretanto, nem idéias sobre as várias “personalidades” do número fracionário, ou a que se foca na “personalidade” numérica, nem tampouco uma abordagem diferenciada nos cursos de licenciatura estão impregnadas à prática.

Este texto é fruto de experiências a longo prazo. Registros desses

estudos, com as concepções adotadas, propostas resultantes e exemplos de resultados obtidos estão presentes em relatórios, módulos de ensino e apontamentos, dos quais os mais relevantes são mencionados nas referências. A metodologia de trabalho centrou-se basicamente na análise e reflexão sobre esse material.

Cada proposta didática, por sua vez, distingue-se por elementos metodológicos próprios.

As primeiras propostas apoiavam-se em materiais manipulativos e figuras geométricas, que passaram depois a objetos do contexto social e, finalmente, a situações do cotidiano que evidenciavam a necessidade da emergência desses novos números. A partir disso, a proposta incorporou idéia de Vergnaud sobre a formação de um conceito, que será melhor explicitada.

Os redirecionamentos decorreram de dois fatores, o primeiro sendo a observação dos modos de pensar e agir do aluno, que podiam demandar novas mediações e incorporação de mudanças à proposta; e o segundo, a reflexão sobre a profundidade e o alcance obtidos na natureza dos conceitos e processos aprendidos pelo aluno. Essas abordagens metodológicas articulavam-se ao objetivo conceitual de conseguir um conhecimento que situasse o aluno em relação a esses números como uma realidade matemática do mundo, capaz de relacioná-los e operar com eles com compreensão, fazendo relações mentais básicas, como ocorre com os números naturais. Como exemplos dessas competências, o aluno deveria saber desenhar e visualizar no mapa de uma região, a área possível (e aproximada) referente à informação *dois terços do município estão cultivados com cana* (podendo ser contínua ou não); ou ainda reconhecer de imediato que $\frac{4}{3}$ representa uma quantidade maior do que a representada por $\frac{19}{20}$ da mesma unidade.

Esses elementos centrais metodológicos serão descritos em cada proposta.

Verifica-se, por outro lado, que as metodologias mais comumente usadas na introdução desses números envolvem figuras geométricas divididas e pintadas e conjuntos discretos.

Nos últimos anos, Nunes e Bryant (1997, p.191) destacaram limitações do processo usual de uso de figuras geométricas divididas e pintadas,

associadas a um processo de dupla contagem, ao mesmo tempo que apontam pseudo-resultados satisfatórios advindos do mesmo:

[...] (no processo de dividir e pintar), as crianças são informadas que o número total de partes é o denominador, então, o número de partes pintadas é o numerador. Com algumas poucas regras para calcular, permitem que as crianças transmitam a impressão de que sabem muito sobre frações. Pesquisas demonstraram que a impressão de crianças raciocinando com sucesso sobre frações poderia ser falsa.

[...] Por exemplo, no Brasil, Campos e cols.(1995) foram capazes de mostrar bastante claramente que esse modo de introduzir frações pode, em realidade, conduzir crianças a erro. O método de ensino, alegam, simplesmente encoraja os alunos a empregar um tipo de procedimento de contagem dupla – ou seja, contar o número total de partes e então as partes pintadas – sem entender o significado deste novo tipo de número.

Esse processo aparece comumente nos livros didáticos, com a apresentação de figuras geométricas divididas igualmente, algumas partes destacadas, o resultado sendo associado a uma designação e símbolo para essas partes, mas não claramente a uma quantificação. Ainda mais, não fica clara, para o aluno, a razão de se trabalhar com todas aquelas figuras e de se lhes atribuir nomes e símbolos numéricos.

A fala de Pedro, (SANTOS, 2006) de uma 4ª. série, expõe o problema em toda sua crueza. Perguntado sobre o que acha difícil em matemática, responde que acha fração. Ao explicar o porquê, diz: *Porque a gente tem que fazer umas coisas lá, aí tem que pintar, aí quando pinta, aí os resto lá eu não sei não. Por causa que pinta aí tem que ficar fazendo um bucado de número lá do de branco e do pintado.*

As abordagens com conjuntos discretos é análoga: conjuntos discretos finitos são representados como união de subconjuntos disjuntos e de mesma cardinalidade, sendo alguns destacados. A representação fracionária utilizada, neste caso, tem predominantemente o papel de um operador. Isto é, se o conjunto total tem 12 elementos, e for dividido em 3 subconjuntos disjuntos com 4 elementos cada, dos quais 2 forem destacados, diz-se que $\frac{2}{3}$ de 12 é igual a 8.

Como dissemos, ao constatarmos a relevância das situações para a emergência de novos números, imbricamos com a concepção de Vergnaud sobre a formação de um conceito, e passamos a investigar e experimentar como ficariam as idéias desse autor no caso específico da aquisição do conceito de número fracionário. Seguindo essas idéias, procedemos a última reelaboração de nossa proposta, da qual apresentaremos os principais elementos e resultados obtidos.

O caminho percorrido

Cada proposta que desenvolvemos visando a aprendizagem de frações e números fracionários foi caracterizada principalmente pela escolha dos recursos iniciais utilizados que, em nossa hipótese, deveriam produzir os resultados cognitivos esperados. Em todas elas, contudo, houve certos elementos comuns. Na primeira, partia-se do uso de material manipulativo.

Manipulações concreto/abstratas – partição de fichas e canudos

No Projeto Um Novo Currículo de Matemática da 1^a a 8^a Série, a proposta elaborada por Amato (1988), sob minha coordenação, foi experimentada com crianças no Laboratório de Ensino no Departamento de Matemática da UnB. A proposta, por um lado ainda presa ao uso de material manipulativo, inovava ao utilizar os mesmos materiais já usados anteriormente para os números naturais, dos quais passamos a tomar partes - como canudos partidos ou fichas retangulares dobradas ou partidas. A idéia básica era de que os alunos percebessem que se tratava de ampliar as situações de quantificação, a partir da ampliação dos materiais utilizados, seguindo certos critérios - as primeiras frações foram 1 meio, 1 quarto, 1 oitavo (e não 1 meio, 1 terço, 1 quarto...); seguindo-se outras *famílias*, como 1 quinto, 1 décimo. As experimentações com crianças sugeriram a necessidade de forte apoio inicial na linguagem materna, postergando-se a representação simbólica, conforme reportado em Bertoni (2003a, p. 29). Desse modo, restringimo-nos ao uso da linguagem verbal e a escritas correspondentes, como: “1 inteiro

menos 1 quarto = 3 quartos”. Os trabalhos foram interrompidos pelas férias, tendo as crianças recomeçado suas aulas nas escolas cerca de um mês antes de voltarem ao Laboratório. Na volta, constatamos que haviam visto muita simbologia e nomenclatura, mas mostravam-se confusas no entendimento e só lentamente resgataram a compreensão de conhecimentos que tinham anteriormente.

Confusões ou imprecisões entre alunos que já conhecem a simbologia são narradas também em Pires (2004). A autora aplicou em uma sala de aula vários problemas que havíamos elaborado (BERTONI, 2003a, 2003b, 2004a). Um deles foi: *a jarra estava cheia de água. Ramón bebeu metade da água e Joana bebeu metade do que sobrou. Quanto de água ficou na jarra?* Solução de Igor (9a): $0/2$ – nenhuma metade. Resposta provavelmente devida ao fato do problema não mencionar *quartos*, e que não deixa de ser reveladora sobre o modo como as crianças vêem a relação parte-todo.

Desenvolvendo a aprendizagem compreensiva das idéias operatórias, essa proposta inicial inovava na construção dos algoritmos para esses números (BERTONI, 1986), mantendo estreita consonância com as idéias e os algoritmos usados para os números naturais. Assim, os algoritmos com números fracionários foram trabalhados em forma vertical (soma, subtração, multiplicação) ou em forma de chave (divisão). Exemplos constam em Amato (1988), e em Bertoni (1999, p.75, 2002b, p. 110, 2003a, p.39, 75, 89).

Exemplos desses algoritmos são:

1 quarto +	1 meio +	Metade +	1 laranja	<u>2 crianças</u>
1 quarto	Metade	1 quarto	Meia laranja para cada uma	
Metade	1 (inteiro)	3 quartos		

Pelo entendimento que as crianças tinham do significado dessas representações usadas para os algoritmos com números naturais e também da terminologia usada, a maioria delas colocava corretamente os resultados, sem necessidade de explicações anteriores. Note-se o uso de partes de designações distintas e também de divisão entre naturais.

Houve exemplos significativos da aprendizagem das crianças. Por

exemplo, em uma situação de jogo, que pedia o resultado de $5/3 - 1/6$, Angélica respondeu logo “quatro terços e meio”, e explicou: *Um sexto é metade de 1 terço. Se tenho cinco terços, e tiro a metade de um, ficam quatro terços e meio*. Na resposta, ficou claro que o *meio* referia-se a *meio terço*. E que ela identificava prontamente $1/6$ como meio terço devido ao trabalho com famílias – no caso, 1, 1 terço, 1 sexto – que, pelo modo como eram desenvolvidas, evidenciavam as relações entre seus componentes.

As abstrações reflexivas

Ao término do projeto descrito, houve a diluição da equipe e aposentei-me três anos depois, prosseguindo, entretanto, ligada a projetos do MEC, das Secretarias de Educação de Minas Gerais e do Distrito Federal, consultorias a escolas e capacitações de professores. Nesses desdobramentos pós-projeto, comecei a observar que, apesar dos êxitos, havia limitações da proposta desenvolvida no mesmo. Por exemplo, embora as crianças reagissem com entusiasmo aos jogos lúdicos de trocas de fichas e formação de unidades, adolescentes manifestavam certo desinteresse e jovens adultos até estranheza sobre a finalidade daquelas relações “entre as tiras”.

Nas capacitações de professores, muitos manifestavam resistência ao uso, em sala de aula, de canudos, fichas e jogos, que consideravam trabalhoso, ao mesmo tempo que apresentavam dificuldade em abandonar o recurso a figuras geométricas divididas e pintadas. A cada situação-problema, a tendência era de traçarem imediatamente um retângulo, obtendo uma resposta naquele modelo. Mas, nas interpretações do resultado em um desenho mais fidedigno à situação real, surgiam freqüentes dificuldades. Por exemplo, frente ao problema: *3/4 da estrada que liga Capinzal a Morro Alto estão asfaltados. 3/8 da estrada já têm sinalização. Qual a parte da estrada asfaltada e sem sinalização?* Alguns resolviam pela divisão de um retângulo, outros pelo algoritmo da subtração, mas nem todos sentiam-se aptos a mostrar o que ocorria em um estrada que desenhávamos, com curvas. Em problemas referindo-se a um litro de leite (*havia $3/4$ de litro de leite e foram bebidos $3/8$, quanto restou?*), ainda havia o costumeiro procedimento de divisão de

retângulos (Figura 1). Na transposição para a realidade de um litro de leite, a superfície do leite restante aparecia, muitas vezes, como uma linha quebrada (Figura 2).

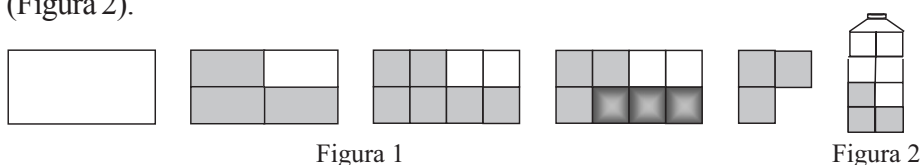


Figura 1

Figura 2

Uma dificuldade reveladora ocorria quando, propositadamente, introduzíamos um elemento irreal no problema, como: *4/3 da estrada estão asfaltados...* Participantes não hesitavam em tomar um retângulo, alguns deles dois retângulos e prosseguir nas divisões. Isso evidenciava que a representação $4/3$ não tinha um significado quantitativo real, apenas conduzia a uma representação.

Uma limitação desse modelo consiste no fato da informação obtida tender a ficar restrita ao mesmo, não se transferindo para outras situações nem levando à construção mental do número fracionário. A imagem de $3/8$ que permanece é a de 3 retângulos na figura dividida em 8.

Devido à preferência dos professores, tentamos, apesar dessas limitações, tirar o melhor proveito desse modelo arraigado até hoje na prática pedagógica. Sem abandonar totalmente os recursos validados no projeto anterior, centramos nosso enfoque nas abstrações reflexivas sobre as figuras, o que consistia em propor atividades sobre figuras, que se desdobravam em divisões e pinturas seguidas de questões que apelavam para reflexões e estabelecimento de relações. As atividades incluíam partes pintadas descontínuas e divisão de uma figura em certo número de partes equivalentes, distintas entre si. Em relação ao conhecimento do professor familiarizado com esse modelo e convicto de que ele era inextricavelmente articulado ao conhecimento de frações, a abordagem representava um ganho de conhecimento qualitativo. Embora parcialmente usado em alguns módulos, o exemplo típico que temos dessa fase consta em Bertoni (2001), uma oficina para professores.

Os objetos contextualizados

Na verdade, tanto o material manipulativo anteriormente usado (fichas e canudos), quanto as figuras geométricas associadas a abstrações reflexivas nos causavam certa inquietação, por parecerem de certo modo artificiais, sem uma articulação clara dos particionamentos de figuras, fichas, canudos com particionamentos reais encontrados no viver cotidiano.

Essa desarticulação fica mais visível se compararmos o uso desse material com o uso de material de contagem, para os números naturais. No caso dos números naturais, há uma sintonia perfeita entre o contar objetos da realidade, como carteiras, alunos, balas e o contar objetos manipulativos: tampinhas, palitos, canudos etc, tornando a ação de contar objetos na escola bastante significativa para o aluno. Já a leitura quantitativa de materiais representando partes da unidade, que usávamos em jogos, encontra um fraco mapeamento em situações do cotidiano infantil, não tendo a ver com ações de avaliação numérica de partes fracionárias, efetuadas no cotidiano. Nesse caso, a didática produz um anteparo antes de o conceito de quantificador fracionário ser formado, propondo que o aluno entenda uma representação simbólica antes de ele saber o que está sendo representado, ou para quê aquela representação servirá.

O desenvolvimento que dá seqüência a esses modelos, na aprendizagem usual dos números fracionários, envolve relações e operações entre eles, os quais permanecem centrados nos materiais e figuras, criando um universo próprio para a existência das frações, desvinculado da realidade. Uma segunda etapa é a da apresentação dos algoritmos, articulados, de modo rarefeito, às figuras.

Essa constatação levou nosso foco para contextos da realidade, gerando um rastreamento de coisas divididas em partes iguais, ou que requeriam tal divisão. O foco central da proposta passava da concretização manipulativa à contextualização do mundo real. Trabalhamos com sanduíches e laranjas divididas ao meio ou em quatro partes; pizzas grandes divididas em 8 partes e pizzas médias divididas em 6; a divisão do bolo da merenda para os alunos; a divisão de tortas e pudins como surgiam em confeitarias, divisão de estantes

em compartimentos, divisão do relógio analógico e até a nau dos quintos do Brasil colonial. Exemplos constam em Bertoni (1994-1995, 2002b, p. 60 a 63). Passamos a evitar o uso de material concreto produzido abstratamente. O aluno era estimulado a pensar com autonomia, apoiado nos objetos reais descritos pela situação e, caso necessitasse, a desenhar ou recortar em papel algo que representasse os objetos considerados (sem o professor sugerir ou apresentar figuras geométricas).

Embora inicialmente esses objetos servissem mais a constatar e descrever esses fatos da realidade, ocasionalmente eles nos levaram a situações-problema reais envolvendo esses objetos. Isso nos levou a mais um passo, que nos parece ter sido o mais importante, nas mudanças sucessivas da proposta inicial.

Construindo a proposta segundo idéias de Vergnaud

Franchi (1999) menciona que

Vergnaud considera um conceito como constituído de três conjuntos:

S: conjunto de situações em que o sentido é constituído (referência)

I: conjunto dos invariantes operatórios, conceitos-em-ato e teoremas-em ato que intervêm dos esquemas de tratamento dessas situações (o significado);

L: o conjunto de representações lingüísticas e não lingüísticas que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações às quais ele se aplica e os procedimentos de tratamento que dele se nutrem (o significante).

Franchi prossegue citando Vergnaud:

O estudo do desenvolvimento e do funcionamento de um conceito, no decurso da aprendizagem ou quando de sua utilização, deve considerar, ao mesmo tempo, o plano das situações, o dos invariantes operatórios e o das representações simbólicas. (VEGNAUD, *apud* FRANCHI)

Diante da clara interface entre o ponto a que chegáramos – emergência

de situações do contexto físico e social que usavam números fracionários - e o elemento inicial da concepção de Vergnaud para o desenvolvimento de um conceito – situações que demandam a constituição do conceito – optamos por investigar mais quais seriam essas situações, incorporá-las a uma nova fase da proposta e aplicá-las. Moro e Starepravo (2005) mencionam que

Segundo Vergnaud, (1979), é possível aprender muito mais sobre o significado que um conceito matemático tem para uma criança se for estudada a forma como ela, criança, lida com problemas que, para sua solução, necessitem deste conceito, do que estudando-se apenas o uso que ela faz de palavras e símbolos referentes ao conceito.

Após a investigação das situações, o desdobramento natural foi investigar os esquemas de ação dos alunos e professores frente a essas situações, os invariantes a que chegavam e as representações que surgiam e as que se faziam necessárias. Desse modo, passamos a investigar como seria uma proposta para o ensino e a aprendizagem dos números fracionários segundo as idéias de Vergnaud para a formação de um conceito em geral. Os três componentes da aceção de Vergnaud sobre um conceito nos permitiu organizar nossos resultados anteriores, enriquecê-los e dar um suporte teórico à proposta.

Situações-problema

Identificamos, como situações-problema que poderiam fazer emergir a idéia do número fracionário, as de divisão entre números naturais com resto que pedia naturalmente uma continuidade da divisão, certas situações de medida e situações que chamamos de *contagem estendida*.

Na contagem estendida, a emergência do número fracionário está associada à quantificação de coleções que não apresentam apenas objetos inteiros, contáveis pelos números naturais. Por exemplo, saber quanto de melancia há em uma banca com melancias inteiras e outras partidas em metades ou quartos. Perguntamos quanto havia de melancia; ou demos a quantidade de melancias inteiras que havia no início do dia, e perguntamos quantas haviam

sido vendidas até aquele momento. As crianças podiam descrever em termos de melancias inteiras e pela metade, mas a situação revelou-se propícia também para a introdução do número quantificador *um quarto*. Um aspecto relevante dessa abordagem é dela ressaltar o aspecto de quantificação, e o resultado misturar números naturais e números fracionários menores do que um.

Coleções desse tipo aparecem freqüentemente como resultados de situações de medida ou de divisão com resto entre números naturais.

Alguns exemplos: nas divisões de 3 laranjas para duas crianças, ou de 45 bolinhos para 30 alunos, propostas livremente, respostas envolvendo inteiros e metades aparecem de modo muito natural.

Começa a emergir um objeto com uma característica quantificadora essencial, portanto um número. São novos quantificadores, que se tornaram necessários para expressar um resultado de *contagens estendidas*, medidas (quando possível) ou de divisões entre dois números naturais.

Ao destacar situações de divisão para a introdução dos números fracionários, encontramos respaldo histórico, pois elas estão nos primórdios da noção humana sobre frações. Tropfke (1980, p.93), em sua História da Matemática Elementar, faz uma descrição inicial do possível aparecimento histórico das frações a qual, numa tradução adaptada, é:

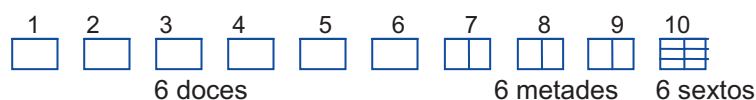
A tarefa de dividir k objetos em n partes (por exemplo dividir 7 pães por 10 pessoas) apareceu, na prática, seguramente antes de qualquer costume escrito. Talvez se tenha inicialmente dividido cada um dos objetos em 10 partes – desse modo obtinha-se a “fração tronco” $1/10$, que podia ser considerada, de certo modo, como uma nova unidade, e então reunia-se 7 dessas novas unidades. A fração geral $7/10$ é assim, por um lado, entendida como o resultado da divisão $7:10$; por outro, como reunião de 7 unidades $1/10$.

Embora isso seja uma hipótese, a divisão de naturais resultando em frações foi documentada posteriormente na história dos egípcios (CAVEING, 1992, p. 40-41).

Em situações envolvendo a partilha do resto, o fato de o resultado final envolver, muitas vezes, números naturais acompanhados de números fracionários menores do que a unidade, permite uma compreensão mais ampla

dos números fracionários do que aquela obtida pela relação parte-todo, a partir de uma única unidade (com obstáculo posterior à aceitação de frações maiores do que a unidade). A situação aventada por Tropicke chama ainda nossa atenção para o fato de haver um problema real demandando a divisão de um ou mais objetos em partes iguais, e ainda para o fato da divisão $7 \div 10$ ter como resultado $7/10$.

Situações de divisão que conduzem à divisão do resto surgem com frequência. Por exemplo: dividir 10 cocadas para 6 crianças. Algumas soluções possíveis:



Dar um doce a cada um; partir os 4 doces que sobram ao meio, dar uma metade a cada um; partir as duas metades restantes em 3 partes cada uma, dar um pedaço a cada um.

A identificação das partes, com nomeação e representação, fica associada a uma situação de quantificação articulada ao contexto. Cada criança recebe doces, aprende a dizer e representar quanto recebeu. Muitas manifestam-se inicialmente dizendo que receberam *uma cocada, mais meia cocada, mais um pedacinho* que, instigadas, especificam ser *a metade dividida em 3*. Registros posteriores geram novas expressões como *cada um recebe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ de metade* ou $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$. Aceita e entende a representação:

$$10 \quad \left| \begin{array}{l} 6 \\ \hline 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \end{array} \right.$$

Em outra solução, cada cocada pode ser dividida em 6 partes, cada criança recebendo uma parte de cada cocada. Trata-se de procedimento proposto ou de boa aceitação entre as crianças, principalmente quando o total a ser dividido é menor do que o número de crianças: *3 bolos para 10 crianças* recebe prontamente a proposta de alguns: *divide cada um em 10, dá um pedaço para cada um* (ocorre aqui um procedimento análogo ao

hipotetizado por Tropfke. Assim como na solução anterior, o número *um sexto* pode ser introduzido, a divisão resultando em:

$$10 \quad \left| \begin{array}{l} 6 \\ \hline 10 \text{ sextos ou } 10 \text{ de } \frac{1}{6} \end{array} \right.$$

A investigação de que as duas respostas se equivalem é um entretenimento desafiador para os alunos. A natureza numérica do novo objeto fica evidenciada por expressar uma quantidade recebida, mas podemos acentuá-la, perguntando: Que número indica a quantidade que você recebeu? Que número é maior: 1 ou 10 sextos? 10 de $\frac{1}{6}$ e $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ representam quantidades iguais ou diferentes? São números iguais ou diferentes?

Evitamos falar em fração ou frações equivalentes, substituindo por número, que, depois, será caracterizado como número fracionário.

Muitos livros de 5ª série (6º ano) informam o aluno de que o símbolo p/q indica um número racional e que o traço indica uma divisão, na maioria das vezes sem referência ao significado dado anteriormente a essa representação. Por exemplo, afirmam que $\frac{3}{4}$ é um número racional e que o traço indica a divisão de 3 por 4, mas não mostram que o resultado dessa divisão dá a fração $\frac{3}{4}$, já conhecida deles. De modo geral, não apresentam representações como:

$$3 \div 4 = \frac{3}{4} \quad \text{Ou} \quad 3 \quad \left| \begin{array}{l} 4 \\ \hline \frac{3}{4} \end{array} \right.$$

Essa divisão, quando surge, aparece “justificada” por uma regra sem significado: $3 \div 4 = 3/1 \div 4/1 = 3/1 \times 1/4 = (3 \times 1)/(1 \times 4) = \frac{3}{4}$. Assim, o que era reconhecido em livros das séries iniciais como uma fração no sentido de relação parte-todo muda de status, tornando-se uma divisão e adquirindo o nome de número racional. Confundem-se os conceitos de operação e de número.

O terceiro tipo de situações, envolvendo medidas, ocorreu historicamente e ocorre no cotidiano. Ao determinar um comprimento, o aluno pode ter necessidade de expressá-lo em metros e meio metro, metros e quartos de metro, metros e décimos de metro ou metros e centésimos de metro, como

no caso de sua altura. Mais ainda, mostra os números naturais e os novos números interrelacionados. O número 4 e meio representa uma quantidade de 4 objetos e metade do mesmo, é uma quantidade maior que 4 e menor que 5, o número que a representa é ordenado do mesmo modo.

Os três tipos de situações – contagem estendida, divisão e medida são situações significativas, que tornam o surgimento das frações, como números, útil e necessário.

Esquemas

Como mencionado, segundo as idéias de Vergnaud, o modo como o aluno atua em situações relacionadas a um conceito manifesta-se em ações e em esquemas. Surgem conceitos e conhecimentos formados nas situações que o aluno enfrenta, as quais, embora na maioria das vezes implícitos, orientam a ação dos alunos, sendo chamados conhecimentos-em ato, que por sua vez incluem conceitos-em-ato e teoremas-em ato.

Franchi (1999, p.171) cita Vergnaud: “Um conceito-em-ato é um conceito (objeto ou predicado) implicitamente tido por pertinente, e teorema-em-ato é uma proposição tida por verdadeira.”

Falcão (2003, p.36) menciona:

O esquema diz respeito à ...”organização invariante da conduta para uma determinada classe de situações” (Vergnaud, 1990, p. 136) e se constitui, segundo a análise aqui proposta, no elemento central do funcionamento cognitivo, o que abrange o desenvolvimento dos conceitos.

Prosseguindo, o autor nos diz (p.37):

Se, indubitavelmente, as regras de ação fazem parte dos esquemas, estes não se resumem a estas regras, pois adicionalmente comportam invariantes operatórios (no sentido piagetiano do termo), inferências e antecipações: São os invariantes que permitem aos esquemas achar as condições de funcionamento nas diversas situações com as quais o indivíduo se defronta; são as inferências que permitem aos esquemas levar em conta os valores atuais

das variáveis de situação e se adaptar a situações novas, calculando regras e antecipações; estas antecipações, por sua vez, são responsáveis pela funcionalidade dos esquemas; enfim, as regras de ação engendram a seqüência de ações do indivíduo. (VERGNAUD, *apud* FALCAO, 2003, p.36)

Observando procedimentos ou repensando outros, conseguimos identificar vários tipos de esquemas.

- Numérico-conceituais

Identificação e Formação do todo, da metade, do complementar

- Comparativos

Angelina, questionada sobre o que seria maior: $\frac{2}{3}$ ou $\frac{3}{4}$, respondeu, com certa rapidez, que era $\frac{3}{4}$. Solicitada a explicar como pensara, disse: *Se eu como $\frac{3}{4}$, sobra $\frac{1}{4}$. Se eu como $\frac{2}{3}$, sobra $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$ é menor do que $\frac{1}{3}$. Quando sobra menos, é porque eu comi mais.*

Identificamos aí o esquema de comparação pelo complementar, e ainda um teorema em ação: *quanto mais divide, menor fica.*

- Equivalências em ação

Por exemplo: *em meio litro de leite há 2 quartos de litro; em meio litro mais metade de meio litro há 3 quartos de litro. Ou outro: em $\frac{1}{4}$ litro de leite há 4 quartos de litro mais um quarto, são 5 quartos de litro de leite.* Esses processos intuitivos, de reconhecimento das quantidades fracionárias na realidade, contrastam com processos escolares como *transforme $\frac{1}{4}$ em fração imprópria* o qual, por sua vez, é feito segundo o processo ensinado de multiplicar o número inteiro pelo denominador e somar com o numerador. Consideramos esse reconhecimento do número fracionário indicando diferentes decomposições de uma mesma quantidade como básico para um entendimento significativo de equivalências. Um esquema mais geral de equivalências será visto no próximo item.

- Variações e permanência da quantidade representada

Transcrevemos algumas inferências na forma como alunos e professores as expressaram:

- “Quanto mais divide, menor fica”.

Explicações vinham, por exemplo, na forma:

Para ter 1 quarto, divido em 4. Para ter 1 terço, divido em 3. 1 quarto é menor porque dividiu em mais partes.

- “Quantos mais pega, mais se tem”. Embora fosse válido, costumávamos repeti-lo em outra forma, que traduzia com mais detalhes do que se tratava: *quantos mais pedaços do mesmo tamanho forem tomados, mais se tem*. Exemplo de explicação:

Quem tem 3 quartos tem mais do que quem tem 2 quartos, ou de quem tem 1 quarto

- Articulação entre as variações relativas a *em quantos se divide e quantos se toma*.

Um esquema mais refinado, que chegou a ser percebido pelos alunos em casos particulares, foi o de dividir mais e simultaneamente pegar mais, algo como: *O bolo foi dividido, e Maria pegou um pedaço. Um bolo igual foi dividido no dobro de pedaços e Luísa comeu 2 pedaços. Quem comeu mais?* Um ponto de apoio para essa percepção é que *dividindo cada pedaço ao meio, tem que pegar 2 para ficar com o mesmo tamanho*.

Ressaltando esse raciocínio a cada vez que surgem situações análogas, minha hipótese é que chegaríamos, talvez na 5ª ou 6ª série, a algo equivalente a “*se dividirmos cada pedaço em n partes, temos que pegar n vezes a quantidade de pedaços para ficar com o mesmo*” ou “*multiplicando o denominador por n , cada pedaço fica dividido por n . Então, para não alterar a fração, é preciso pegar n vezes a quantidade de pedaços, o que corresponde a multiplicar o numerador por n* ”. Desse modo, a construção mental da lógica das “frações equivalentes” estaria apoiada em: percepção da redução de cada parte por aumento do divisor; do aumento da quantidade total por aumento do número de partes consideradas; e da articulação entre os dois processos, produzindo números fracionários iguais embora com representações distintas.

- Esquemas divisivos

Já apresentamos alguns desses esquemas, em que a divisão de dois números naturais resulta em um número fracionário, podendo ser na forma de uma soma de números. Consideramos que, tão importante quanto dividir e

chegar a um número fracionário, é olhar o número fracionário, reconhecê-lo em sua característica quantificadora e sabê-lo resultado de uma divisão entre números naturais.

Narramos a seguir uma situação ilustrativa de esquemas divisivos (BERTONI, 2004b) e de uma compreensão adequada do conceito de fração apresentados por alunos.

Em uma escola na qual fazíamos consultoria e acompanhamento, apresentamos a seguinte situação: *Três colegas foram a uma pizzaria e pediram uma pizza, que veio dividida em quatro partes iguais. O garçom serviu uma parte a cada um. Ao terminarem de comer, pediram ao garçom que dividisse o pedaço restante entre os três. Quanto de pizza cada um comeu?* Entre os alunos que haviam sido transferidos de outras escolas, a maioria ficou bloqueada, e reclamou por *não haver números*. Os alunos antigos da escola pensaram ativamente e várias soluções foram apresentadas, com respostas em formas diferenciadas:

1 quarto mais 1 terço de 1 quarto

4 terços de $\frac{1}{4}$

1 quarto mais 1 doze avo

4 doze avos

1 terço

Ao exporem as soluções, os alunos conseguiam mostrar como compreendiam a situação. A primeira resposta reproduz a distribuição feita pelo garçom; na segunda, os alunos argumentam (alguns desenhando a pizza e seus pedaços) que, assim como o garçom dividiu o último quarto em 3 partes (*terços de quarto*), eles também podiam pensar o quarto que cada um recebeu inicialmente dividido em 3 partes, e isso daria um total de 4 desses pedaços (*terços de 1 quarto*) a cada um; a terceira e a quarta solução tinham geralmente desenhos da divisão da pizza, com a substituição do *terço de um quarto* por 1 doze-avo. O grupo que respondeu “1 terço” parecia um pouco bloqueado frente a tantas explicações. Disse que não havia escrito nada, nem desenhado nada, nem pego material. Pedimos então que contassem como haviam pensado. Disseram: *Não eram 3 meninos? Não comeram a pizza toda? Todos comeram igual. Então cada um comeu 1 terço.*

Essa situação foi depois apresentada em outras classes, com alunos que não conheciam frações, os quais, usando outros recursos lingüísticos, tiveram desempenhos semelhantes.

- Esquemas comparativos mais elaborados
- Comparando com a metade

As crianças percebem o significado da regularidade nos números $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$ etc. Percebem que dividiram em certo número de partes e tomaram metade delas, e que, portanto, qualquer desses números representa o mesmo que metade. A inferência feita é que, para ser equivalente a $\frac{1}{2}$, um número fracionário deve ter o numerador igual à metade do denominador.

Isso permite também decidir se um número fracionário é maior ou menor que a metade: $\frac{5}{8}$ é maior que a metade, pois a metade seriam $\frac{4}{8}$; $\frac{8}{17}$ é menor que $\frac{1}{2}$, pois a metade seriam $\frac{8,5}{17}$. Sem conhecer a representação decimal, alunos dizem algo como: *se divido em 17 pedaços, para ter metade tenho que ter oito e mais metade de um deles, mas só tenho 8, então não chegou na metade.*

- Comparando com o inteiro

Para ser equivalente a 1, um número fracionário deve ter o denominador igual ao numerador, ou seja n/n . Significa que o todo foi dividido em n partes e todas as n foram tomadas. Pode-se comparar números fracionários comparando cada um com a unidade: 3 quartos é menor do que 5 terços, porque 3 quartos não formam um inteiro e 5 terços é maior do que um inteiro. Da mesma forma: $\frac{9}{7} > \frac{12}{15}$; $\frac{8}{9} < \frac{5}{3}$.

- Comparando pelo complementar. Um exemplo já foi apresentado. Nos casos em que é mais fácil comparar os complementares de um número fracionário, os alunos recorrem a eles, lembrando que ao maior complementar corresponde o menor número.

- Esquemas operatórios

No próximo item, que trata das representações, partiremos de situações que envolvem esquemas operatórios e linguagens que os descrevem. Desde o início da aprendizagem desses novos números, surgem naturalmente relações comparativas e operatórias entre eles. A junção desses números com os números naturais estende para o conjunto ampliado os significados das

operações que já existiam, mantendo forte analogia entre elas.

Nesse sentido, embora os PCN do 1° e 2° ciclos omitam, nos conteúdos conceituais e procedimentais do 2° ciclo, o cálculo de operações de números racionais na forma fracionária, consideramos possível o trabalho com essas operações, desde que especificado *por meio de estratégias não convencionais*.

Nessa etapa, observamos a capacidade de compreensão dos conceitos e elaboração de estratégias alternativas de soluções. Ao investigá-los, a quantidade de esquemas e teoremas que emergiram nos surpreendeu, inclusive por não estarem mencionados nas propostas que conhecíamos. Eles estão mencionados em Bertoni (2004b) e em cursos da SBEM-DF (BERTONI, 2006).

Representações

Em terceiro lugar, para Vergnaud, faz ainda parte da construção de um conceito um conjunto de representações lingüísticas e não lingüísticas que permitem representar o conceito, suas propriedades, as situações a que se aplica e que devem suceder as ações, pois *é pela ação que se inicia o pensamento* (VERGNAUD, 1996, p. 276).

As situações iniciais referiam-se ao contexto de situações cotidianas trazidas para a sala de aula, como a de dividir 10 doces para 6 crianças; ou a pizza partida em quatro partes, a ser distribuída a 3 alunos. A problematização era feita oralmente, podendo ocorrer mesmo quando o único conhecimento sobre frações era a noção de meio ou metade. As situações geram, de modo natural, o aparecimento de novas quantidades fracionárias, esquemas operatórios espontâneos e também representações, inicialmente verbais ou com desenhos.

A situação dos 10 doces para 6 crianças, ou da pizza para os três colegas, engendram o surgimento de quantidades não inteiras, em particular de número fracionário distinto de 1 meio. Surgem representações lingüísticas, gráficas, escritas usando palavras. As representações numérico-simbólicas são depois introduzidas

- As frações unitárias

Um ponto observado, na questão das representações, foi o uso freqüente, pelas crianças, de frações unitárias, isto é, frações com numerador 1. À medida que precisavam nomear maior quantidade de pedaços, usavam expressões como *2 pedaços de 1 quarto*, ou apenas *2 de 1 quarto*. A expressão no quociente da divisão de 10 por 6 evidenciava a clareza do resultado expresso em frações unitárias. Acreditamos que as inovações feitas pelas crianças revelam caminhos cognitivos mais naturais, além de encontrarem, muitas vezes, respaldo histórico e, em outras, superarem problemas apontados na literatura. Esse foi o caso da inovação fração unitária – são de mais fácil reconhecimento e encontram precedente histórico. Na situação apresentada por Tropicke, de 7 caças para 10 indivíduos, aparece implícito tanto o conceito de *fração unitária* quanto o de um certo número dessas frações, expressando o resultado da divisão, que poderia ser *7 pedaços de um objeto dividido em 10 partes*. Lembramos, ainda, que na literatura de Educação Matemática, encontram-se referências ao fato de a necessidade da conjunção de dois símbolos numéricos para representar a fração ser um complicador para seu entendimento. Ohlson (1991), por exemplo, refere-se a essa dificuldade:

a complicada semântica das frações é, em parte, uma consequência da *natureza composta* das frações. Como ocorre do significado de 2 combinado com o significado de 3 gerar um significado para $2/3$?

Crianças aceitam bem as frações unitárias. Restringindo-se o trabalho inicial a elas, minimiza-se a combinação de significados. Com essa notação, a equivalência é estabelecida pelo fato de $1/3$ valer o mesmo que *2 de $1/6$* , ou 2 vezes $1/6$.

Essas propostas iniciais encontram respaldo em Moro e Starepravo (2005, p.45), segundo a qual:

No ensino, é essencial seguir as notações espontâneas das crianças para, a partir delas, provocar-lhes a produção de notações mais avançadas, sempre em relação à interpretação das próprias crianças e trabalhando-se, primeiro, com os quantificadores de sua linguagem natural.

Postergamos a elisão de 2 de $\frac{1}{4}$ para $\frac{2}{4}$ para cerca de um ou dois anos depois.

Embora nossa experiência tenha se centrado mais nas séries iniciais, com representações girando em torno de língua materna, algoritmos verticais e frações unitárias, nossa experiência com professores de 5ª a 8ª série e com alunos de graduação já permitiu delinear o desdobramento dessa linha de trabalho, com esquemas, representações e situações gradativamente mais complexos, alcançando-se níveis progressivos de formalização e de ampliação do campo conceitual.

Algumas reflexões finais

O espaço de vinte anos em que investimos nesse estudo nos parece pequeno tendo em vista mais de século de rigidez e improdutividade nas propostas para o ensino-aprendizagem das frações, que, explícita ou implicitamente, visavam construir o caminho inicial para o conceito de número racional. Os resultados que obtivemos – variedade de esquemas, inferências, raciocínio usando o significado do número, independente de regras - nos permitem julgar válido investir em sua divulgação entre os professores e em experimentação continuada, com acompanhamento dos resultados, principalmente em termos do rendimento do aluno.

Esse ponto de vista é respaldado, entre outros, pelas constatações de que:

- a relação parte-todo, como usualmente tratada, não gera idéias sobre número fracionário, pois:

- é apresentada de modo abstrato e não significativo, com o viés de ser introduzida sempre a partir de uma unidade, na maioria das vezes retangular, como modelo único para todos os objetos unitários do mundo;

- o processo de dividir, contar, pintar apresenta artificialismo e não mapeamento com a realidade.

- a proposta desenvolvida corresponde a procedimentos que são encontrados ou requeridos por situações do contexto social;

- os resultados obtidos nessas situações-problema apresentam um

caráter de quantificador;

- a proposta motiva ações dos alunos frente às situações, o que enseja o surgimento de uma variedade de esquemas, inferências, antecipações;

- a proposta conduz a uma construção mental do número fracionário, de relações entre eles e com os números anteriormente conhecidos;

- quanto às representações, constatamos facilidade dos alunos em trabalharem com a representação fracionária quando são usados:

- números fracionários referentes a frações unitárias e múltiplos explícitos deles;

- algoritmos em formas análogas às usadas para os números naturais.

- quanto à dificuldade dos professores em não recorrerem ao modelo de figuras divididas e a regras operatórias, substituindo-os por elaborações mentais, objetos reais ou desenhos que retratem a realidade, constatamos o entusiasmo manifestado ao perceber que eram capazes de deixar o modelo e as regras de lado, e que isso os levava a compreensões claras do conceito e procedimentos envolvidos.

Falcão (2003, p. 39), coloca:

[...] cabe ainda considerar que a representação do real tem como suporte uma rede semântica complexa e dinâmica, no contexto da qual nenhuma situação é abordável recorrendo-se a um único conceito e nenhum conceito é privativo de uma única situação, donde a proposição de campos conceituais (Vergnaud, 1990) como construto teórico para a compreensão do desenvolvimento conceitual.

Nossa investigação não se estendeu, de modo intencional, a essa rede semântica, nem tratou da representação decimal desses números. Ela revelou algumas interfaces desse conceito com outros subconstrutos associados a ele, como de medida e divisão, e iniciamos investigações com o de razão,

Nossa posição é de que a proposta a que chegamos, embora com forte apoio nas partes, introduziu-as de modo significativo e ampliou implicitamente o senso numérico do aluno. Consideramos evidências as quantificações possibilitadas pelos novos entes, sejam de coleções, de resultados de divisões ou medidas; bem como o entrosamento natural que

tiveram com os números naturais, em situações-problema, ordenações e operações.

Apesar dos resultados positivos já apresentados pelos participantes de cursos e capacitações e por alunos em sala de aula, permanecemos com nossa visão de que resultados em educação tornam-se fidedignos a médio e longo prazo, com a intensificação e maior abrangência na aplicação do proposto, e com resultados de desempenho demonstrados não só no ambiente das experimentações, mas também em situações externas.

Referências

AMATO, S.R.A. **Frações**. Projeto: Um novo currículo de matemática para o 1º grau. Mat/UnB. MEC/CAPES/PADCT. Subprograma Educação para a Ciência. Apostila mimeografada. Brasília: UnB, 1988.

BALDINO, R.R. **Mensagem na lista da SBEM**, Disponível em <sbem-l@rc.unesp.br> Acesso em: 03 jun. 2006.

BEHR, M., LESH, R., POST, T. & SILVER, E. A. Rational number concepts. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Eds.). **Acquisition of mathematical concepts and processes**. New York: Academic Press, 1983. p. 91-126.

BEHR, M.; POST, T. Teaching rational number and decimal concepts. Sub-item: Learning about Rational Numbers: Special Problems. In: POST, T. (Ed.). **Teaching mathematics in grades K-8: Research-based methods**. 2 ed. Boston: Allyn and Bacon. 1992. p. 201-248.

BERTONI, N. E. Um novo paradigma no ensino e na aprendizagem das frações. In: ENEM, 8., Recife. **Anais do 8º Encontro Nacional de Educação Matemática**. Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2004.

BERTONI, N.E. Algoritmos flexíveis e homogêneos para os diversos conjuntos numéricos. Texto xerocopiado. Anexo do **Relatório de Atividades do Projeto Um Novo Currículo de Matemática da 1ª a 8ª Série. 1º semestre de 1986**. Mat-UnB/CAPES-MEC/PADCT. Brasília: Universidade de Brasília, Departamento de Matemática, 1986.

BERTONI, N.E. **Brincar, Pensar, Fazer**. 3ª e 4ª. séries. Apostilas xerocopiadas, 1994-95.

BERTONI, N.E *et alii*. Frações – Operações e Problemas. In: MENEZES, M.B. e RAMOS, W.R. (coord.) **Guia de Estudo Módulo II volume 1. Coleção Magistério**. Proformação – Programa de Formação de Professores em Exercício. Brasília: FUNDESCOLA. 1999. p.29-51.

BERTONI, N.E. Um quebra-cabeça hexagonal. Texto xerocopiado. In: **Encontro de Formadores e Coordenador Geral, Salvador**. GESTAR/FUNDESCOLA – PILOTO Brasília: GESTAR/FUNDESCOLA, 2001.

BERTONI, N.E. Compreendendo a adição e a subtração. In SALGADO, M.U.C. e MIRANDA, G.V. (org): **Guia de Estudo. Módulo 2. Volume 2. Coleção Veredas**. Belo Horizonte: Secretaria de Estado da Educação de Minas Gerais, 2002a. p. 48 a 81.

BERTONI, N.E. Compreendendo a multiplicação e a divisão. In SALGADO, M.U.C. e MIRANDA, G.V. (org): **Guia de Estudo. Módulo 2. Volume 2. Coleção Veredas**. Belo Horizonte: Secretaria de Estado da Educação de Minas Gerais, 2002b. p. 88 a 122.

BERTONI, N. E. Educação e linguagem matemática 4. In **Eixo Integrador: currículo e diversidade cultural; área/dimensão formadora: organização do trabalho pedagógico**. Brasília: Universidade de Brasília, Faculdade de Educação. 2003a. p.7-151.

BERTONI, N.E. **Oficina Introdutória de Apresentação do TP6**. Texto fotocopiado. Fundescola. GESTAR I. Programa de Capacitação de Formadores. João Pessoa. Brasília: GESTAR/FUNDESCOLA. 2003b.

BERTONI, N.E. Oficina de Frações. **Um novo paradigma para o ensino e a aprendizagem de frações**. Texto fotocopiado. Brasília: SBEM-DF, 2004a.

BERTONI, N.E. **Frações e Números Racionais –concepções, fundamentos lógicos e obstáculos à aprendizagem**. Curso 1: SBEM-DF, Universidade de Brasília, 1º semestre 2006. Curso 2: SBEM-DF, Faculdade Jesus Maria José (FAJESU), 2º. Semestre 2006.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (5ª a 8ª série)**. Brasília: MEC/SEF. 1998.

CAVEING, M. Le statut arithmétique du quantième égyptien. In: BENOIT, P.; CHEMLA, K.; RITTER, J. (coord.). **Histoire de fractions, fractions d'histoire**. Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser, 1992. p. 39-52.

FRANCHI, A. Considerações sobre a teoria dos campos conceituais. In: Machado, S.D.A. *et al.* **Educação Matemática Uma introdução**. São Paulo: EDUC, 1999.

KIEREN, T. E. On the mathematical cognitive and instructional foundations of rational numbers. In: LESH, R.A.; BRADBARD, D.A. (Eds.). **Number and measurement: Papers from a research workshop**. ERIC/SMEAC. 1976. p.101-144.

MOREIRA, P.C.; DAVID, M.M.M.S. **A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. (Coleção Tendências em Educação Matemática, 11).

MORO, M.L.F.; STAREPRAVO, A. R. As crianças e suas notações na solução de problemas de multiplicação. In: MORO, M.L.F. e SOARES, M.T.C.(org). **Desenhos, palavras e números: as marcas da matemática na escola**. Curitiba: Editora UFPR, 2005. p. 107 a 142.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

OHLSON, S. Mathematical Meaning and Applicational Meaning in the Semantics of Fractions and Related Concepts. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. (Eds.). **Number Concepts and Operations in the Middle Grades**. 3 ed. Reston: NCTM. 1991. p.53-92.

PIRES, E. L. **Meus Registros para Frações e Decimais: entre o que eu penso e o que eu escrevo; entre o que eu escrevo e você lê**. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade de Brasília, Brasília, 2004.

SAEB. **Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica**. Brasília: MEC, 2001, 2003.

SANTOS, Y. K. O. **Matemática: porque uns gostam e outros não?** 2006. Trabalho final de curso (Pedagogia). Universidade de Brasília, Faculdade de Educação, Brasília, 2006.

TROPFKE, J. **Geschichte der Elementarmathematik**, vol 1. Berlin, New York: de Gruyter. 1980.

VERGNAUD, G. Au fon de l'action, la conceptualisation. In : BARBIER, J.M. (Dir.). **Savoirs théoriques et savoirs d'action**. Paris: PUF, 1996. p. 275 a 292.

Aprovado em setembro de 2007
Submetido em maio de 2007

