



## **Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias**

por Andriceli Richit<sup>1</sup>

JAVARONI, S.L. **Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias.** 2007. 231 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.

A presente resenha apresenta uma síntese de uma investigação realizada com alunos do Curso de Matemática, na qual a autora buscou analisar as possibilidades de ensino e aprendizagem de introdução às equações diferenciais ordinárias a partir da abordagem qualitativa de alguns modelos matemáticos, auxiliada pelas tecnologias da informação e comunicação. Para tanto, esta tese foi conduzida sob a seguinte pergunta diretriz: *“Quais as possibilidades de ensino e aprendizagem de introdução às equações diferenciais ordinárias através da análise qualitativa dos modelos matemáticos, com o auxílio de Tecnologia de Informação e Comunicação?”* (JAVARONI, 2007, p.22). O desenvolvimento dessa investigação culminou na tese de doutorado de Sueli Liberati Javaroni.

No capítulo inicial da tese a autora apresenta sua trajetória acadêmica e profissional seguida de uma breve apresentação da pesquisa desenvolvida. Inicialmente Javaroni comenta que, desde sua graduação no Bacharelado em

---

<sup>1</sup> Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Unesp - Rio Claro (SP). E-mail: andricelirichit@gmail.com

Matemática, enquanto aluna de iniciação científica, desenvolvia pesquisa na área de Equações Diferenciais. Influenciada por essa experiência, esse foi o tema de sua dissertação de mestrado intitulada “Equações de reação - difusão: uma aplicação no controle de reatores”. Embora Javaroni tivesse a possibilidade de ingressar no curso de doutoramento na mesma instituição em que cursou o mestrado, optou por iniciar sua carreira profissional. Começou então a lecionar para alunos de um curso de serviço, onde se deparou com vários problemas relativos à sala de aula, os quais ela não estava preparada para enfrentar dada sua formação anterior. Em 1999, Javaroni ingressou como docente no Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Unesp – Bauru, ministrando a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

Ao envolver-se com as atividades docentes no curso de formação de professores da referida instituição, questões relativas à prática pedagógica em sala de aula emergiam e suscitavam reflexões que transcendiam os domínios da Matemática. Devido sua formação prévia – no Bacharelado em Matemática e no Mestrado em Matemática –, a autora passou a questionar-se sobre a realidade da sala de aula envolvendo futuros professores de Matemática, bem como sentiu a necessidade de trabalhar e discutir questões envolvendo a formação dos licenciandos, a abordagem dos conteúdos curriculares desses cursos, a prática docente e metodologia de ensino. Diante disso, buscou envolver-se com pesquisas em Educação Matemática. Esse envolvimento consolidou-se com seu ingresso no doutorado no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Unesp de Rio Claro-SP, sob orientação do Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba.

Ao iniciar as atividades da pesquisa, Javaroni realizou uma revisão bibliográfica acerca dos trabalhos que envolviam a demonstração no ensino de Cálculo, mediado pelas mídias informáticas. Com essa revisão de literatura, a autora deparou-se com um grande número de pesquisas na área, porém verificou que, no conjunto dessas investigações, havia uma lacuna de pesquisas sobre o ensino de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) pautado no uso das mídias informáticas. Este, então, constituiu-se no principal motivo que impulsionou a autora a desenvolver esta pesquisa.

O segundo capítulo subdivide-se em três seções. Na primeira a autora

faz uma exposição de conceitos básicos sobre o conteúdo de introdução às equações diferenciais, baseada em livros-texto de Bassanezi, Bassanezi e Ferreira, Batschelet, Zill e Cullen, e Boyce e DiPrima. Na segunda apresenta um panorama sobre o ensino de Matemática baseado no uso das mídias informáticas. E na terceira seção, traz alguns aspectos teóricos sobre ensino de Equações Diferenciais, mostrando as relações existentes entre Equações Diferenciais<sup>2</sup> e Matemática Aplicada<sup>3</sup> e Equações Diferenciais e Modelos Matemáticos<sup>4</sup>.

Para exemplificar essas relações, Javaroni apresenta alguns modelos matemáticos envolvendo Misturas, Misturas entre recipientes, Sistema massa-mola, Desintegração radioativa, Crescimento populacional-modelo de Malthus e Equação do calor, enfatizando que

De maneira geral, o ensino desta disciplina, nos cursos de graduação, se dá através da apresentação de vários métodos de resolução de tipos de equações diferenciais integráveis, com a aplicação de listas de exercícios, as quais podem ser resolvidas pelos métodos apresentados, tornando-os assim um ensino fundamental. (JAVARONI, 2007, p.41)

Nesse sentido, a autora pontua que

[...] nessa abordagem que privilegia os aspectos algébricos, a ênfase da disciplina consiste na determinação da solução analítica, o que, em muitas vezes, minimiza o processo de modelagem matemática, bem como a interpretação e o comportamento da solução do modelo analisado. (JAVARONI, 2007, p.41)

---

<sup>2</sup> Muitos dos princípios, ou leis, que descrevem o comportamento do mundo físico são proporções, ou relações, envolvendo a taxa segundo a qual determinados fenômenos acontecem. Ao modelar esses fenômenos, frequentemente se obtêm equações que envolvem as variações das quantidades (variáveis), presentes e consideradas essenciais na situação analisada. Assim, as leis que regem tal fenômeno podem ser representadas por equações de variações. Quando essas variações são instantâneas e o fenômeno se desenvolve continuamente, as equações são denominadas *equações diferenciais*. (JAVARONI, 2007, p.30)

<sup>3</sup> Matemática Aplicada é o processo de abstração e formalização das ciências factuais através da Matemática.

<sup>4</sup> Um Modelo Matemático de um fenômeno ou de uma situação é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que o representam.

Desta forma, Javaroni sugere que se agregue ao ensino de EDO a abordagem qualitativa<sup>5</sup>, para que não apenas a abordagem algébrica seja enfatizada. Em seguida, faz um apanhado da abordagem qualitativa no ensino de equações diferenciais ordinárias por meio do conceito de campos de direções<sup>6</sup>. A autora destaca que a abordagem qualitativa permite analisar um modelo por meio de sua própria equação e não por suas soluções analiticamente explicitadas. Finalizando o capítulo, Javaroni discute aspectos relacionados ao Cálculo, Equações Diferenciais Ordinárias e Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC). Fundamentada em Hubbard, a autora afirma que

“existe uma alarmante discrepância entre a visão de equações diferenciais como a ligação entre a matemática e a ciência e o curso padrão de equações diferenciais.” Afirma ainda, “mesmo quando as soluções podem ser escritas analiticamente, a procura destas, através dos métodos de resolução, freqüentemente oculta a questão central: como as soluções se comportam?” (JAVARONI, 2007, p.50)

Ainda baseada na revisão de literatura realizada, Javaroni aponta que antes do advento das Tecnologias de Informação e Comunicação, a abordagem geométrica no estudo de EDO era menos atrativa por conta das dificuldades de visualização. Hoje, porém, a realidade é outra, visto que o desenvolvimento dos *softwares* gráficos e algébricos tem ampliado as possibilidades visuais que auxiliam na interpretação e análise das soluções das equações diferenciais ordinárias, tanto para alunos quanto professores.

No terceiro capítulo, Javaroni apresenta os procedimentos metodológicos que viabilizaram o desenvolvimento da pesquisa, os quais estão

---

<sup>5</sup> A expressão “abordagem qualitativa”, aqui utilizada, consiste no processo de inferir sobre o comportamento das soluções de uma equação diferencial ordinária, por meio das interpretações geométricas obtidas a partir de campos de direções, sem, necessariamente, encontrá-las. (JAVARONI, 2007, p.41)

<sup>6</sup> Um campo de direções de uma equação diferencial é um gráfico da função  $f$  no seguinte sentido: para cada ponto  $P = (x, y)$  do domínio,  $f$  define uma direção de qualquer solução  $y$  que passe pelo ponto  $P = (x, y)$ . Essa direção é representada por um pequeno segmento de reta cujo coeficiente angular é o valor da função  $f$  naquele ponto  $P = (x, y)$  e cuja origem do segmento é o ponto  $P = (x, y)$ . Um campo de direções, desenhado em uma malha razoavelmente fina, ou seja, desenhado para muitos pontos do plano, fornece uma boa idéia do comportamento global das soluções de uma equação diferencial. Dessa forma, cada segmento de reta é tangente ao gráfico de uma solução da equação diferencial ordinária contendo aquele ponto. (JAVARONI, 2007, p.43 e p.44)

em consonância com os pressupostos do paradigma qualitativo de pesquisa<sup>7</sup> e a visão de conhecimento que a sustenta, a qual está consubstanciada na noção seres-humanos-com-mídias<sup>8</sup> defendida por Borba e Villarreal.

Com relação aos procedimentos metodológicos, o cenário para coleta de dados foi o Laboratório de Informática e Educação Matemática (LIEM) da Unesp, *campus* de Rio Claro. Três duplas e um trio de estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas (IGCE) participaram voluntariamente da pesquisa. Para tanto, foi realizado um curso de extensão intitulado “Modelagem e Métodos Computacionais em Equações Diferenciais Ordinárias”<sup>9</sup>, no qual os estudantes foram levados a investigar os modelos de objeto em queda, de crescimento populacional de Malthus, de crescimento populacional de Verhulst e a lei do resfriamento, utilizando a planilha eletrônica *Excel* e os *softwares Winplot e Maple* e um *applet*. Além dos *softwares*, os alunos utilizavam um caderno no qual faziam anotações, realizavam cálculos e esboçavam representações geométricas solicitadas nas atividades. Os dados foram coletados por meio de registros elaborados pelo *software Camtasia*<sup>10</sup>, por meio do qual detalhes importantes da interação entre os alunos e a pesquisadora puderam ser capturados.

Além da utilização do *Camtasia*, Javaroni anotava os pontos que considerava mais importantes nas interações entre os estudantes de cada dupla, constituindo, desta forma, as “notas de campo”, tendo também sido realizadas filmagens dos alunos trabalhando nos computadores. No início do curso de extensão a pesquisadora aplicou dois questionários: o primeiro buscava delinear

---

<sup>7</sup> Nesta abordagem, a pesquisa pode ser concebida como uma trajetória circular em torno do que se deseja compreender, não se preocupando única e exclusivamente com seus princípios, leis e generalizações, mas sim focando nos elementos que se constituem significativos para o pesquisador. (JAVARONI, 2007, p.55 e 56). Ainda, a autora entende pesquisas de cunho qualitativo como pesquisas que têm, em geral, preocupações acerca da compreensão de fenômenos, de como se desenvolve o pensamento, enfim, de entendimento do objeto investigado. (JAVARONI, 2007, p.60).

<sup>8</sup> Essa teoria diz que o conhecimento é produzido pela interação de seres humanos com uma dada mídia, com uma tecnologia.

<sup>9</sup> Este curso estava sob a responsabilidade do Prof. Marcelo de Carvalho Borba e a pesquisadora atuava como monitora, tendo posteriormente assumido a posição de professora.

<sup>10</sup> Esse *software* captura as imagens. No caso da pesquisa de Javaroni, por meio dele, foi possível capturar as ações realizadas pelos estudantes no computador, as imagens destes trabalhando nas atividades propostas e suas respectivas falas, além de capturar simultaneamente imagens de cada subgrupo de estudantes.

o perfil dos participantes e o segundo constituía-se de perguntas teóricas acerca das equações diferenciais. Esse questionário foi aplicado no início e final do curso, buscando evidências sobre o desenvolvimento e envolvimento dos alunos com o curso.

A partir das notas de campo e da análise inicial dos vídeos gravados, a autora construiu episódios<sup>11</sup> por meio dos quais buscou responder à pergunta de pesquisa. Finalizando o capítulo, são tecidas algumas considerações sobre a concepção de conhecimento que sustenta a investigação.

O capítulo quarto é dedicado à apresentação descritiva e analítica dos dados precedidos de uma análise inicial dos mesmos. A autora construiu alguns episódios aos quais denominou “Objeto em queda”, “Modelo Populacional de Malthus”, “Modelo Populacional de Verhulst”, “Campos de direções” e “Lei do resfriamento”.

Alguns aspectos emergem da análise inicial realizada por Javaroni e por ela foram sintetizados da seguinte maneira: a importância do desenvolvimento do processo de modelagem matemática; a coordenação de várias mídias utilizadas; a elaboração e verificação de conjecturas além da interação entre os alunos e as diferentes mídias.

No capítulo de número cinco, a autora aprofunda a análise iniciada no quarto capítulo, agora à luz da literatura utilizada. Para isso, apóia-se em autores como Lévy, Borba, Rasmussen, Habre e Kallaher, e Machado e Arcavi. Da análise mais profunda dos episódios emergiram os seguintes temas: processo de visualização em atividades investigativas auxiliadas pelas mídias informáticas, abordagens algébrica e geométrica com as mídias informáticas e o conhecimento como rede de significados.

Com relação ao primeiro tema, Javaroni destaca que a questão da visualização sob diversas perspectivas é essencial ao entendimento dos aspectos dinâmicos de um curso introdutório de equações diferenciais, mas, no entanto, aponta a necessidade de considerar também as dificuldades por ela impostas, pois, em muitas situações, os alunos não viam o que ela, enquanto pesquisadora via. Outro aspecto apontado é a necessidade de transitar pelas representações visuais e analíticas de um mesmo modelo, sendo que essa habilidade ao manipular as múltiplas representações pode ser um processo demorado, tortuoso, não linear para os estudantes.

---

<sup>11</sup> Para a autora, os episódios são ‘histórias’ que ela conta a partir dos fatos que ocorreram no ambiente da sala de aula do curso de extensão.

No tocante ao segundo tema, “abordagens algébrica e geométrica com as mídias informáticas”, a autora alerta que embora as características dessas abordagens sejam dadas separadamente, isto não implica serem disjuntas ou exclusivas nas atividades matemáticas e que são notadamente complementares nos processos de aprendizagem matemática. Comenta ainda que no meio matemático em que prevalece a mídia “lápiz e papel” a abordagem algébrica encontrará mais força. Entretanto, se nesse meio matemático, além da mídia “lápiz e papel”, incorporarmos as mídias informáticas, certamente além da abordagem algébrica teríamos também a presença da abordagem geométrica, considerada indispensável para uma aprendizagem mais significativa.

No que diz respeito ao terceiro e último tema, “conhecimento como rede de significados”, a autora acredita que a aprendizagem deve ocorrer de forma dinâmica, significativa, favorecendo o aparecimento de um número cada vez maior de conexões (relações) e que para aprender um novo conceito precisamos do velho, constituindo, assim, uma rede. Concluindo o capítulo, Javaroni comenta que embora o foco desta pesquisa não tenha sido direcionado ao estudo das concepções dos estudantes, foi possível compreender que uma das dificuldades que o estudo mostra com relação à proposta do ensino de EDO, por meio da abordagem qualitativa dos modelos, encontra-se nas concepções dos alunos sobre o conceito de derivada.

Finalmente, no sexto capítulo, a autora retoma a pergunta diretriz no intuito de sintetizar as compreensões e apresentar algumas considerações, buscando estabelecer as limitações e a amplitude deste trabalho dentro da Educação Matemática, além das perspectivas docentes e de pesquisa que surgem. Em suas considerações Javaroni aponta o gráfico de campos de direções como uma possibilidade de elucidar o “despercebido” ao estudar EDO:

[...] observar um gráfico dos campos de direções de uma equação diferencial ordinária nos leva a obter informações despercebidas sobre as curvas soluções da equação, mesmo sem necessariamente explicitar sua solução algébrica. (JAVARONI, 2007, p.170)

Concluindo a tese, a autora destaca que talvez seu trabalho traga elementos que possam auxiliar pessoas interessadas no ensino de EDO a elaborarem suas próprias propostas de ensino e algumas sugestões e possibilidades para o ensino de Cálculo, visando a contribuir com professores e pesquisadores da área. Javaroni chama a atenção para as potencialidades

das mídias informáticas, em particular dos sistemas de computação algébrica, os quais não podem mais serem vistos como “complementos desejáveis”. Mas também destaca que as dificuldades de utilização dos *softwares* foram, por diversas vezes, um complicador no decorrer das atividades. Ainda, menciona que sua prática docente certamente não será totalmente alterada, mas que sua visão sobre ela sim.

A meu ver o trabalho mostra-se relevante no âmbito da Educação Matemática, pois sua proposta é adequada tanto para matemáticos que se preocupam com a abordagem dos conceitos discutidos nesta pesquisa, quanto para profissionais de outras áreas, que se utilizam de conhecimentos matemáticos. A literatura utilizada pela autora é ampla, abarcando autores nacionais e internacionais, o que evidencia o aprofundamento do estudo. Além disso, a abrangência e profundidade dada à investigação e a discussão sobre as possibilidades que emergiram do trabalho desenvolvido com os estudantes engajados na pesquisa ressaltam a possibilidade de que outras pesquisas sejam desenvolvidas, enfocando outras dimensões da articulação entre as mídias utilizadas. A autora conseguiu entrelaçar, de forma concisa e satisfatória, a literatura a sua própria visão de conhecimento.

Porém, considero importante destacar, neste momento, um ponto pouco explorado pela autora: as representações múltiplas. Segundo minha visão, a autora poderia ter explorado esta dimensão, visto que as representações múltiplas manifestaram-se ao longo das atividades com as EDO, entrelaçadas tanto à proposição de conjecturas matemáticas quanto à verificação dessas conjecturas. Javaroni aborda superficialmente esse aspecto, mas considero que na investigação desenvolvida essa questão mostrou-se relevante, pois permeou todas as atividades, uma vez que os estudantes ora esboçavam gráficos, ora construíam tabelas, ora utilizavam-se de comandos algébricos dos *softwares* para encontrar as soluções das EDO. Outra lacuna por mim sentida foi a ausência de uma justificativa quanto a escolha dos *softwares* utilizados em sua coleta de dados. Somados a este ponto, destaco ainda o fato de Javaroni não ter apresentado, mesmo que de forma breve, os ambientes computacionais (*Winplot e Maple*) de que ela se utilizou para o desenvolvimento das atividades. Considerando que nem todos os leitores têm familiaridade com tais ambientes computacionais, entendo que num trabalho como esse seja possível dar a este leitor uma idéia das possibilidades didático-pedagógicas dos referidos *softwares*, suas limitações, suas características de *hardware* e *software*, quais seus recursos, enfim, informações mais gerais que despertem o interesse do leitor pouco familiarizado com essas questões.