



ARTIGOS

Conhecimento Matemático para Ensinar: uma experiência de formação de professores no caso da multiplicação de decimais

Mathematical Knowledge for Teaching: an experience with in-service teachers with multiplication of decimals

Carlos Miguel Ribeiro¹

Resumo

O conhecimento profissional dos professores pode influenciar de forma directa as oportunidades de aprendizagem que facultam os seus alunos. Neste texto analisa-se uma das componentes do conhecimento profissional, o conhecimento matemático para o ensino (BALL; THAMES; PHELPS, 2008) através de uma situação em que, num grupo de trabalho colaborativo – no âmbito de um Programa de Formação Contínua – são discutidas as bases teóricas da multiplicação de dois números decimais. Desta discussão torna-se evidente a falta de conhecimentos por parte dos professores envolvidos sobre como explicar aos seus alunos, de forma compreensível e que lhes permita utilizar os algoritmos com compreensão, como efectuar a multiplicação de dois números decimais.

Palavras-chave: Conhecimento Profissional. Trabalho Colaborativo. Multiplicação de Decimais.

Abstract

Teachers' professional knowledge may directly influence the learning opportunities provided for their students. This text analyses one of the components of professional knowledge, mathematical knowledge for teaching (BALL; THAMES; PHELPS, 2008), through a situation where, in a collaborative group – in a Continuing Education Program – the theoretical foundations of the multiplication of two decimal numbers are discussed.

¹ Docente do Departamento de Ciências Exactas, Naturais e do Desporto. Universidade do Algarve, Escola Superior de Educação e Comunicação, Campus da Penha, 8005-139, Portugal. E-mail: cmribeiro@ualg.pt

In this discussion, the lack of knowledge of the teachers involved becomes evident when they have to explain it to their students in a way that they can understand and that enables them to use the algorithms comprehensively, for example, to multiply two decimal numbers.

Keywords: Professional Knowledge. Group Work. Decimal Multiplication.

Este texto é baseado nas discussões e reflexões ocorridas num grupo de formação inserido no âmbito de um Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico² (PFCM), bem como nos materiais preparados por um dos grupos de formadores do referido programa. Este programa foi criado conjuntamente pelos Ministérios da Educação e da Ciência Tecnologia e Ensino Superior Portugueses e tem por objectivos primordiais: promover o trabalho em rede entre escolas e agrupamentos³ (centros educativos), em articulação com as instituições de formação inicial de professores; aprofundar o conhecimento matemático, didáctico e curricular dos professores do 1.º e 2.º Ciclos; favorecer a realização de experiências de desenvolvimento curricular em Matemática; fomentar uma atitude positiva dos professores relativamente à disciplina de Matemática e às capacidades dos alunos e a criação de dinâmicas de trabalho entre os professores, com vista a um investimento continuado no ensino da Matemática.

Para conseguir atingir estes objectivos realizam-se sessões de formação conjunta (com periodicidade aproximadamente quinzenal), nas quais participam entre oito a dez professores de escolas vizinhas e sessões de acompanhamento individual em sala de aula; no término do ano lectivo é realizado um seminário com duração de um dia no qual os formandos são convidados a apresentarem exemplos de boas práticas. O acompanhamento em sala de aula é realizado pelo formador e a partir desse acompanhamento é efectuada uma reflexão nas sessões conjuntas, sendo estas, assim, foco de discussão de problemáticas efectivamente sentidas e vivenciadas pelos próprios intervenientes. A avaliação

² O 1.º ciclo é respeitante aos quatro primeiros anos de escolaridade (alunos com idades compreendidas entre os 6 e os 9 anos, em condições normais) cuja leccionação é assegurada, até ao momento, por um único professor para todas as áreas curriculares; o 2.º ciclo é composto por apenas dois anos (5.º e 6.º anos) e é frequentado por alunos de 10 e 11 anos.

³ De acordo com as orientações actuais as escolas encontram-se agrupadas verticalmente, pelo que de um mesmo agrupamento – conjunto de escolas – podem fazer parte escolas desde o Pré-Escolar até ao ensino Secundário (12.º ano de escolaridade).

desta formação é baseada no portefólio reflexivo que cada formando tem de elaborar. Este portefólio conterà necessariamente, pelo menos, duas aulas comentadas.

O cerne desta formação é, pelo menos em teoria, que os professores reflectam sobre as suas práticas e, que, por via dessa reflexão, se verifique uma maior aproximação das mesmas às orientações ministeriais (DEB, 1991, 2001). Apesar do reconhecimento, por parte dos professores, das suas lacunas em termos de conhecimentos em algumas áreas, e da necessidade de formação ser um ponto de partida importante para que as possam colmatar, para que a aproximação ocorra efectivamente é necessário que as sessões de trabalho não se centrem fundamentalmente nos conteúdos, mas também nas transposições didácticas necessárias à adequação desses conteúdos às situações específicas, pois, tal como referem Ticha e Hospesová (2006), se o foco da formação forem os conteúdos, dificilmente os professores alteram as suas práticas de sala de aula.

Ball (1990) refere a existência de uma falta de conhecimentos e compreensão, por parte dos professores, em particular estagiários, das propriedades dos números e das operações, particularmente da multiplicação. Esta lacuna foi também uma das identificadas por um dos grupos de formadores do PFCM, do qual o investigador faz parte, como sendo das fundamentais; por essa razão, a ela se deviam dedicar algumas das sessões de trabalho com os professores participantes no Programa.

Um dos objectivos já referidos desta formação é o de aprofundar o conhecimento matemático, didáctico e curricular dos professores, em particular do 1.º ciclo, que se encontram em exercício. Enquanto investigador e formador de professores, na linha do que referem Muñoz-Catalán e Carrillo (2007), tenho também como intenção e objectivo procurar as características (e com elas as carências e os obstáculos) mais frequentes e comuns com que se deparam os professores em exercício para que se possam organizar adequadamente os processos de instrução de modo a melhorar a formação dos futuros professores, ou seja, partir da prática na identificação e procura de soluções para os problemas concretos. Esta busca da adequação e melhoria da instrução pode mesmo ser considerada fundamental para levar a bom porto

uma boa formação matemática das gerações futuras (de alunos e professores), aproveitando-se a circunstância de estar em vigor uma Formação Contínua deste tipo – único em Portugal – ao mesmo tempo que se verifica a criação de novos cursos de formação de professores. As respostas/conclusões a que se chegar podem ajudar na adequação desses novos cursos (ao processo de Bolonha).

Tal como foi já referido, uma das lacunas identificadas, em termos de conhecimentos dos conteúdos, nos professores que participam no PFCM, nomeadamente num dos grupos da região do Algarve, prende-se com o conhecimento dos números e suas propriedades, bem como das quatro operações fundamentais. Relativamente aos números, os que, reconhecidamente (pelos professores), maiores dificuldades levantam são os racionais/decimais e, com estes, os algoritmos da divisão e multiplicação, limitando-se, muitas vezes, ao conhecimento dos algoritmos tradicionais e às regras para os levar a cabo – não tendo consciência da necessidade de efectuar os processos com compreensão.

Tanto no Currículo Nacional do Ensino Básico Português (DEB, 2001), como na Organização Curricular e Programas do 1.º ciclo (DEB, 1991) e no novo Programa de Matemática do Ensino Básico (DGIDC, 2007), encontramos, de forma explícita, a pretensão de que os alunos adquiram competência matemática que lhes permita uma clara compreensão do sistema de numeração de posição e do modo como este se relaciona com os algoritmos das quatro operações (DEB, 2001), e a capacidade de operar com números naturais e racionais não negativos na representação decimal (DGIDC, 2007).

Aos professores compete, então, facultar aos seus alunos um vasto e diversificado conjunto de experiências e vivências que lhes permita adquirir capacidades de reconhecimento dos números inteiros e decimais, da existência de diferentes formas de os representar e suas equivalências, bem como tornarem-se capazes de utilizar as propriedades das operações em situações concretas, particularmente quando facilitam a realização de cálculos. Estas pretensões (DEB, 1991, 2001, DGIDC, 2007) apenas se efectivarão se os professores forem detentores de um conhecimento profissional que lhes permita preparar, adequando-as aos seus alunos, tarefas conducentes a uma construção

e relação das noções; que reflectam situações reais, que podem ser abordadas em múltiplos contextos e integradas em diversos conteúdos [matemáticos e não só] (BAROODY; COSLICK, 1998); que sejam a base para uma exploração e aplicação dos modelos; que encorajem à realização de múltiplas abordagens e interpretações; que dêem prioridade à comunicação matemática; que tornem necessária uma documentação dos resultados finais e onde a auto-avaliação é uma componente inerente (LESH *et al*, 2000).

O trabalho colaborativo e o conhecimento profissional para o ensino

O trabalho colaborativo conduz a uma tomada de consciência de distintas perspectivas e práticas o que permite, em si, uma perspetivação conjunta do processo de ensino. Ao definirmos uma metodologia de trabalho no seio do grupo, em que se parte de situações próprias de cada um, mas comuns ao grupo, situações em cuja discussão todos os elementos participam activamente, possibilitamos uma efectiva e profícua reflexão sobre o que os elementos consideram ser realmente importante e que pode produzir implicações nas práticas de cada um.

Esta partilha de vivências e saberes, bem como a realização de reflexões efectivamente proveitosas apenas será possível se todos os elementos do grupo se sentirem como pares entre os quais não existe competição mas sim uma vontade conjunta de aprender, pois, tal como refere Shulman (1992), aprendemos por via da reflexão sobre determinada experiência e não directamente a partir dessa experiência.

O trabalho colaborativo, no âmbito do PFCM, apenas surtirá efeitos se forem tidas como ponto de partida as experiências e dúvidas dos professores e a reflexão desempenhar um papel central. Climent e Carrillo (2002) afirmam que o mais importante é fornecer aos professores a oportunidade de reflectirem sobre os seus próprios conhecimentos e crenças, sendo este um possível ponto de partida para a mudança escolhida pelo professor. A reflexão deverá assim ser parte integrante de todo o processo de ensino (reflexão na acção e sobre a acção (SCHÖN, 1983, 1987)), pois apenas desse modo, será possível adaptar actividade de ensino, a cada momento, e posteriormente, com o

objectivo de facultar aos alunos uma aprendizagem sustentada.

Para adequar as situações de aprendizagem aos alunos é necessário que os professores possuam um sólido conhecimento profissional. Este conhecimento pode ser categorizado de distintas formas (e.g. por exemplo, Ball (2000); Ball, Thames e Phelps (2008); Elbaz (1981, 1983); Schoenfeld (1998); Schön (1983, 1987); Shulman (1986)).

Parece-me óbvio, para além de consensual, que os professores devem conhecer, de forma aprofundada, os conteúdos que ensinam. O que não é tão consensual é a que se refere esse conhecimento. A posição dos professores, face às outras profissões é bastante distinta, nomeadamente no que se refere ao conhecimento profissional (BALL; THAMES; PHELPS, 2008). Para além de um conhecimento matemático necessário para saber fazer – conhecimento matemático comum –, os professores necessitam de um conhecimento matemático especializado para o ensino. Distinto do conhecimento profissional necessário a muitas das outras profissões – engenheiros, economistas, arquitectos, biólogos, físicos, etc –, que utilizam os conhecimentos adquiridos no seu processo escolar (conhecimento do conteúdo) –, os professores necessitam especificamente de um conhecimento de e sobre a matemática pois devem também conhecer um conjunto distinto de propriedades relativas aos conteúdos específicos que pretendem ensinar assim como distintas formas de o fazer (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, DELANEY *et al*, 2008).

Em termos de exemplo, podemos referir a situação do cálculo de $0,4 \times 0,4$ que, sem grandes dificuldades, qualquer adulto escolarizado, com um conhecimento matemático mediano consegue efectuar. Porém aos professores exige-se, mais do que saber apenas determinar o resultado, ou explicar, de forma directa, como o fizeram, que possuam um conhecimento sobre o algoritmo, e outros alternativos, possíveis abordagens – numéricas, geométricas, pictóricas, ... – de modo a tornarem compreensível para os seus alunos a operação a realizar, para que estes a possam concretizar com sentido e não somente aplicando um conjunto de regras memorizadas sem compreensão.

Por ser uma profissão muito específica, o conhecimento profissional dos professores, para além do conhecimento matemático, constrói-se desde

a sua infância pois estes profissionais são os que mais tempo passam na escola e tomam, não raras vezes, os seus próprios professores como modelos, tal como referem Mellado, Ruiz e Blanco (1997), para o caso dos professores de Ciências Experimentais com quem trabalharam, que tendem a ensinar como foram ensinados, ou seja sobrepõem os modelos a que foram sujeitos enquanto estudantes do nível de ensino que se encontram a leccionar, a todas as perspectivas teóricas e/ou práticas com que possam ter tido contacto, enquanto alunos de formação inicial de nível superior. Este facto é também referido por Nicol (1999).

O conhecimento profissional e o trabalho colaborativo podem ser encarados sob diversas perspectivas, porém, a que me parece ser a mais concisa com a necessidade de formação dos professores, e de forma a que essa necessidade, sentida pelos próprios professores, faça, para si, sentido e tenha efectiva utilidade, deve partir da própria prática. Encarando o trabalho colaborativo como um espaço de discussão e reflexão centrado em problemas concretos sentidos por todos os intervenientes, este torna-se fonte das questões promotoras das discussões no grupo (SARAIVA, 2001), contribuindo assim, em grande escala, para a construção/adequação do conhecimento profissional dos professores envolvidos.

Metodologia e contextualização

Pretende-se conhecer com maior profundidade qual o conhecimento do conteúdo necessário para o ensino que possui um grupo de professores que frequentam o 2.º ano do PFCM. Deste grupo fazem parte 9 professores, sendo o investigador o seu formador. Os professores têm entre 6 e 30 anos de experiência lectiva e dois deles possuem o curso de Professores do 2.º Ciclo variante Matemática e Ciências⁴.

Na presente investigação utilizou-se uma metodologia de estudo de casos (LECOMPTE; PREISSLE, 1993, STAKE, 1998, 2000) pois pretende-se obter um conhecimento mais aprofundado sobre uma realidade específica.

⁴ Curso mais vocacionado para o ensino das áreas curriculares de Matemática e Ciências da Natureza a alunos do 5.º e 6.º anos de escolaridade (10 e 11 anos), mas aos quais é também permitido leccionar no 1.º ciclo.

Neste estudo, em que se adopta uma abordagem interpretativa, o investigador, por ser o formador, é um participante interveniente que visa chegar a um conhecimento exaustivo e qualitativo dos fenómenos, acções e problemas.

A recolha de dados foi efectuada durante as sessões conjuntas (de 3 horas cada) e durante as aulas acompanhadas. As aulas são gravadas em áudio e vídeo de modo a que as professoras possam reflectir mais tarde sobre o que fizeram e também a facilitar a elaboração do seu portefólio (ROCHELLE, 2000, STAR; STRICKLAND, 2008). Estas gravações, apesar de não serem visionadas em conjunto, são, por vezes, fonte de discussão e reflexão pois os intervenientes levantam muitas vezes questões sobre ocorrências de que não se tinham dado conta. Por serem gravações digitais, e facilmente poderem ser revistas (focando um determinado aspecto específico), estamos a potenciar uma reflexão e análise mais profundas, tal como referem Santagata, Zannoni e Stigler (2007) que não seria possível de efectuar sem recurso às mesmas.

As sessões conjuntas são gravadas em áudio com o objectivo de possibilitar também que na(s) sessão(ões) seguinte(s) se reflecta, em maior profundidade sobre o que foi discutido, sempre que se sinta essa necessidade; o formador transcreve algumas das partes que considera serem as fundamentais e que podem ainda ser objecto de discussão/reflexão na(s) sessão(ões) seguinte(s).

Neste texto focam-se particularmente as discussões e reflexões ocorridas numa das sessões de trabalho conjunto em que se abordou o tema dos números racionais e em particular a multiplicação de dois decimais, seleccionando-se os distintos episódios que com informações mais profícuas poderiam contribuir para a presente discussão.

Descrição da sessão e sua discussão

As sessões conjuntas de formação decorrem em redor de uma mesa, num ambiente familiar em que todos os elementos do grupo se sentem à vontade para comentar e criticar a actuação, as opções e observações realizados.

A sessão inicia-se com o relato e reflexão das aulas acompanhadas pelo formador, mas também de outras aulas que os formandos pretendam

partilhar por considerarem que foram, para si, significativas. Numa destas aulas partilhadas (do 4.º ano de escolaridade), foi abordada a multiplicação de números decimais. Aí a grande dificuldade dos alunos tinha sido a de perceberem o motivo pelo qual, ao multiplicarem duas determinadas quantidade expressas em décimas obtêm uma determinada quantidade expressa em centésimas, ou seja, por que motivo, ao multiplicarem dois números expressos em décimas, utilizando o algoritmo, têm de considerar duas e não apenas uma casa decimal (como aconteceria se estivessem a efectuar uma adição ou subtracção).

Esta dificuldade manifestada pelos alunos poderá ser justificada, em grande parte, pois os próprios professores não conhecem os fundamentos de tal regra (refiro-me, obviamente, apenas aos professores que fazem parte do grupo de trabalho que deu origem a este texto), tal como evidenciam os seus comentários durante a sessão:

Rosa: O grande problema surge quando se multiplicam dois números decimais, até aí tudo bem.

Formador: Que tipo de tarefas dão aos alunos para lhes explicar como fazer $0,4 \times 0,4$?

Ana: Então... multiplicas como se não tivesse vírgulas e depois contas as casas decimais...

Manuela: O problema é depois tirar as vírgulas...

Rosa: Faço $4 \times 4 = 16$ e no fim conto as casas decimais.

Formador: E porque é que se contam as casas decimais?

Ana: Porque tens ali duas... é só contar...

Manuela: Pois... aí eles ficam sem perceber... mas fazem na mesma! Ou seja, fazemos como nos ensinaram...

Maria: É a regra... no 5.º ano logo aprendem⁵.

A escolha dos valores apresentados esteve relacionada com a situação apresentada aos alunos na aula do 4.º ano e que originou esta discussão.

⁵ Esta professora não leccionará a estes alunos no 5.º ano de escolaridade; contudo reconhece que este é um comentário que faz quando, por vezes, os alunos a questionam sobre algo de que ela não sabe a resposta, nomeadamente, na área da matemática.

Neste episódio de Formação, as professoras verbalizam o seu processo “tradicional” de leccionar este conteúdo específico. Recorrem a esta forma de ensinar pois nunca lhes foi facultada, a elas próprias, a oportunidade de tomarem contacto com as justificações e processos matemáticos que lhes permitiriam criar uma compreensão e ideia própria do processo matemático utilizado, ensinando portanto como foram ensinadas, exactamente como evidenciam Mellado *et al* (1997) para o caso das Ciências Experimentais, evidenciando estes professores o mesmo padrão de comportamento. Denota-se, ainda, pela resposta prontamente fornecida, e não contradita pelos restantes elementos, que para leccionarem este conteúdo, em particular, os professores não utilizam a resolução de problemas como detonante das aprendizagens dos alunos, identificando a matemática escolar com conteúdos exclusivamente escolares. Esta ideia corresponde a um dos indicadores de crenças de Climent (2002), seguindo Carrillo (1998), autores que identificam um conjunto de (indicadores de) crenças dos professores do 1.º ciclo e 2.º ciclos relativamente ao processo de ensino e aprendizagem da matemática. Em concreto esta associação da matemática escolar aos conteúdos escolares, ou que se encontram no manual, corresponde a uma perspectiva de ensino em que o professor assume o papel central e os alunos um papel passivo – associado a um ensino tradicional.

É evidente que os professores têm um conhecimento do conteúdo, pois todos sabem calcular o produto de quaisquer dois números decimais, mas não possuem, tal como seria esperado que acontecesse, (BALL, 2000, BALL; THAMES; PHELPS, 2008, DELANEY *et al*, 2008) um conhecimento específico/especializado para o ensino, que lhes permita conhecer distintas formas de efectuar e representar a operação solicitada. Estes professores desconhecem modelos da multiplicação bem como os procedimentos “escondidos” no algoritmo que transmitem aos seus alunos.

As professoras evidenciam, fundamentalmente, uma lacuna no conhecimento do conteúdo (comum e especializado) – o que considero ser ainda mais problemático, pois ninguém pode ensinar aquilo que não se sabe. Não sabendo como explicar aos alunos tal facto, a professora Maria, passa essa responsabilidade para os professores dos anos seguintes, esperando que

estes o consigam. Este desconhecimento, relacionado com o conhecimento didáctico do conteúdo de Shulman (1986) encontra-se directamente relacionado com o conhecimento matemático necessário para o ensino de Ball *et al* (2008), pois o facto de os professores não conhecerem, e não saberem explicar, os passos intermédios do algoritmo da multiplicação, faz com que lhes seja impossível explicá-los aos seus alunos de modo a que estes o compreendam. Não possuem, portanto a capacidade de lhes facultar a vivência de situações que lhes permitissem entendê-lo⁶.

Esse desconhecimento é reconhecido explicitamente pelas professoras:

Ana: *É que depois é uma confusão porque é que na adição não conta [as casas decimais] e chegamos aqui à multiplicação e temos de contar as casas decimais. Porquê?... pois explicar também não sei!*

Maria: *Mas há alguma justificação para que seja assim que se faz a multiplicação? Na adição e subtracção tudo bem, mas porque se faz assim na multiplicação?*

Com o objectivo de levar as formandas a elaborarem o seu próprio conhecimento sobre o tema em questão – processo que se pretende que realizem com os seus alunos –, é explorado o modelo rectangular da multiplicação para números inteiros, discutindo o processo de determinação do espaço ocupado quando são fornecidas as medidas (inteiras) dos lados de um rectângulo. Este tipo de abordagem tinha já sido discutido numa das sessões de trabalho do ano anterior, em que foi construído o algoritmo da multiplicação a partir desse modelo mas, ao que parece, essa discussão não foi clara o suficiente, pois os professores não se apropriaram totalmente da interpretação do modelo rectangular da multiplicação (multiplicação como área), o que torna também difícil o facto de relacionarem a multiplicação com a divisão – para além da referência à operação inversa na aplicação do algoritmo. (Esta situação

⁶ É referido o algoritmo e não *um* algoritmo pois estes professores apenas no ano anterior tomaram contacto, reconhecido explicitamente por alguns deles no portefólio entregue no final da formação, com algoritmos alternativos – método dos Egípcios, Camponeses Russos, Gelosia – e também com a exploração do modelo rectangular da multiplicação quando estão envolvidos números inteiros superiores à dezena.

reforça a ideia de que é necessário um período alargado de tempo para que os professores possam efectivamente auto-consciencializarem-se da necessidade de adequar as suas práticas às novas orientações, mas fundamentalmente, para fazê-lo.)

Esta discussão é depois estendida à situação em que as medidas dos lados são números decimais (0,2 e 0,4) e para tal é desenhado numa folha um rectângulo (no caso, quadrado):

Formador (indica o rectângulo): *Como é que represento aqui a multiplicação de 0,2x0,4?*

Teodora (indica um dos lados do rectângulo): *Tens de dividir isso em dez partes iguais e escolher apenas duas... e fazer o mesmo do outro lado...*

Apesar de ser também novidade para ela, a professora Teodora, já com 30 anos de prática, foi a única que conseguiu fazer a correspondência entre a representação da multiplicação utilizando o modelo rectangular com números inteiros e a representação utilizando números decimais. Ainda que de forma intuitiva a professora Teodora focou um ponto fundamental relativo à multiplicação de números decimais mas que os professores tendem a leccionar aos seus alunos de forma isolada e como mais uma regra que estes devem decorar: multiplicar por uma décima é o mesmo que dividir por 10.

Depois de dividir um dos lados do rectângulo em dez partes iguais, foram pintadas duas delas e, efectuando o mesmo procedimento para o outro lado do rectângulo, obteve-se o resultado da multiplicação, que corresponde à superfície que foi duplamente pintada, o que surpreendeu bastante os professores, tanto pela simplicidade da elaboração como pela clareza de visualização.

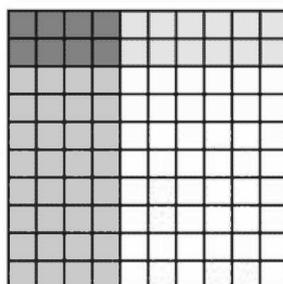


Figura 1 – Modelo rectangular da multiplicação utilizado para efectuar $0,2 \times 0,4$

Após a descoberta desta “nova” forma de considerar a multiplicação, foi ainda necessária uma discussão mais profunda sobre a validade de considerar apenas a parte que ficava duplamente pintada pois, aceitarem e apropriarem-se desta nova situação implicava uma mudança conceptual do seu próprio modelo mental de multiplicação (VOSNIADOU, 1994, 2007) (consideravam que apenas se poderia aplicar o modelo rectangular quando estavam envolvidas quantidades inteiras).

Esta mudança conceptual não se limitou a um enriquecimento, pois não foram apenas acrescentados alguns factos/conhecimentos aos que já se possuía, e que eram consistentes com esses. Foi sim uma efectiva revisão, pois a nova informação que se obteve era inconsistente com as ideias prévias existentes (VOSNIADOU, 1994), sendo isso mesmo evidenciado pelos formandos:

Formador: *Então agora, em quantas partes está a unidade dividida?*

Formandos: *Em 100! Então aqui são 8 das cem partes, 8 centésimas!*

Manuela: *Nunca eu tinha visto nada disto assim. Assim realmente é mais fácil de os alunos entenderem, eu também entendi!*

A Manuela exprimiu um sentimento de todo o grupo, pois todos os formandos concordaram com o seu comentário. Esta tomada de consciência

por parte dos formandos reforça a ideia de Mellado *et al* (1997) de que os professores tendem a ensinar tal como foram eles próprios ensinados, como antes foi referido. Os professores associam o facto de os alunos assim entenderem melhor o processo ao facto de, para eles próprios, este ser uma representação que induz algum sentido à operação.

Apesar de visualmente se obter o resultado da multiplicação proposta, e de os professores considerarem ser este um bom processo para que também os alunos possam dar sentido à multiplicação (inclusivamente nas situações em que o produto é inferior ao multiplicando e/ou multiplicador), faltou ainda, nessa sessão, uma exploração relativa ao algoritmo e à justificação do facto de, ao multiplicarmos dois números decimais, o número de casas decimais do produto ser a soma do número de casa decimais dos factores. Esta exploração foi efectuada na sessão seguinte, relacionando-se o facto de multiplicar por uma décima, uma centésima e uma milésima ser equivalente a dividir por dez, cem ou mil. É de salientar que os conhecimentos profissionais identificados apenas são válidos para estas situações e contexto específicos (DELANEY *et al*, 2008).

Estas experiências tornaram-se bastante profícuas para as professoras pois, mais tarde, em algumas das aulas acompanhadas (no âmbito do PFCM), os alunos exploraram este tipo de actividades possibilitando-lhes assim, as professoras, a oportunidade de efectuarem as operações com compreensão e não somente aplicando uma qualquer regra.

As lacunas aqui evidenciadas apenas puderam ser colmatadas (ou pelo menos consciencializar delas os próprios formandos) pois a ênfase não foi apenas colocada nos conhecimentos dos professores relativos aos conteúdos científicos, contrariamente ao que alguns Professores/Formadores defendem que deva acontecer (concretamente neste PFCM), mas sim, fundamentalmente, à transposição didáctica e adequação das tarefas propostas ao contexto de sala de aula, tal como Jaworski e Wood (1999) afirmam que deve fazer-se neste tipo de formação, descentrando nos desse modo da transmissão de conteúdos. Esta descentralização é, portanto, fundamental para que seja possível, também pelas discussões em que se envolvem os professores, efectuarem as necessárias transposições didácticas, conduzindo-se assim, a um conhecimento matemático que permita um ensino eficaz (BALL, 2003).

Algumas implicações

Neste texto discutiu-se um dos aspectos relativos ao conhecimento matemático no ensino e que os professores devem (neste caso concreto deveriam) possuir de modo a estarem capacitados a fornecer aos seus alunos todas as justificações plausíveis sobre a forma, motivos e propriedades da multiplicação de números decimais, sejam estes maiores, menores ou igual à unidade⁷. A discussão elaborada tem por base um caso concreto, mas pretende-se, com a sua análise, relançar também a discussão do tipo de formação que facultamos aos nossos professores (tanto inicial como contínua) de modo a que estes possam tornar-se efectivamente professores do séc. XXI que conseguem acompanhar o nível de desenvolvimento dos seus alunos e, portanto, que se encontram preparados e desenvolvidos profissionalmente para “todas” as possíveis situações que possam ocorrer durante a preparação e exploração dos diversos conteúdos. Não se pretende, assim, efectuar uma generalização referente ao conhecimento profissional dos professores sobre as operações com racionais, pretende-se, sim, chamar a atenção para uma situação específica, que nos permita olhar para a prática numa outra perspectiva, e salientar o tipo de trabalho, discussão e nível de reflexão que considero ser o mais profícuo no decurso das actividades desenvolvidas em grupos efectivamente colaborativos. Estas situações, também consequência das discussões ocorridas e da análise efectuada, podem ser estendidas a outros casos e re-testadas (MONTEIRO; CARRILLO; AGUADED, 2008) de modo a que nos seja possível atingir um mais rico, amplo e efectivo nível de conhecimento das práticas dos professores e das suas necessidades de formação.

Um dos aspectos que não foi aqui discutido em pormenor, mas em que os participantes evidenciam também uma necessidade de discussão e reflexão, prende-se com o papel dos exemplos escolhidos. Nesse sentido, é de referir que a situação apresentada inicialmente para introduzir a discussão

⁷ Professores e alunos devem contactar com a escrita de números (mesmo os inteiros), recorrendo à sua forma decimal e/ou fraccionária de modo a conhecerem distintos modos de representação de uma mesma quantidade, bem como a ficarem conscientes da possibilidade de representação de números inteiros com recurso à vírgula e à parte decimal (RIBEIRO; CARRILLO; MONTEIRO, 2009).

(multiplicação de 0,4 por 0,4) não é certamente o melhor exemplo para iniciar este tipo de tarefas. Foram escolhidos dois valores iguais o que poderá tornar, só por si, mais complexo o processo que se quer evidenciar, pois não existe diferenciação objectiva de que valor se estará a falar – se do multiplicando ou do multiplicador. Este é um dos aspectos, que creio, deve merecer mais atenção tanto a nível da formação de professores, quer inicial quer contínua, pois relaciona-se concretamente com o conhecimento do papel dos exemplos em geral, e com o conhecimento propedêutico dos professores (conhecer as relações existentes entre os distintos tópicos matemáticos e de que forma as aprendizagens de um mesmo tópico vão evoluindo ao longo da escolaridade). A escolha de valores efectuada para iniciar a exploração da multiplicação de dois valores decimais recorrendo a dois valores iguais (0,4 por 0,4) poderá, tal como refere Rowland (2008), obscurecer o papel das variáveis.

Os professores devem possuir um conhecimento matemático conciso, profícuo, sustentável, e saber utilizar a matemática de uma forma específica apenas necessária à profissão docente. Esta necessidade de entendimento e utilização difere daquele conhecimento que ocorre com outras profissões (BALL; BASS, 2003). A diferença centra-se fundamentalmente nos conhecimentos necessários ao professor, que apenas o são para si (no desenrolar das suas acções durante a prática), e na forma como este os encara, explora e interliga com todos os outros mais gerais. Um dos temas matemáticos que é utilizado em distintas profissões, apenas como instrumento, é exactamente o conteúdo dos números fraccionários (e.g. engenharia, enfermagem), porém, em nenhuma dessas áreas é requerido que os seus utilizadores sejam mais do apenas isso – meros utilizadores –, não tendo necessidade de tornar claro a outros o porquê de efectuarem determinadas operações e fundamentalmente como o fazem. Considero portanto que os professores devem, para além de possuir um conhecimento de matemática, que se adquire ao longo da sua formação, desde o momento em que inicia a sua escolaridade e que corresponde a um saber mais científico – saber fazer –, mas também um conhecimento que lhes permita tornar essa matemática compreensível para outros, que corresponde a um saber ensinar a fazer.

Os professores participantes neste grupo possuíam um conhecimento

do conteúdo na óptica do utilizador, não possuindo o conhecimento de outras formas alternativas de o abordar, não se encontrando, portanto, capacitados a torná-lo compreensível para os seus alunos, de modo a que estes os utilizem com compreensão.

Uma das mais-valias do tipo de discussão que ocorreu no seio do grupo, para além da exploração de “novas” situações, foi o aspecto de os professores reconhecerem explicitamente que para efectuarem este tipo de operações ensinavam aos seus alunos um processo limitador, consideraram que isso se devia, em parte, ao facto de não terem tido elas próprias, enquanto professoras (durante as diversas formações contínuas anteriormente efectuadas) ou mesmo enquanto alunas (de todos os níveis de escolaridade e de formação inicial) a oportunidade de discutirem abertamente estes conteúdos (e outros) da forma como ocorreu nestas sessões. Este hábito de questionamento contínuo é, para Climent (2002), o detonador de um sustentado desenvolvimento profissional.

As operações com números fraccionários, em particular decimais, por não serem tão intuitivas como as que envolvem números naturais (inteiros), são, por vezes, encaradas pelos professores como apenas um conjunto de regras que os alunos devem aprender e aplicar. Esta prática apenas poderá ser alterada se os próprios professores forem possuidores de um saber ensinar a fazer, mais do que apenas um saber fazer (BALL; BASS, 2003, BALL; HILL; BASS, 2005, BALL, 2003, BALL; THAMES; PHELPS, 2008, HILL; ROWAN; BALL, 2005), pois, se isso não se verificar continuarão a apresentar aos seus alunos uma matemática escolar orientada para a aquisição de conceitos e regras, o que não permitirá, neste caso específico, uma utilização dos algoritmos com efectiva compreensão. Tal como referem Lo, Grant e Flowers (2008), mas no caso concreto aqui abordado dizendo respeito aos professores em exercício e não aos estagiários, tal como os autores mencionam, quando lhes facultamos a hipótese de aprofundarem e estenderem o seu conhecimento matemático de modo a incluir o conhecimento matemático especializado referido por Ball, estamos a contribuir para um crescimento dos próprios professores em termos profissionais.

A preocupação com a intervenção e a mudança das práticas,

considerada necessária (PONTE, 2002), nesta situação concreta, foi sentida particularmente por todos os elementos do grupo, pois a partir da reflexão subjacente, todos se questionaram sobre a sua prática e sobre as alterações que poderiam e/ou deveriam ser efectuadas em cada caso particular. Este tipo de abordagem apenas é possível se os professores estiverem conscientes de que o objectivo do tipo de trabalho a desenvolver (de forma colaborativa) é o de focar os diferentes aspectos da sua prática. É importante que estes se consciencializem de que se perspectiva facultar-lhes uma maior compreensão das suas práticas, de modo a que, por essa consciencialização as possam tornar mais adequadas às suas efectivas cognições e não numa perspectiva de avaliação dessas mesmas práticas ou competências. Este pressuposto é essencial para que os professores (ou futuros professores) se sintam suficientemente à-vontade para discutirem efectivamente as suas práticas e abordarem-nas, assim, talvez numa perspectiva de promoção de conhecimentos que, sendo em si verdadeiros, se transformarão, expectavelmente, também em distintas formas de conhecimentos e capacidades por parte dos alunos. Ao desenvolver um trabalho com estas características, com os professores, é desejável que estes o desenvolvam também com os seus alunos (reproduzam o tipo de modelos a que são sujeitos) de modo a que os alunos possam desenvolver, de forma consistente, um pensamento matemático conceptual. Este desenvolvimento ocorrerá de forma mais consistente se os próprios professores encararem a matemática como uma rede de ideias, entendendo-a como uma estrutura global e padrões (IANNONE; COCKBURN, 2008).

Possíveis focos para a formação de professores

Enquanto formador de professores – de formação inicial, complementar e contínua – um dos meus objectivos é o de lhes facultar situações que lhes permitam consciencializar se das suas próprias cognições, bem como do impacto destas no processo de ensino, de modo a que, durante o processo, os professores ou futuros professores, se possam desenvolver profissionalmente.

Encaro, assim, o desenvolvimento profissional dos professores de

forma abrangente. Deste modo, nos programas de formação elaborados com o intuito de promover o desenvolvimento profissional dos professores deve ter-se em conta um conjunto diversificado de aspectos, que abranjam as mais diversas áreas curriculares pois cada vez mais se deverá considerar, e esperar, que o professor seja um profissional completo – ainda mais os professores dos primeiros anos que têm a seu cargo distintas áreas curriculares. Esta completude vai sendo construída considerando também que muitas das componentes do conhecimento profissional dos professores é transversal às mais diversas áreas e situações, devendo estas situações ser abordadas sempre com o foco nos conteúdos e nos conhecimentos necessários ao professor para que esses conteúdos se tornem compreensíveis para os seus alunos. A abrangência é ampla pois considero também bastante relevante o tipo de trabalho que ocorre durante a formação inicial de professores, não devendo esta ser considerada o parente pobre das situações promotoras de desenvolvimento profissional, devendo sim, assumir um lugar de destaque no processo de formação de uma comunidade de práticas.

Este desenvolvimento profissional pode ser encarado considerando diversos focos e ocorrer a partir de um conjunto diversificado de formas. Uma dessas formas, a qual considero ser a que maiores e mais profícuas discussões e reflexões poderá originar é considerar a prática de sala de aula como ponto de partida, sendo esta encarada como meio primordialmente gerador e potenciador de identificação das situações em que basear posteriormente as discussões/reflexões. Estas discussões e reflexões devem, assim, para além de fundamentadas na prática, centrar-se nas situações matematicamente críticas identificadas, de modo a que possam conduzir a uma consciencialização e, se considerado necessário pelos próprios professores, a uma alteração dessas mesmas práticas, para além da passagem a um nível mais profundo de conhecimentos⁸, crenças, objectivos e formas de actuação. No caso da formação inicial, uma vez que as discussões e reflexões se baseiam maioritariamente na prática de outros,⁹ por não se discutirem as suas práticas de sala de aula (pois não as possuem ainda enquanto futuros

⁸ Estes conhecimentos são por mim encarados numa dimensão ampla, não se limitando aos conhecimentos do conteúdo em termos científicos, mas englobando todas as suas dimensões (e.g. Rowland, Huckstep e Thwaites (2005) e Ball, Thames e Phelps (2008)).

⁹ Os alunos de formação inicial apenas nos últimos anos têm uma experiência efectiva de leccionação de aulas e como considero que este tipo de trabalho deverá ser realizado desde o primeiro ano, terá, necessariamente, de se basear na prática de outros professores, recorrendo à gravação das suas aulas.

professores), poderá almejar-se que este tipo de trabalho permita a que os futuros professores, ao contactarem com distintos tipos de práticas, adquiram um espírito crítico e uma postura que não lhes limite a actuação futura, potenciando, desde o início, a capacidade de reflexão sobre a sua (futura) prática tornando-os efectivos profissionais reflexivos. Este aspecto é de suprema importância, pois ninguém pode “ensinar” o que não sabe, considerando neste Saber, o conhecimento de saber como fazer e de como ensinar a fazer.

De modo a discutir e desenvolver com os professores o seu conhecimento profissional, pode recorrer-se à modelação das suas aulas/práticas (PETROU, 2009, RIBEIRO, 2008, RIBEIRO; MONTEIRO; CARRILLO, 2009). Essa modelação, associada a um trabalho colaborativo com as características referidas anteriormente, me que existe uma confiança mútua entre todos os intervenientes e um à-vontade que incentiva à reflexão e crítica construtiva, poderá levar a uma consciencialização dos professores sobre as suas próprias práticas e conhecimentos, focando algumas das suas componentes, nomeadamente as crenças, conhecimentos e objectivos do professor durante a sua prática, bem como a história matemática de cada aula. A conjugação do processo de modelação com a identificação e discussão da história matemática da aula (e.g. tipo de actividade matemática desenvolvida, tipos de tarefas, orientação e foco do processo de ensino, conexões efectuadas, ...) é por demais pertinente pois devemos partir do que sabemos para o tentar melhorar. Frequentemente, os professores ocupam grande parte da aula em actividades com pouco, ou mesmo nenhum, conteúdo matemático, preocupando-se muito mais com pormenores de gestão ou tentando desenvolver competências que são respeitantes a outros domínios, deixando para segundo plano os aspectos matemáticos (RIBEIRO; CARRILLO; MONTEIRO, 2009).

Na promoção do desenvolvimento profissional dos professores, devemos ter em conta as situações e focos já identificados na literatura como sendo os mais relevantes e que se encontram mais em falta nas práticas dos professores. Devemos ter também em conta possíveis novos focos e perspectivas identificadas a partir da prática dos próprios professores para

que estes se identifiquem com as situações discutidas e analisadas. Estas situações, mais uma vez, devem ser utilizadas/aplicadas tanto na formação inicial como contínua, de modo a que os professores, actuais ou futuros, não evidenciem o mesmo tipo de problemas e dificuldades das já identificadas na literatura, efectivando assim uma aproximação de ambos os contextos. Dessa forma podem sentir-se preparados para acompanhar, e corresponder aos desafios dos seus alunos (só por si tarefa árdua) de modo a desafiar-los constantemente em termos das distintas abordagens e perspectivas a encarar em cada situação específica que lhes propõem.

O paralelismo entre o tipo de trabalho que se pretende efectuar com os professores em exercício e o que considero dever ser também realizado com os alunos em formação inicial prende-se com o facto de se pretender que estes fiquem enquadrados quando passarem a fazer parte efectiva dessa comunidade profissional. Independentemente do formato do grupo de trabalho é importante que o foco das reflexões não seja sobre aspectos organizacionais (BROWN *et al* 1999), mas sim sobre aspectos relacionados com os conteúdos matemáticos e as formas de os explorar, discutindo efectivamente a história matemática de cada situação específica de modo a que se possam expandir as habilidades localizadas quer de alunos quer de professores em relação a cada assunto/tópico, levando à criação de uma habilidade matemática geral.

Os tipos de discussões no seio do grupo e a forma como ocorrem assumem extrema importância, pois podem conduzir à criação de modelos mentais de ensino, incorporando e considerando como seus o conjunto de novas informações e/ou conhecimentos gerados no seio do grupo.

Devemos encarar os professores como profissionais reflexivos e criativos cujo desenrolar da prática passa também pela atomização de conceitos e experiências, que se entrelaçam entre si de modo a criar estruturas e a desenvolver práticas que são cada vez mais complexas e estruturadas. Esta união pode ser considerada a base do ADN da profissão docente.

Referências

BALL, D. Prospective elementary and secondary teacher's understanding of division. **Journal for Research in Mathematics Education**, n. 21, p. 132-144, 1990.

BALL, D.; BASS, H. Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In: ANNUAL MEETING OF THE CANADIAN MATHEMATICS EDUCATION STUDY GROUP, 2002, Edmonton. **Proceedings...** Edmonton: CMESG/GCEDM, 2003. p. 3-14.

BALL, D.; HILL, H.; BASS, H. Knowing Mathematics for Teaching. Who knows Mathematics Well Enough to Teach Third Grade, and How Can We Decide? **American Educator**, Fall 2005, p. 14-46, 2005.

BALL, D. L. Bridging practices. Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. **Journal of Teacher Education**, v. 51, n.3, p. 241-247, 2000.

BALL, D. L. **What mathematical knowledge is needed for teaching mathematics.** Paper presented at the U.S. Department of Education, Secretary's Mathematics Summit, Washington DC, February 6, 2003. Disponível em: <<http://www-personal.umich.edu/~dball/presentations/index.html>>. Acesso em: 10 mai. 2008.

BALL, D.; THAMES, M.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: what makes it special? **Journal of Teacher Education**, v 59, n. 5, p. 389-407, 2008

BAROODY, A. J.; COSLICK, R. T. **Fostering children's mathematical power:** An investigative approach to k-8 mathematics instruction. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1998.

BROWN, T.; MCNAMARA, O.; JONES, L.; HANLEY, U. Primary students teachers' understanding of mathematics and its teaching. **British Education Research Journal**, v. 2, n. 3, p. 299-322, 1999.

CARRILLO, J. **Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones.** Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones, 1998.

CLIMENT, N. **El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de la enseñanza de la matemática:** Un estudio de caso. 2005. 903 páginas. Tese (Doutorado em Didáctica da Matemática) - Proquest Michigan University, Michigan, 2002.

CLIMENT, N.; CARRILLO, J. Developing and researching professional knowledge with primary teachers. In: CERME 2: CONFERENCE OF THE EUROPEAN RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, n. 2, 2002, Praga. **Proceedings...**

Praga: Charles University, Faculty of Education, 2002. v. 1, 2002. p. 269-280.
DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO BÁSICA (DEB). **Organização Curricular e Programas: Ensino Básico – 1.º Ciclo**. Lisboa: Ministério da Educação, 1991.

DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO BÁSICA (DEB). **Currículo Nacional do Ensino Básico: competências essenciais**. Lisboa: Ministério da Educação, 2001.

DELANEY, S.; BALL, D. L.; HILL, H. C.; SCHILLING, S. G.; ZOPF, D. Mathematical Knowledge for teaching: adapting U. S. measures for use in Ireland. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 11, n. 3, p. 171-197, 2008.

DIRECÇÃO GERAL DE INOVAÇÃO E DESENVOLVIMENTO CURRICULAR (DGIDC). **Programa de Matemática do Ensino Básico**. Lisboa: Ministério da Educação, 2007.

ELBAZ, F. The teachers' "practical knowledge": report of a case study. **Curriculum Inquiry**, n. 11, p. 43-71, 1981.

ELBAZ, F. **Teacher thinking: a study of practical knowledge**. Londres: Croom Helm, 1983.

HILL, H.; ROWAN, B.; BALL, D. L. Effects of teachers' mathematics knowledge for teaching on student achievement. **American Education Research Journal**, v. 42, n. 2, p. 371-406, 2005.

IANNONE, P.; COCKBURN, A. D. "If you can count to ten you can count to infinity really": fostering conceptual mathematical thinking in the first year of primary school. **Research in Mathematics Education**, v. 10, n. 1, p. 37-51, 2008.

JAWORSKI, B.; WOOD, T. Themes and issues in in-service programmes. In: B. JAWORSKI, T. WOOD; S. DAWSON. (Eds.). **Mathematics Teacher Education: Critical International Perspectives**. Londres: Falmer Press, 1999. p. 125-147.

LECOMPTE, M.; PREISSLE, J. **Ethnography and qualitative design in educational research**. Londres: Academic Press, 1993.

LESH, R. A.; HOOVER, M. B.; KELLY, A.; POST, T. Principles for developing thoughts-revealing activities for students and teachers. In: LESH, R. A.; KELLY, A. (Eds.). **Handbook of research design in mathematics and science education**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 2000. p. 591-646.

LO, J.-J.; GRANT, T. J.; FLOWERS, J. Challenges in deepening prospective teachers' understanding of multiplication through justification. **Journal of Teacher Education**, v. 1, n. 1, p. 5-22, 2008.

MELLADO, V. J.; RUIZ, C. M.; BLANCO, J. L. Aprender a enseñar Ciencias Experimentales en la formación inicial de maestros. **Bórdon**, v. 49, n. 3, p. 275-288, 1997.

MONTEIRO, R.; CARRILLO, J.; AGUADED, S. Emergent theorizations in Modelling the Teaching of Two Science Teachers. **Research in Science Education**, v. 3, n. 38, p. 301-319, 2008.

MUÑOZ-CATALÁN, M. C.; CARRILLO, J. Conocimiento numérico de futuros maestros. **Educación Matemática**, v. 19, n. 1, p. 5-26, 2007.

NICOL, C. Learning to teach mathematics: questioning, listening, and responding. **Educational Studies in Mathematics**, n. 37, p. 45-66, 1999.

PETROU, M. Adapting the knowledge quartet in the Cypriot Mathematics classroom. In: CERME 6: CONFERENCE OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, n. 6, 2009. **Proceedings...** Lyon, França. Université de Lyon, 2009. p. 385-394.

PONTE, J. P. Investigar a nossa própria prática. In: ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA (Ed.). **Refletir e investigar sobre a prática profissional**. Lisboa: APM, 2002. p. 5-28.

RIBEIRO, C. M. From modeling the teacher practice to the establishment of relations between the teacher actions and cognitions. In: JOUBERT, M. (Ed.). **Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics**, v. 28, n. 3, p. 102-107. Londres: British Society for Research into Learning Mathematics, 2008.

RIBEIRO, C. M.; CARRILLO, J.; MONTEIRO, R. O conhecimento profissional em acção aquando da elaboração de um pictograma: uma situação de (i)literacia. In: ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – NÚMEROS E ESTATÍSTICA: reflectindo no presente, perspectivando no futuro, n. 19, 2009. **Proceedings...** Vila Real, Portugal: SPCE, 2009.

RIBEIRO, C. M.; MONTEIRO, R.; CARRILLO, J. Professional knowledge in an improvisation episode: the importance of a cognitive model. In: CERME 6: CONFERENCE OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, n. 6, 2009. **Proceedings...** Lyon, França: Université de Lyon, 2009. p. 353-363.

ROCHELLE, J. Choosing and using video equipment for data collection. In: KELLY, A.; LECH, R. (Eds.). **Handbook of research design in mathematics and science education**. Londres: Lawrence Erlbaum Associates Publishers, 2000.

ROWLAND, T. The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, n. 69, p. 149-163, 2008.

ROWLAND, T.; HUCKSTEP, P.; THWAITES, A. Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. **Journal of Mathematics Teacher Education**, n. 8, p. 255-281, 2005.

SANTAGATA, R.; ZANNONI, C.; STIGLER, J. W. The role of lesson analysis in pre-service teacher education: an empirical investigation of teacher learning from a virtual video-based field experience. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 10, n. 2, p. 123-140, 2007.

SARAIVA, M. J. **O Conhecimento Profissional dos Professores de Matemática: um projecto colaborativo**. 2001. 586 páginas. Tese (Doutoramento em Didáctica da Matemática) - Universidade de Lisboa, Lisboa, 2001.

SCHOENFELD, A. Toward a theory of teaching-in-context. **Issues in Education**, v. 4, n. 1, p. 1-94, 1998.

SCHÖN, D. **The reflective practitioner: how professionals think in action**. Nova York: Basic Books, Inc., Publishers, 1983.

SCHÖN, D. **Educating the reflective practitioner: toward a new design for teaching and learning in the professions**. San Francisco, CA: Jossey Bass, 1987.

SHULMAN, L. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SHULMAN, L. Toward a pedagogy of cases. In: SHULMAN, J. (Ed.). **Case Methods in Teacher Education**. Nova York: Teachers College Press, 1992. p. 1-30.

STAKE, R. **Investigación con estudio de casos**. Madrid: Ediciones Morata, 1998.

STAKE, R. Case Studies. In: DENZIN, N. K.; Lincoln, Y. (Eds.). **Handbook of qualitative research**. Thousand Oaks: Sage, 2000. p. 435-454.

STAR, J. R.; STRICKLAND, S. K. Learning to observe: using video to improve preservice mathematics teachers' ability to notice. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 11, n. 2, p. 107-125, 2008.

TICHA, M.; HOSPESOVA, A. Qualified pedagogical reflection as a way to improve mathematics education. **Journal of Mathematics Teacher Education**, n. 9, p. 129-156, 2006.

26 *Bolema, Rio Claro (SP), Ano 22, n° 34, 2009, p. 1 a 26*

VOSNIADOU, S. Capturing and modelling the process of conceptual change. **Learning and Instruction**, n. 4, p. 45-69, 1994.

VOSNIADOU, S. The Cognitive-Situative Divide and the Problem of Conceptual Change. **Educational Psychologist**, v. 42, n. 1, p. 55-66, 2007.

Aprovado em janeiro de 2009
Submetido em setembro de 2008