



As Relações entre Área e Perímetro na Geometria Plana: o papel dos observáveis e das regulações na construção da explicação

Relations between Area and Perimeter in Plane Geometry: the role of observables and regulations in the construction of explanation

João Alberto da Silva¹

Resumo

O ensino da geometria plana nas séries finais do Ensino Fundamental é, muitas vezes, desprovido de sentido. Os professores optam por práticas pedagógicas que se fundamentam em algoritmos, sem preocuparem-se com os processos de pensamento que estão envolvidos na construção do pensamento geométrico. Essa pesquisa vale-se da Epistemologia Genética para investigar como adolescentes e adultos, que freqüentaram a escola e obtiveram êxito na aprendizagem de geometria, elaboram explicações a propósito de problemas que envolvem o cálculo da área e do perímetro de figuras planas. Os dados indicam que a totalidade dos entrevistados é capaz de realizar o cálculo através do algoritmo, mas muito poucos apresentam explicações elaboradas. Os modelos explicativos são os mais variados e dirigem-se de um pensamento baseado exclusivamente na percepção até a explicação lógico-matemática dos conceitos envolvidos.

Palavras-chave: Ensino de Geometria. Modelos Explicativos. Jean Piaget. Epistemologia Genética

Abstract

The teaching of plane geometry in elementary school is often lacking in meaning. Teachers choose teaching practices based on algorithms, without concern for the thinking

¹ Doutor em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Correspondências para: Rua Tiradentes, 2323/305 – Pelotas – RS 96010-160. E-mail: joao.alberto@ufrgs.br

processes involved in the construction of geometric thinking. This study is based on Genetic Epistemology to investigate how adolescents and adults who attended school, and were successful in learning geometry, construct explanations about problems involving the calculation of the area and the perimeter of plane figures. The data show that the interviewees are capable of doing the calculation with the algorithm, but very few show elaborated explanations. The explanatory models are the most varied, ranging from thinking based solely on perception to logical-mathematical explanations of the concepts involved.

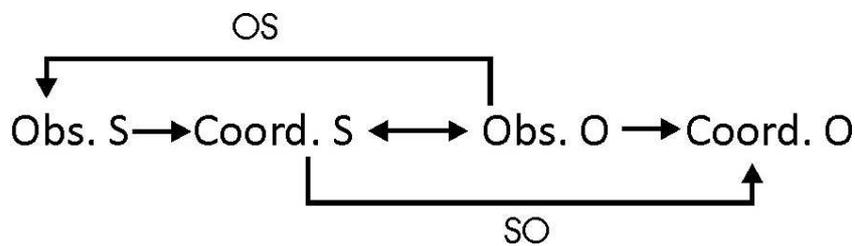
Key-words: Teaching of Geometry. Explanatory Models. Jean Piaget. Genetic Epistemology.

Introdução

Os conteúdos elementares da geometria são ensinados, em geral, na sexta série do Ensino Fundamental. Abordam o cálculo da superfície e do contorno de figuras planas e se ocupam da formalização desses conceitos através de algoritmos que indicam que o perímetro é a soma de todos os lados e que a área, no caso dos quadriláteros, pode ser obtida pela multiplicação de dois lados. Tem-se a hipótese de que, mesmo dominando o cálculo, muitos sujeitos não são capazes de elaborar uma explicação para a relação que existe entre a área e o perímetro de quadriláteros.

Assim, o estudo da construção da explicação sobre os conteúdos elementares de geometria se reveste de interesse devido à relação que se estabelece entre os aspectos psicológicos da inteligência e os conteúdos que são normalmente ensinados nas escolas. Cabe se perguntar como procede o sujeito em um problema no qual é necessário compreender as relações entre área e perímetro em quadriláteros: os cálculos serão o índice que auxilia nos julgamentos ou o sujeito se deixa levar pela percepção? No caso de sucesso diante dos obstáculos, o sujeito os supera pelos meios que aprendeu na escola ou desenvolve outros mecanismos? É igualmente interessante investigar o papel dos observáveis registrados no objeto e aqueles que o sujeito crê constatar na construção da explicação. Em resumo, o interesse deste artigo é examinar os processos de pensamento desenvolvidos por sujeitos adultos diante de situações que envolvem alguns problemas da geometria plana.

Para analisar como se desenrola o funcionamento do pensamento dos participantes da pesquisa recorre-se à teoria da equilibração (PIAGET, 1976). Na dinâmica da equilibração há quatro fatores envolvidos: os observáveis e as coordenações do sujeito e os observáveis e as coordenações dos objetos que se quer conhecer. Um dos modelos propostos por Piaget para a equilibração é o seguinte



Compreendem-se por:

Obs. S: observáveis que o sujeito crê constatar

Obs. O: observáveis registrados nos objetos

Coord. S: coordenações inferenciais elaboradas pelo sujeito

Coord. O: coordenações dos objetos ou suas relações causais

No modelo da equilibração tem-se um processo relativo aos observáveis (OS) e outro às coordenações (SO). A relação OS mostra a interação na periferia da relação sujeito-objeto, enquanto que SO mostra a situação relativa aos centros de coordenação do sujeito e do objeto. É interessante observar que essas relações entre os observáveis registrados nos objetos (Obs. O) e os que o sujeito acredita constatar (Obs. S) estão em direta relação com as coordenações que permitem a leitura desses. Os observáveis do sujeito não podem ser definidos por aquilo que a realidade coloca, mas por aquilo que o indivíduo é ali capaz de averiguar, uma vez que pode, até mesmo, perceber dados que não existem. Os observáveis nunca são independentes das coordenações, pois delas necessitam para serem interpretados. Em muitos casos, as coordenações do sujeito não permitem uma leitura correta dos observáveis e as coordenações do objeto impõem certa resistência à assimilação do sujeito, o que pode resultar em perturbações às expectativas.

No plano das coordenações, o processo SO traz a relação entre as coordenações do sujeito (Coord. S) e as do objeto (Coord. O). O sujeito só chega ao conhecimento de suas ações através dos resultados nos objetos, mas só compreende esses resultados através das coordenações das próprias ações. Quando o sujeito verifica o efeito de suas ações, pode obter *feedbacks*, positivos ou negativos, para as antecipações que elabora. Quando há um desequilíbrio entre os Obs. S e os Obs. O, é necessário uma compensação às perturbações que daí se originam. Caso as coordenações do sujeito não sejam muito sistematizadas, as coordenações atribuídas às relações causais dos objetos refletem esse nível de organização. Assim, podem-se produzir observáveis do próprio sujeito que não condizem adequadamente com a realidade, ocasionando uma perturbação e a necessidade de uma reorganização. Estes arranjos que vão ocorrendo durante os processos de interação são as regulações que o pensamento executa para enfrentar os problemas. Se os observáveis do objeto perturbam as expectativas, é necessária uma nova articulação para compensar essa perturbação. O desenrolar das regulações vai resultar em novas e mais qualificadas coordenações do sujeito, que atribuídas aos objetos, melhor definem as relações causais e os observáveis que disso resultam. Em resumo, pode-se observar um mecanismo que compensa possíveis perturbações oriundas dos objetos por regulações nas coordenações do sujeito. Ocorre o que Piaget já dizia em 1937, sobre a inteligência: “ela organiza o mundo, organizando-se a si mesma” (p. 361).

O sujeito atribui suas coordenações às coordenações dos objetos e por isso a explicação causal e da realidade é resultado da organização interna das ações. Trata-se de um modelo altamente interativo e que explicita o enorme jogo de compensações e regulações que ocorrem nas relações sujeito e objeto. Contudo, o objeto não se entrega facilmente à assimilação e isso se desenrola em condutas que vão desde a negação das perturbações à adaptação da perturbação como possibilidade do real.

As resistências do objeto podem desencadear três tipos de condutas de compensação em relação às perturbações: ou o sujeito ignora a perturbação, ou assimila a perturbação parcialmente como condição particular de seu sistema organizado e assim o conserva, ou compensa a perturbação

por uma regulação geral do seu pensamento. Piaget (1976) chama essas reações de condutas á, â e ã. As condutas á, então, referem-se aos processos de compensação que negam a existência de um desequilíbrio pela desqualificação da importância do fato. As condutas â tratam das compensações através das quais o sujeito atribui à perturbação um caráter excepcional. Nas condutas ã, ao se deparar com uma perturbação, o sujeito pode elaborar uma compensação em sentido contrário, cuja regulação é capaz de reorganizar todo o sistema em função da necessidade de compensação à perturbação. Analisar o desenrolar destas condutas no caso específico da prova proposta é um dos objetivos deste estudo.

Abordagem metodológica

Esta pesquisa caracteriza-se por ser um estudo exploratório, descritivo e de cunho qualitativo. A orientação metodológica é inspirada nos procedimentos normalmente utilizados nas pesquisas em Epistemologia e Psicologia Genéticas. Em especial, o método clínico e suas variações ao longo da obra de Piaget (VINH-BANG, 1966) é o referencial que se adota para a coleta e análise dos dados.

O método clínico ou método de exploração crítica é um procedimento de coleta e análise de dados que fornece ao pesquisador uma possibilidade de compreensão do pensamento e dos comportamentos dos sujeitos. De acordo com Vinh-Bang (1966), ele é flexível para dar conta das inúmeras possibilidades que podem surgir ao longo de uma experiência ou entrevista, ao mesmo tempo em que exige uma organização muito rápida das hipóteses e do pensamento do pesquisador para que seja aplicado da maneira mais adequada.

Nessa perspectiva, os processos de pensamento não são visíveis exclusivamente pela observação pura do comportamento, pois o sujeito pode estar em alta atividade mental sem produzir uma ação exterior. Como dizem Inhelder, Bovet e Sinclair (1977, p. 36): “ser ativo cognitivamente não se reduz [...] a uma manipulação qualquer; pode haver atividade mental sem manipulação, assim como passividade com manipulação”. No Método Clínico

as exigências para com o entrevistador são inúmeras, a reformulação das hipóteses é constante e a sagacidade tem de ser imediata. Os obstáculos incluíram o medo de se perder alguma informação importante que estivesse surgindo no decorrer da entrevista ou, principalmente, de se falar demais e conduzir o pensamento do entrevistado. A partir da observação da manipulação do material e da descrição verbal que os participantes realizavam sobre suas ações, foram se adequando as perguntas do protocolo anteriormente elaborado.

Foram entrevistados 29 sujeitos, com idades que variam de 15 a 61 anos², que responderam voluntariamente o chamado do pesquisador. Cada um dos participantes da pesquisa foi entrevistado individualmente em sessões que variaram de 25 a 35 minutos, dividida em duas etapas. Em um primeiro momento organiza-se uma situação em que o perímetro se conserva ao longo de diferentes transformações, mas a área se altera.

Inicialmente, pede-se ao entrevistado que resolva em uma folha de papel a parte o cálculo da área e do perímetro de duas figuras: um retângulo de 6 cm por 4 cm e de um quadrado de lado 8 cm. Após, utiliza-se um geoplano, pinos e um cordão de 20 cm de comprimento para investigar a compreensão que o sujeito possui sobre os conceitos. O geoplano é um material muito usado no ensino de geometria. Trata-se de um tabuleiro com furos eqüidistantes em 1 cm. Nestes furos, colocam-se pinos, os quais servem de apoio para que, com um barbante, se limite uma superfície. Os furos servem como índice para mensurar a superfície limitada pelo cordão, bem como seu comprimento. A fácil alteração das figuras pela mobilidade dos pinos e a possibilidade de contagem dos furos faz com que o geoplano seja muito útil no ensino da geometria.

Neste estudo o geoplano é utilizado para representar quatro quadriláteros. O primeiro (A) é um quadrado de lado 5 (área = 25 e perímetro = 20); o segundo (B) é um retângulo de lados 6 e 4 (área = 24 e perímetro = 20); o terceiro (C) é outro retângulo de lados 8 e 2 (área = 16 e perímetro = 20); o último (D) é por sua vez um retângulo cujo um lado é apenas a espessura de um furo e o outro 9 (área = 9 e perímetro = 20). Os pinos já estão colocados

² Ao final do estudo comprovou-se que a idade cronológica não é uma variável relevante.

no geoplano desde o início do experimento e não são retirados nas transformações, apenas o cordão é que muda de lugar.

Observe-se a Figura 1 a seguir:

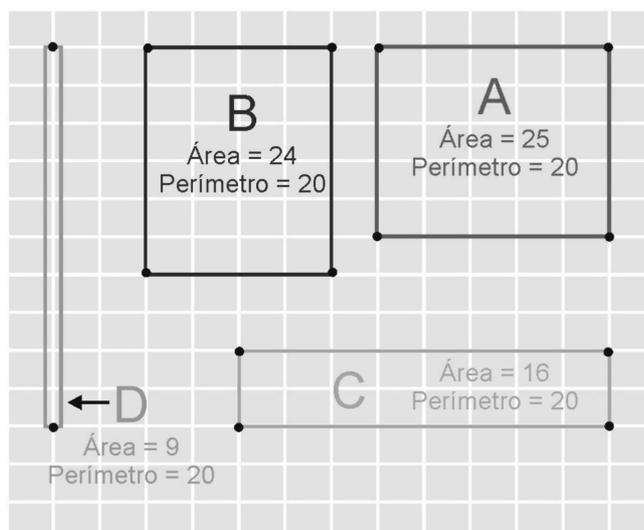


Figura 1 – Ilustração do geoplano para conservação do perímetro e alteração da área

Conta-se para o entrevistado, diante do geoplano, uma pequena história:

Há um senhor que comprou um cachorro e construiu um canil próximo de sua casa. *Coloca-se o cordão nos pinos que correspondem ao quadrado A.* Após algum tempo esse senhor resolve trocar o canil de lugar no terreno e o constrói de outra maneira. *Retira-se o cordão do quadrado A e passa-o para o retângulo B.* Pergunta-se ao entrevistado: O que aconteceu com a superfície? E com a cerca? Caso o entrevistado não compreenda as perguntas pode-se enfatizar indagando se foi preciso que o dono do cão comprasse mais arame para fazer a cerca do canil ou como ficou a superfície para o animal brincar. Depois de um tempo, o senhor achou que o cão não estava muito feliz naquele lugar e resolveu trocar novamente o canil de lugar. *Retira-se o cordão do retângulo B e passa-o para o retângulo C.* Pergunta-se novamente ao entrevistado como está a superfície e a cerca do novo canil. Explora-se a explicação do sujeito em função de suas respostas. Por último, conta-se que o dono do cão ainda não estava satisfeito com o canil e o trocou mais uma vez. *Retira-se o cordão do retângulo C e passa-o para a figura D.* Interroga-se o sujeito a propósito da superfície e da cerca.

Teve-se o cuidado de durante a entrevista não se utilizar o termo área e perímetro, mas empregar as palavras superfície e contorno. Essa opção se justifica pelo fato de se ter a hipótese de que mesmo realizando o cálculo da superfície e do contorno dos quadriláteros, alguns sujeitos podem não compreender a que exatamente as palavras “área” e “perímetro” se referem.

Para uma segunda etapa da sessão optou-se pela utilização de outra situação, de mesmo conteúdo, mas de características inversas: uma prova na qual a área se conserva ao longo de diversas transformações e o perímetro sofre alterações constantes. Com a introdução dessa segunda etapa foi possível ampliar a qualidade dos dados coletados com a entrevista e estabelecer, com mais precisão, a compensação que o sujeito elaborou para a perturbação da última transformação do geoplano. É evidente que essa outra situação adquire maior relevância nos casos em que o participante encontra perturbações às suas antecipações e consegue superar os problemas por regulações que visam a compensar as perturbações dos objetos. No caso dos sujeitos que se apresentaram desde o início com uma compreensão total dos fatos, essa segunda etapa é apenas uma confirmação dessa compreensão. No caso dos sujeitos que elaboraram explicações muito pobres e não perceberam qualquer perturbação na primeira etapa, a segunda é apenas mais uma situação na qual o sujeito aplica seu modelo explicativo, sem regulações, já que não percebe a resistência dos objetos à sua assimilação.

Na segunda etapa utilizam-se seis cartas de baralho, que nada mais são do que retângulos de papel com lados de 1 cm e 1,5 cm. Elas são colocadas sempre sobre o geoplano, de forma que, se o sujeito assim o desejar, pode utilizar os furos como índice para mensurar os retângulos. Inicialmente, é construída uma figura com os seis retângulos organizados em duas fileiras de três (A), após, modifica-se a figura, organizando os retângulos em três fileiras de dois (B). Por fim, as cartas são organizadas em uma única fileira (C). Na figura A tem-se uma superfície de 9 e um perímetro de 12; na figura B a área é igualmente de 9 e o perímetro passa a 13, na C, a área continua a mesma e o perímetro sobe para 20.

Os seis retângulos sofreram as três variações conforme a Figura 2:

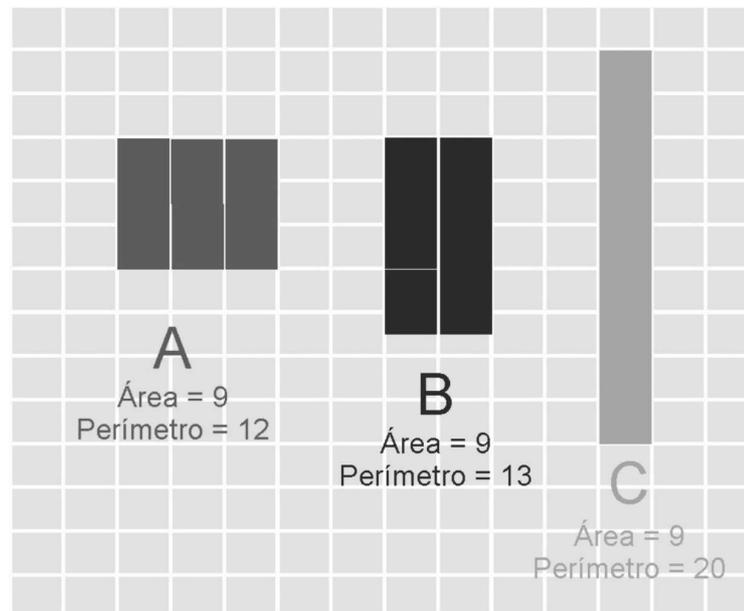


Figura 2 – Ilustração do geoplano para conservação da área e alteração do perímetro

Conta-se a seguinte história:

O dono do cachorro resolve colocar pedras no chão do canil para facilitar a limpeza. Colocou, inicialmente, seis pedras em duas fileiras de três. *Colocam-se os seis retângulos sobre o geoplano em duas fileiras de três (figura A)*. Depois, o senhor resolveu modificar o canil e montou desse jeito. *Organiza-se a figura agora em três fileiras de duas cartas (figura B)*. Pergunta-se ao entrevistado como ficou a superfície e a cerca do canil. Ainda, o senhor era muito confuso e mudou o canil mais uma vez. *Reorganizam-se agora os seis retângulos em uma única fileira (figura C)*. Pergunta-se novamente sobre a superfície e a cerca.

Após as entrevistas foi organizado um protocolo de análise dos dados. As condutas dos sujeitos foram avaliadas em função da capacidade de identificar os observáveis dos objetos e de desenvolver regulações ao longo do experimento. Estas condutas demonstram certos modos de explicar o problema e evidenciam maneiras comuns de organizar a situação. Classificamos

os sujeitos em função dessas características e encontramos 5 grupos, os quais se apresentam a seguir.

Primeiro modelo explicativo: negação da perturbação

Foram encontrados cinco sujeitos, (de idades diversas) que elaboram um modelo explicativo no qual consideram a área e o perímetro idênticos ao longo de todas as variações do experimento. Na situação em que há negação máxima da conservação, quando o perímetro é o mesmo e a área é a mínima, o sujeito ainda crê constatar a mesma superfície no interior da figura. Dentre os participantes que se enquadram nesse modelo explicativo, há entrevistados que são capazes de resolver o cálculo proposto através do algoritmo, mas durante a entrevista demonstram não saber que o perímetro refere-se ao contorno que delimita o quadrilátero e a área à superfície do interior da figura. Têm-se, nestes casos, que participantes operam sobre os problemas baseados em índices totalmente alheios aos conteúdos escolares, pois não estendem estes àqueles. É possível dizer que o sujeito aprendeu na escola a realizar seqüências de procedimentos para a solução do cálculo, sem qualquer compreensão dos mecanismos (SILVA, 2007).

No caso do experimento proposto, há sujeitos que nunca são afetados pelos observáveis do objeto e não se sentem em qualquer momento em contradição. Isso se deve ao fato de que os observáveis do objeto só são acessíveis à medida que existam coordenações inferenciais que os percebam. Os sujeitos que crêem em uma identidade entre a área e o perímetro, mantendo-se convictos no desenrolar de toda a entrevista, não possuem coordenações suficientes para uma leitura imediata e objetiva da realidade. Além disso, não possuem regulações capazes de compensar as perturbações que os observáveis dos objetos colocam aos observáveis que o sujeito acredita evidenciar. As coordenações dos sujeitos são restritas e quando atribuídas aos objetos demonstram tal limitação.

Destaca-se o caso abaixo:

Primeira etapa: Tu podes me dizer alguma coisa sobre a superfície que se tem agora em comparação a anterior (entre um retângulo de 6×4 e um quadrado de lado 5)? *É a mesma superfície.* Como é que tu sabes isso? *Porque é o mesmo cordão. Tu não aumentaste nem diminuíste o cordão. É isso mesmo: a superfície continua igual.* E se mudarmos mais uma vez e fizermos isso (agora um retângulo de 2×8), o que acontece com a superfície? *Olha, é a mesma.* E como é que tu sabes? *Pelo cordão, tu não estás mudando nada nele.* Alguma coisa muda? *Olha, a superfície para o cão caminhar muda.* Como ela fica? *Ela aumenta (!)* Por que tu achas isso? *Por que tu podes olhar aqui* (aponta com indicador a extensão do fio da lateral do retângulo), *a superfície é bem maior.* E a superfície do canil, como fica? *A superfície do canil é a mesma, mas para o cão caminhar é maior.* Vou mudar mais uma vez e vou fazer esse outro aqui (retângulo 1×9), o que aconteceu com a superfície? *Nossa, até parece diferente... Não, mas isso é quase uma ilusão de ótica, mas é a mesma superfície, ela apenas está bem espichada.*

Esse extrato do protocolo de entrevista é muito interessante porque mostra como o sujeito, apesar de no cálculo realizar as operações para chegar ao resultado da área e do perímetro, parece não compreender a diferença entre esses. Como já dito, durante a entrevista teve-se o cuidado de não mencionar as palavras área e perímetro, mas superfície e contorno. A idéia era utilizar palavras mais próximas do cotidiano e analisar como as pessoas relacionam área à superfície e perímetro ao contorno. No caso do sujeito acima, durante a segunda comparação no geoplano, ele diz que a superfície aumentou, quando, na verdade, diminui enormemente. Pela seqüência da entrevista foi possível identificar que ele se referia ao comprimento lateral e não à superfície da figura. Percebe-se aí uma confusão entre o contorno e a superfície, o que se desdobra, ainda, em uma negação da perturbação no caso da terceira comparação.

Pode-se identificar, de acordo com Piaget (1976), que o entrevistado tem uma conduta á, pela qual nega a perturbação que compromete sua explicação. Neste caso, as perturbações não são percebidas e, inconscientemente, são negadas pelo sujeito, que ainda crê na evidência, nos objetos, de observáveis que comprovam suas coordenações iniciais. Piaget diz que em casos como este, no qual há uma interpretação ilusória dos fatos “é porque este falso Obs. O se deve a coordenações, elas próprias errôneas ou incompletas” (PIAGET, 1976, p. 127).

Têm-se sujeitos então com coordenações muito fracas e que sequer são capazes de perceber as perturbações que a manipulação dos objetos fornece. Há uma primazia da afirmação sobre a negação: “se o cordão é o mesmo, a superfície que ele delimita também é”. É preciso construir a negação da identidade entre o cordão e a superfície demarcada para compreender as relações entre área e perímetro. À medida que operações reversíveis vão se organizando e se ocupando do problema, essa negação da igualdade entre superfície e contorno é construída, o que resulta numa leitura mais efetiva dos dados da experiência, ainda que haja resultados intermediários como o do modelo que se apresenta a seguir.

Segundo modelo explicativo: incorporação da perturbação como caso particular

Quatro sujeitos elaboram uma explicação que se assemelham a condutas de compensação a perturbação. Quando se deparam com a perturbação, para ela atribuem um caráter particular, dizendo que naquele caso a área diminui devido a um fato específico.

Observe-se o seguinte extrato de protocolo:

Primeira etapa: Tu podes me dizer alguma coisa sobre a superfície que se tem agora em comparação a anterior (entre um retângulo de 6x4 e um quadrado de lado 5)? *É a mesma superfície.* Como é que tu sabes isso? *Continua igual, só a forma é diferente.* A superfície que o animal tem para caminhar como é? *É a mesma, lógico.* E se mudarmos mais uma vez e fizermos isso (agora um retângulo de 2x8), o que acontece com a superfície? *Ainda é a mesma, porque tu estás só mudando a forma.* E como é que tu sabes? *Porque na verdade só muda a disposição da superfície, o animal vai ter a mesma superfície para caminhar, mas agora é mais comprido e estreito, mas ainda é a mesma superfície em formato diferente.* Alguma coisa muda? *Acho que é só a forma que muda.* Vou mudar mais uma vez e vou fazer esse outro aqui (retângulo 1x9), o que aconteceu com a superfície? *Agora está bem diferente, mudou muito.* A superfície continua como a dos anteriores? *Nesse aqui está bem menor.* O que aconteceu? *Eu acho que tu me pegaste nesse aqui, mas a superfície está, sem dúvida, bem menor.* Como é que tu sabes? *É porque eu estou vendo, mas, sei lá, deveria ser o mesmo porque tu não mexeste no cordão, mas não é.* *Eu acho que deve ter alguma coisa nos casos desses que são muito finos.* O que tu achas que pode ser? *Eu não sei explicar, mas esse aqui é bem menor.* E se comparar os outros? *Os outros têm a mesma superfície, mas esse aqui é menor que o dos outros.*

O sujeito elimina a perturbação por uma compensação parcial na qual cria um adendo ao seu sistema explicativo inicial. Não precisa, dessa maneira, reestruturar todo o modelo explicativo, pois à perturbação é atribuído um caráter particular e excepcional. É o caso de um dos entrevistados, que considera a superfície dos quadriláteros igual, justificando através da conservação do tamanho do fio. Diante do caso extremo, o sujeito descarta a perturbação dizendo que é somente nesse caso que não se mantém a igualdade porque se tem um lado valendo 1, em todos os demais a área permanece a mesma. Com essa eliminação da perturbação, pela atribuição de uma situação especial e de uma compensação parcial, o sujeito pode conservar seu modelo explicativo, o que torna desnecessário regulações maiores.

Compreende-se que as coordenações dos sujeitos são responsáveis pela identificação de dados observáveis nos objetos. Caso as coordenações não estejam suficientemente organizadas, a percepção dos observáveis também é deformada. No caso deste modelo explicativo, quando o sujeito percebe o último caso como uma perturbação, já se trata de uma evolução em relação ao modelo anterior, mesmo que não atinja o êxito pleno do problema. Quando os observáveis do objeto não estão de acordo com os observáveis do sujeito, é preciso compensar essa perturbação. No caso do modelo anterior essa regulação não acontece, pois há negação da perturbação. No caso que agora se apresenta, há um incremento no poder de regulação, mas ele ainda é insuficiente para obter o sucesso. Não se pode deixar de inferir que essa evolução na regulação é uma decorrência das coordenações um pouco mais organizadas, ainda que não sistematizadas o suficiente para que o registro dos observáveis seja eficaz em perceber, por necessidade lógica, todo o problema que se apresenta.

Evidencia-se outro sujeito que se vale desse modelo explicativo:

Primeira etapa: Tu podes me dizer alguma coisa sobre a superfície que se tem agora em comparação a anterior (entre um retângulo de 6x4 e um quadrado de lado 5)? *Elas são idênticas. Como é que tu sabes isso? Porque tu não tiraste nem botaste nada. Se tu olhares aqui com atenção, tu acabas vendo que o retângulo é mais estreito, mas mais comprido e termina sendo a mesma superfície. O que tu achas que acontece com a superfície? Tu podes me explicar de outro jeito? Eu acho que se equilibra porque o que tu tiras em comprimento tu acrescentas na largura. E se mudarmos mais uma vez e*

fizemos isso (agora um retângulo de 2×8), o que acontece? *É a mesma coisa que antes, mas precisou equilibrar mais.* Como assim “equilibrar mais”? *O retângulo teve que ficar mais comprido, já que ele está mais estreito.* Alguma coisa muda? *É só a disposição mesmo, porque o formato continua igual.* Vou mudar mais uma vez e vou fazer esse outro aqui (retângulo 1×9), o que aconteceu com a superfície? *Agora ficou estranho porque está bem diferente.* Ah, já entendi... *isso é uma lei: à medida que o retângulo vai ficando mais estreito ele se torna mais comprido para manter a mesma superfície, mas nesse aqui não dá porque não tem largura, daí não tem como compensar.* Este aqui tem uma superfície diferente dos outros? E os outros? *Os outros vão se equilibrando e tendo a mesma superfície, mas esse aqui muda porque tu tens zero de largura, daí não dá para equilibrar.*

Percebe-se novamente aí uma construção da negação, mesmo que muito restrita. Essa construção inicial já é capaz, em um caso de extrema disparidade perceptiva, negar a identidade entre as áreas das figuras devido a uma conservação do fio. A assimilação de uma situação em que há disparidade entre o fio e a superfície pode ser fonte de perturbações, as quais exigem compensações para a manutenção do equilíbrio. Como o pensamento procura conservar-se e as compensações ainda não são poderosas o suficiente para transformar a perturbação em um caso possível e aceitável dentro do sistema explicativo do sujeito, para a perturbação é atribuído um caráter específico. Nota-se aí, o que Piaget (1976) chama de uma conduta \hat{a} : quando o sujeito percebe a não conservação da superfície na última situação, mas a ela aplica a propriedade de uma situação particular, “o que era perturbador torna-se variação dentro de uma estrutura reorganizada, graças às relações novas que unem o elemento incorporado àqueles que já estavam organizados” (PIAGET, 1976, p. 65-66). No exemplo acima transcrito, a perturbação é incorporada à estrutura por uma relação nova: “mas esse aqui muda porque tu tens zero de largura, daí não dá para equilibrar”.

Ainda é preciso que essa negação se amplie para as outras situações e que o pensamento passe a ter como índices suas conceituações, em superação à percepção. Quando essa negação se generalizar, será capaz de oferecer uma regulação ainda maior para todo o sistema cognitivo, como é o caso do próximo modelo explicativo.

Terceiro modelo explicativo: reorganização restrita

É o caso do sujeito que se depara com o último quadrilátero, o qual a percepção da diferença de área é mais marcante e então diz “Mas tem algum problema” e a partir daí desenrola todo um processo de verificação dos juízos anteriores, sendo capaz de corrigi-los. Foram encontrados onze sujeitos que não só corrigem a inferência no caso em que se coloca a perturbação como a compensação se estende às outras situações do geoplano, nas quais tendem a corrigir a si próprios ou verificar, por uma necessidade lógica, os juízos anteriores.

Destaca-se um dos casos:

Primeira etapa: Tu podes me dizer alguma coisa sobre a superfície que se tem agora em comparação a anterior (entre um retângulo de 6x4 e um quadrado de lado 5)? *A mesma. Como é que tu sabes isso? Porque este segundo é mais comprido, mas é mais fininho.* E se mudarmos mais uma vez e fizermos isso (agora um retângulo de 2x8), o que acontece com a superfície? *Continua igual, só mais fino ainda, mas mais comprido.* Alguma coisa muda? *A forma, mas o fio e a superfície são os mesmos.* Vou mudar mais uma vez e vou fazer esse outro aqui (retângulo 1x9), o que aconteceu com a superfície? *Mudou. Está bem diferente.* Porque aconteceu isso? *Eu não sei, mas agora não tem mais a mesma superfície.* (Sujeito fica em silêncio por um tempo) *Claro! Está mudando sempre a superfície. Cada vez está ficando menor. Eu disse tudo errado: aquele primeiro é maior que todos. Poxa vida! Isso engana muito, mas a superfície está se alterando a cada mudança de formato.*

Os sujeitos que se enquadram dentro deste terceiro modelo para a explicação das relações entre área e perímetro justificam que o primeiro quadrilátero é do mesmo tamanho “porque mesmo o retângulo sendo mais comprido é ao mesmo tempo mais fino”. Essa justificativa já demonstra certo poder de compensação dos observáveis do objeto pelo sujeito, contudo, essa compensação é ainda qualitativa e por isso sujeita a deformações. Os sujeitos ainda estão presos a regulações perceptivas, mas à medida que esse julgamento qualitativo se defronta com casos nos quais as qualidades são muito diferentes, o pensamento percebe uma perturbação. Pode-se fazer uma analogia às quantificações extensivas que fazem as crianças pequenas durante a contagem de coleções. Dada uma coleção de objetos dividida em duas

subclasses, os sujeitos pré-operatórios as quantificam como sendo “muito”, “pouco” ou “mais ou menos”: é uma espécie de métrica sem quantificação intensiva. Quando os sujeitos presumidamente formais justificam que as áreas do retângulo e do quadrado se equivalem, fazem essa compensação de uma maneira extensiva, sem precisar as quantidades exatas que se compensam. Como na primeira transformação a diferença na área não é tão grande, conclui-se, qualitativamente, que não há mudança: seria como os juízos infantis nos quais uma coisa é “mais ou menos grande” ou “mais ou menos pequena”, donde uma semelhança qualitativa em juízos baseados em medidas (grande e pequeno) totalmente antagônicas.

A negação (da identidade entre área e perímetro), que era anteriormente restrita a situação que colocava uma perturbação, passa agora a se aplicar a outras formulações do sistema explicativo, o que faz o sujeito voltar às suas ações e reavaliar seus juízos anteriores. Pode-se falar de uma generalização das negações, que se expandem para outros casos e funcionam como uma perturbação eficiente, pois, ao negar a identidade do perímetro e da área, colocam em xeque todas as conclusões tiradas da evidência de que a linha não foi aumentada ou diminuída.

É interessante a partir de agora trazer os dados coletados com a contraprova, na qual há uma conservação da área e uma alteração do perímetro em cada situação. Os sujeitos que se encontram nesse modelo mesmo tendo generalizado a negação para as outras situações de conservação do perímetro e alteração da área, não são capazes de expandir suas explicações para situações análogas, regressando a modelos anteriores baseados na percepção.

Primeira etapa: Tu podes me dizer alguma coisa sobre a superfície que se tem agora em comparação a anterior (entre um retângulo de 6×4 e um quadrado de lado 5)? *Acho que é a mesma superfície porque tem o mesmo cordão. O cordão é elástico? Ele espicha?* Não, é fio mesmo, não espicha. *Então é a mesma superfície porque vai se compensando aqui na largura e no comprimento.* E se mudarmos mais uma vez e fizermos isso (agora um retângulo de 2×8), o que acontece? *Mesma coisa. Alguma coisa muda? O formato, mas o resto está igual. Talvez não seja o melhor jeito de fazer um canil porque o cachorro caminharia mais num sentido, mas a superfície é a mesma.* Vou mudar mais uma vez e vou fazer esse outro aqui (retângulo 1×9), o que aconteceu? *Mudou bastante agora. Acho que tu fizeste mais comprido, mas estreitou demais, daí não ficou a mesma superfície.* E nos outros como eram? *Tu estavas fazendo numa proporção, mas aqui tu*

fizeste diferente. Olha só, aqui tu tinhas 25 furos no meio, depois tu tinhas... 24... droga, pior que o superfície está mudando desde o início.

Segunda etapa: Agora mudou um pouco. Vamos ver com essas cartas. Tem esta primeira superfície (6 retângulos agrupados em 2 fileiras de 3) e essa outra aqui (3 fileiras de 2 cartas). Como fica a superfície? *Agora já estou atento. É a mesma superfície.* E se esse fosse o chão do nosso canil, como ficaria a cerca nos dois casos? *É a mesma porque o canil é o mesmo.* Como é que tu poderias me explicar melhor? *Eu estou pensando em lajes, se forem 6 lajes, não importa o jeito que colocares, dá a mesma cerca.* E se eu colocar assim (seis cartas enfileiradas)? *É a mesma, mas tu vais ter de espichar o arame mais.*

Igualmente, é interessante observar que há sujeitos que generalizam corretamente a explicação para a perturbação da menor área com o mesmo perímetro para outras situações do geoplano e a aplicam de maneira deformada ao caso análogo de conservação da área. Dizem que o perímetro não se altera, mesmo que ele se modifique o tempo todo. Na mesma medida, dizem que a área se altera em cada situação, baseados na intuição, ainda que ela se conserve em todas as situações.

Enfatiza-se um desses casos:

Primeira etapa: Tu podes me dizer alguma coisa sobre a superfície que se tem agora em comparação a anterior (entre um retângulo de 6x4 e um quadrado de lado 5)? *É igual.* Como é que tu sabes isso? *Tem uma relação aqui: o segundo perde em espessura, mas ganha em comprimento.* E se mudarmos mais uma vez e fizermos isso (agora um retângulo de 2x8), o que acontece com a superfície? *É a mesma: só mudou a relação.* Alguma coisa muda? *A forma.* Vou mudar mais uma vez e vou fazer esse outro aqui (retângulo 1x9), o que aconteceu? *Agora está diferente porque ficou bem mais fino do que estreito. Nos outros era igual a superfície, mas nesse mudou.* Tu podes me explicar porque nesse mudou e nos outros não? *Eu vou contar o tamanho. Pode? Claro. O fio tem 25 pontos sempre. Ah, agora eu me dei conta. O fio tem o mesmo tamanho sempre, mas a superfície vai mudando. Está diferente em todos os quadrados. Claro, agora me dei conta mesmo, o meio da figura não tem nada a ver com o contorno.*

Segunda etapa: Agora mudou um pouco. Vamos ver com essas cartas. Tem esta primeira superfície (6 retângulos agrupados em 2 fileiras de 3) e essa outra aqui (3 fileiras de 2 cartas). Como fica a superfície? *É a mesma coisa que o outro: a superfície está menor.* Como é que tu sabes? *É só perceber que as cartas não mudaram, mas a forma mudou, então, a superfície muda. É um “pega-ratão”³.* E se esse fosse o chão do nosso canil,

³ Expressão muito utilizada no sul do Brasil que indica que se trata de uma armadilha, de uma situação organizada para que o sujeito se confunda.

como ficaria a cerca nos dois casos? *É a mesma cerca, pois tu não estás mexendo nas cartas.* Como é que tu poderias me explicar melhor? *É como o anterior, cada vez que tu mexes nas cartas, tu mudas a superfície, mas o contorno é o mesmo.* E se eu colocar assim (seis cartas enfileiradas)? *É como eu te disse, é uma superfície menor porque o cão não tem onde caminhar, mas a cerca é a mesma.*

Percebe-se que as compensações que o sujeito elabora à perturbação inicial ainda são restritas, aproximando-se muito das condutas â devido a fraqueza da generalização das negações por regulações compensatórias. Parece que o sistema cognitivo desses sujeitos ainda tem uma primazia da afirmação sobre a negação, mas a cada situação já são capazes de perceber os desequilíbrios que os objetos colocam a essas coordenações mal organizadas. As regulações, um pouco mais poderosas que as dos sujeitos do modelo anterior, são capazes de estender as compensações para os outros casos da mesma situação, mas não ainda para outras situações análogas, como é no caso dos sujeitos do próximo modelo explicativo.

Quarto modelo explicativo: reorganização estendida a outros casos

Há ainda sujeitos que, como os anteriores, iniciam o experimento acreditando na igualdade das relações entre área e perímetro, mas corrigem-se no caso-limite e estendem essa correção à contraprova. As condutas desses entrevistados podem ser interpretadas como capazes de responder às perturbações colocadas pelos observáveis dos objetos, o que modifica os observáveis do sujeito e suas coordenações, as quais atribuídas às coordenações do objeto fazem com que o sujeito organize todo o sistema em função de uma compensação ã que reorganiza a totalidade. O resultado é que o sujeito corrige todas as suas respostas e condutas anteriores e, ainda, amplia suas regulações a casos futuros. Encontraram-se seis sujeitos, com idades de 15, 18, 20, 37, 42 e 53 anos, que apresentam esse modelo explicativo.

Destaca-se um dos casos:

Primeira etapa: Tu podes me dizer alguma coisa sobre a superfície que se tem agora em comparação a anterior (entre um retângulo de 6x4 e um quadrado de lado 5)? *A mesma.* Como é que tu sabes isso? *Porque é um retângulo, é mais comprido, mas mais estreito.*

E se mudarmos mais uma vez e fizermos isso (agora um retângulo de 2x8), o que acontece com a superfície? *Mesma coisa, só mais estreito e ainda mais comprido.* Alguma coisa muda? *A forma.* Vou mudar mais uma vez e vou fazer esse outro aqui (retângulo 1x9), o que aconteceu com a superfície? *Agora mudou, mas não sei bem...* Por que tu achas que mudou? *Está meio estranho isso. O fio continua o mesmo, mas agora está bem menor a superfície.* Ah, claro, a superfície não é o mesmo do fio. *Aqui tu tens menos superfície. Aliás, a superfície mudou em todas! Pode contar a superfície?* Claro. (Conta os furos que limitam, ou seja, o perímetro). *Mas que estranho, está dando igual de novo.* Ah, claro, estou errando de novo. *Não pode contar os do contorno tem de contar os furos que ficam dentro. É, sempre diminui os furos que ficam dentro. A superfície diminui.*

Segunda etapa: Agora mudou um pouco. Vamos ver com essas cartas. Tem esta primeira superfície (6 cartas agrupadas em 2 fileiras de 3) e esta outra aqui (3 fileiras de 2 cartas). Como fica a superfície? *Eu acho que é a mesma coisa que o outro experimento.* E a superfície? *Fica a mesma superfície, não está se alterando.* Como é que tu sabes? *São seis cartas.* E se esse fosse o chão do nosso canil, como ficaria a cerca nos dois casos? *A cerca muda cada vez, como no outro. Poxa vida! Agora entendi tudo. Tu queres ver se eu me dou conta que lá muda a superfície, mas é o mesmo fio e aqui fica a mesma superfície, mas muda o contorno.* E se eu colocar assim (seis cartas enfileiradas)? O que tu achas? *É como eu te disse: aqui tu tens a mesmíssima superfície, mas o contorno é enorme. Seria uma cerca muito cara.*

Em uma perspectiva de equilíbrio, as perturbações serão agregadas ao modelo explicativo do sujeito como uma variação previsível dos dados da realidade e as compensações constituirão as operações reversíveis que dão uma organização e poder de explicação ao modelo que interpreta. No caso deste quarto modelo explicativo, as compensações levam a uma nova equilíbrio, mais qualificada e com maior poder de generalização do que a anterior.

Nota-se uma relação indelével entre as coordenações do sujeito e os observáveis do objeto. É a partir dos objetos que o sujeito obtém *feedbacks* das suas ações e pode encontrar índices para realizar regulações, as quais, quanto mais atividade implicarem, mais representam o uso de escolhas e de consciência dessas opções, ou seja, um desenvolvimento em direção à tomada de consciência e à explicação. Assim, quanto mais ativo é o sujeito em um situação, quanto mais explora um material e as relações que nele se encontram, mais próximo se encontra da elaboração de uma explicação. Os sujeitos que apresentam esse quarto modelo explicativo possuem regulações e estruturas

capazes de responder a necessidades, quando estão diante de uma perturbação, mas se não o fazem de início é porque, provavelmente, nunca tenham pensado a respeito disso, apesar de terem visto os conteúdos de área e perímetro ao longo da educação básica e alguns, inclusive, no ensino superior.

Quinto modelo explicativo: elaboração imediata da explicação e quantificação dos dados

Trata-se aqui dos sujeitos que de imediato apresentam um modelo explicativo completo: não se deixam levar pela perturbação e consideram as perturbações propostas como variações possíveis nas relações entre área e perímetro. Do total de 29 entrevistados, apenas quatro sujeitos elaboraram de imediato um sistema explicativo coerente para o problema que se propunha.

Primeira etapa: Tu podes me dizer alguma coisa sobre a superfície que se tem agora em comparação a anterior (entre um retângulo de 6×4 e um quadrado de lado 5)? *Diminuiu um pouco.* Como é que tu sabes isso? *Porque se tu olhares aqui vai ver que tu diminuíste. Na largura tu diminuíste 1 e aumentou 1 no comprimento, mas esse 1 do comprimento não compensa a largura porque ela diminui mais.* Tu podes me explicar de outro jeito mais simples? *Ok, se tu não estás entendendo o que eu digo, faz isso: conta os quadradinhos que têm dentro.* Tu podes me mostrar isso? *Claro, nesse primeiro tem 25, no segundo tens 24* (Monta ele próprio as figuras e realiza a contagem). E se mudarmos mais uma vez e fizermos isso (agora um retângulo de 2×8), o que acontece com a superfície? *Mudou, só prova o que eu disse, que a largura não está compensando o comprimento. Agora só tem 18 quadrados dentro da superfície.* Alguma coisa muda? *Tudo, mas mais a superfície, porque tu estás diminuindo.* Eu estou certo? *Acho que deves ter algo que não estou me dando conta.* Vou mudar mais uma vez e vou fazer esse outro aqui (retângulo 1×9), o que aconteceu com a superfície? *Continua diminuindo. Sei lá, para mim é isso.*

Segunda etapa: Agora mudou um pouco. Vamos ver com essas cartas. Tem esta primeira superfície (6 retângulos agrupados em 2 fileiras de 3) e essa outra aqui (3 fileiras de 2 cartas). Como fica a superfície? *É a mesma, continuam as seis cartas.* Como é que tu sabes? *Sabendo, pode botar as seis cartas de qualquer jeito que elas são sempre seis cartas.* E se esse fosse o chão do nosso canil, como ficaria a cerca nos dois casos? *Depende de como eu vou organizando a superfície, pode ser mais em um ou menos. Daí tem de ver:* E como tu poderias me mostrar isso melhor? *Eu vou fazer assim para ti entender: coloca as cartas do primeiro jeito.* (o experimentador segue as ordens do entrevistado). *Agora conta pelos pontos de fora quantos deram ao redor todo.* Deu 12 pontos. *Agora põe do segundo jeito* (3 fileiras de 2 cartas) *e conta.* Deu 13. *Viu, precisas*

um metro a mais de cerca. Entendeu? E o entrevistador com expressão de pasmo responde que sim.

Na verdade, pode-se perceber que o sujeito não demonstra qualquer espanto com o caso da conservação do perímetro e da área mínima, visto que a situação já é uma possibilidade de seu modelo explicativo elaborado. Um elemento não é perturbador em si, ele é percebido como perturbador à medida que não haja regulações capazes de compensá-lo. No caso do modelo explicativo completo, cada situação é uma possível dentre tantas outras virtualmente possíveis e não há perturbação, pois se está em presença do que se poderia chamar de regulações “perfeitas”, as quais são capazes de compensar qualquer situação que os objetos apresentem como desafio ao sujeito. É evidente que tal modelo só se encontra em um pensamento altamente organizado e formal no qual o real é mergulhado em um mundo de possíveis.

Considerações Finais

Nota-se que a memorização das relações entre área e perímetro não fornece ao sujeito uma compreensão real do que se passa. O que há é a identificação de uma lei que interpreta a regularidade dos fatos. É possível solucionar o problema que o professor propõe “pegando” o número de um lado e multiplicando pelo número do outro lado. Mesmo quando o sujeito domina o cálculo com relativa facilidade isso não é garantia de que compreenda ou que possa vir a compreender as relações. A construção da explicação tende a resultar da ação do pensamento. No caso dos sujeitos entrevistados para esse estudo, o método de ensino através de algoritmos parece não ter propiciado a possibilidade de que o pensamento entre em ação. Ao longo da prova, muitos sujeitos não tem uma leitura objetiva dos dados da realidade, mas evidencia-se o surgimento de diferentes tipos progressivos de explicação. Essas deformações nos observáveis se devem a lacunas nas coordenações do sujeito, o que permite inferir que as técnicas de ensino das atividades escolares não foram capazes de propiciar uma organização mais adequada das coordenações dos sujeitos.

Retomando as questões inicialmente propostas, os algoritmos de solução ensinados na escola não são utilizados como índice para solução dos problemas. A maioria dos sujeitos não utiliza o cálculo para descobrir a relação entre área e perímetro. Uma pequena parcela, que efetua o cálculo, conta diretamente a superfície no interior da figura, sem multiplicar um lado pelo outro. O índice mais utilizado pelos entrevistados a respeito da conservação da área é a percepção, ainda que deformada por coordenações mal elaboradas. Em casos como, por exemplo, da conservação do perímetro e uma diminuição drástica da área, os sujeitos apresentam três tipos de condutas: de negar a perturbação, de atribuir-lhe um caráter particular ou de reorganizar seu sistema explicativo. Nas duas primeiras condutas a percepção é o índice mais forte para o julgamento do sujeito, de maneira que somente os que possuem um modelo explicativo mais elaborado são capazes de realizar regulações em suas coordenações para superar a perturbação e se desvencilhar da percepção como único índice para o julgamento.

Os processos de raciocínio dos participantes lembram as condutas já identificadas por Piaget (1976) na Teoria da Equilibração. As regulações que o sujeito é capaz de exercer ao longo da prova e os observáveis que acredita constatar nos objetos são os fatores determinantes de suas condutas. Particularmente, no caso da geometria, os observáveis têm um peso ainda maior, haja visto que se trata do estudo de figuras que sofrem grande influência de julgamentos baseados na percepção. Quando o sujeito se encontra diante de um conflito, pode desencadear condutas á, â e ã para responder às perturbações que se apresentam às suas coordenações. Ele pode construir regulações e dirigir-se à tomada de consciência de suas ações e coordenações. Nestes casos, os processos de raciocínio do sujeito podem apresentar patamares progressivos de estruturação de uma explicação. Estes níveis, que chamamos de modelos explicativos, evidenciam o caráter construtivo do conhecimento geométrico e mostram a influência que a organização de uma situação pode exercer sobre o pensamento. No caso do ensino por algoritmos, um erro no cálculo pode ser corrigido com a simples verificação dos procedimentos adotados, mas na resolução de um problema, é a ação do pensamento que se desenvolve na busca da explicação.

No caso das situações que durante a prova transformaram-se em uma perturbação às expectativas do sujeito, percebe-se que elas podem desenvolver compensações que levam à procura da explicação, uma vez que dão destaque às lacunas existentes no modelo explicativo do sujeito. Uma perturbação pode ser responsável pelo surgimento de uma regulação e tanto quanto mais ativa esta for, mais apresenta compensação à perturbação que lhe deu origem. As regulações ativas implicam escolhas, o que supõe uma consciência das possibilidades, podendo se estender até a tomada de consciência das coordenações, ou seja, da apropriação da explicação. No caso dos exercícios escolares, parece que o sujeito resolve as perturbações com o uso de regulações mais ou menos automáticas e que se referem sempre aos procedimentos de resolução do cálculo e não de compreensão dos fenômenos. Tal situação se desdobra em um determinado sucesso na solução dos problemas que a escola apresenta e em uma incompreensão das relações em jogo. Por fim, concluímos que, no caso da prova utilizada, as práticas de ensino através do algoritmo não garantem a solução do problema e que os processos de raciocínio dos participantes obtém maior sucesso à medida que executa regulações sobre a situação e organiza os observáveis dos objetos em função das próprias coordenações dos sujeitos.

Referências

INHELDER, B.; BOVET, M.; SINCLAIR, H. **Aprendizagem e estruturas do conhecimento**. São Paulo: Saraiva, 1977.

PIAGET, J. **A equilibração das estruturas cognitivas: problema central do desenvolvimento**. Rio de Janeiro: Zahar, 1976.

SILVA, J. A. O professor pesquisador e a liberdade do pensamento. In: BECKER, F.; MARQUES, T. (Org.). **Ser professor é ser pesquisador**. Porto Alegre: Mediação, 2007. p. 63-73.

VINH-BANG. El método clínico y la investigación en psicología del niño In : AJURIAGUERRA, J. (Org.). **Psicología e epistemología genética**. Buenos Aires: Proteo, 1966. p. 39-51.

Aprovado em novembro de 2008

Submetido em setembro de 2008