



Éléments de Géométrie, avec Notes. Par Adrien-Marie Legendre. – O que Afirma o Próprio Autor sobre Sua Obra?¹

Éléments de Géométrie, avec Notes. Par Adrien-Marie Legendre. – What Does the Author Affirm about His Own Work?

Regina de Cassia Manso de Almeida²

Resumo

Neste artigo, apresento a tradução do prefácio à primeira edição do livro *Éléments de Géométrie, avec notes*, de Adrien-Marie Legendre (1752-1833), publicado em Paris, 1794, por Firmin Didot. Houve uma tradução em português do texto de Legendre por Manoel Ferreira de Araújo Guimarães, publicada em 1809 pela Regia Officina Typografica, no Rio de Janeiro, mas sem o prefácio. Apresento e discuto o prefácio original escrito por Legendre no ano em que se comemoram os duzentos anos da primeira impressão do seu livro no Brasil. E o prefácio, como veremos, é uma resposta à pergunta – o que afirma o próprio autor sobre sua obra?

Palavras-Chave: Legendre. Livro-texto. Conteúdos da Matemática Escolar. História da Matemática Escolar.

Abstract

This paper presents a translation of the preface to the first edition of the book “*Éléments de Géométrie, avec Notes*,” of Adrien-Marie Legendre (1752-1833), published in Paris, 1794, by Firmin Didot. There was a translation into Portuguese of Legendre’s book by

¹ Este artigo resulta dos meus estudos de doutorado, pela PUC-Rio, 2008, sob a orientação dos professores João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho, PUC-Rio e Gert Schubring, Universidade Bielefeld, Alemanha.

² Professora da Universidade Federal Fluminense/UFF, Niterói, RJ. Rua Comendador Queirós, 49, ap. 802 B, Icaraí, Niterói, RJ, CEP 24230220. E-mails: rem@vm.uff.br, regimans@gmail.com.

Manoel Ferreira de Araujo Guimarães, published in 1809, at the Regia Officina Typografica, in Rio de Janeiro, without the preface. I present and discuss Legendre's preface, in the year that commemorates two hundred years of the first publication of Legendre's book in Portuguese. And as we will see, the preface is an answer to the question: What does the own author affirm about his work?

Keywords: Legendre. Textbook. Contents of School Mathematics. History of School Mathematics.

Introdução

O prefácio de um livro é uma parte pré-textual que tradicionalmente compôs muitos dos livros tipo *elementos de geometria*³. Esse tipo de livro tem a característica de se estruturar conforme os *Elementos* de Euclides (300 a.C), uma obra padrão na história dos conteúdos da matemática. Os livros tipo *elementos de geometria* expõem os conteúdos de forma dedutiva, através de demonstrações. E uma questão chave que se apresenta na história da matemática dedutiva é a questão do rigor que Legendre explora em seu texto original aqui traduzido. É importante notar que o prefácio, com o tempo, foi desaparecendo das edições dos *éléments de géométrie*. No caso de Legendre, já há indícios de ocorrência desse fato por volta de 1804. E, como se poderá constatar, o prefácio tem importância, agrega valor ao livro pelas várias discussões que contempla. Assim, vale perguntar – que livro de Legendre eu conheço? – face às modificações que os vários relançamentos registram ao longo de um período de mais de cem anos.

O primeiro livro da área que conhecemos hoje como matemática impresso no Brasil foi o *Elementos de Geometria* de Legendre, uma versão em português lançada no Rio de Janeiro, em 1809, por Manoel Ferreira de Araujo Guimarães. A editora responsável, a Regia Officina Typografica, se instalou junto com a corte de D. João VI na então colônia portuguesa. No entanto, lamentavelmente, o texto escrito por Legendre como prefácio à 1ª edição não consta dessa edição em português, histórica para nós, nem de outras edições mais tardias.

³ Para a designação livro tipo *elementos de geometria*, ver Manso de Almeida, 2008, p. 114-122.

Schubring (2003, 2004) e Manso de Almeida (2008) mostram a importância da geometria de Legendre no estabelecimento dos conteúdos escolares em matemática. A geometria de Legendre, publicada originalmente em 1794, foi uma das obras vencedoras do concurso para livros-texto a serem adotados em escolas francesas, promovido àquela época. Autores contemporâneos de Legendre destacam a importância deste livro em um relatório educacional – “O senhor Legendre, em 1794, empreendeu fazer reviver entre nós o gosto pelas demonstrações rigorosas” (DELAMBRE, 1810 *apud* SCHUBRING, 2003, p. 142). Essa volta significou um padrão de texto distanciado daquele em que as questões práticas deveriam embasar o desenvolvimento dos assuntos da geometria, como nos *Éléments de Géométrie*, de Clairaut, obra publicada pela primeira vez em 1741. Mas, como veremos, a questão do rigor implica o embate entre o uso do método ordinário e o dos procedimentos algébricos.

O método ordinário, ou sintético, está ligado ao modelo demonstrativo euclidiano. Para demonstrar, Euclides argumenta usando a teoria das proporções sem associar valor numérico à medida das grandezas; ele associa as grandezas a objetos geométricos. Por isso se diz que, com Euclides, aconteceu uma geometrização da matemática. Por outro lado, a separação entre geometria e aritmética sofreu críticas, e justamente o método analítico implica a questão do rigor, porque estabelece um modo de demonstrar que aproxima a geometria, a aritmética e a álgebra. Neste caso, as grandezas estão associadas a valores numéricos que expressam suas medidas ou se associam aos então *modernos* procedimentos algébricos da época. Tais procedimentos resultam da mudança conceitual em que a medida das grandezas pode corresponder a valores genéricos – a, b, c, d , quaisquer, por exemplo – com os quais também é possível operar. O prefácio escrito por Legendre mostra a posição do autor a respeito de qual método seria o mais rigoroso.

Schubring (2004) apresenta um quadro geral das edições do livro de Legendre na França e em outros países, além de tratar da recepção internacional desta obra. Entre nós, está para ser lançada uma edição da versão em português do livro de Legendre, por Luiz Carlos Guimarães, do LIMC/UFRJ⁴.

⁴ LIMC: Laboratório de Pesquisa e Desenvolvimento em Ensino de Matemática e Ciências; UFRJ: Universidade Federal do Rio de Janeiro.

A presença do prefácio no livro de Legendre

Como já foi dito, a primeira edição dos *Elementos de Geometria* de Legendre data de 1794. Quinze anos depois, em 1809, a tradução em português impressa no Brasil já não apresentava o prefácio original, embora o texto dos dois livros coincida. O mesmo acontece com a 11ª edição por Firmin Didot, Paris, 1817. Até onde sei, entre o lançamento original e a 11ª edição de 1817, também publicada em francês e sem o prefácio, a versão em português de 1809 é a menos tardia. Exemplificam também a exclusão do prefácio original de Legendre a 12ª edição por Firmin Didot, Paris, 1823; os *Éléments de Géométrie, avec additions et modifications, par M. A. Blanchet*, 29ª edição por Firmin-Didot, Paris, 1886.

O prefácio, no exemplar de Manuel Ferreira de Araújo Guimarães, de 1809, apresenta apenas um resumo do conteúdo de cada capítulo e o item *Notas*, que também consta da 1ª edição. Mas o tradutor informa o seguinte: “Devo fazer aqui huma advertencia sobre a edição. Eu comecei a servir-me da 3a edição (de 1800), até que hum Official, muito estudioso e muito erudito, teve a bondade de me franquear a 5a (de 1804), e por esta conferi a presente”. Pelo visto, é possível supor, nessa época, o período 1800-1804, uma ocorrência da supressão do prefácio original escrito por Legendre.

A importância da leitura dos originais quando se estuda a história do ensino da matemática fica patente no caso de Legendre, e o leitor há de concordar. No prefácio da edição original, Legendre expõe razões que o levaram ao empreendimento de escrever os seus *Elementos de Geometria*. Em destaque, tem-se o fato de ele ter se ocupado com o ensino e também com a questão do rigor. Quanto ao rigor, a obra mostra o embate entre o uso dos então modernos procedimentos algébricos e o uso do método ordinário ou método sintético. Em Manso de Almeida (2008) abordo essa problemática, fazendo um estudo comparativo de duas edições diferentes do livro de Legendre.

Com este artigo, posiciono-me a favor da leitura de textos originais quando se investiga em história do conteúdo escolar da matemática. No caso do livro de Legendre, tive acesso ao original, por ocasião dos estudos de

doutorado na Universidade Bielefeld, Alemanha, sob supervisão do professor Gert Schubring, co-orientador que, em parceria com o professor orientador João Bosco Pitombeira, acompanhou meus estudos. Assim, pude também conhecer outras edições da obra de Legendre e constatar que o prefácio já não constava de nenhuma delas.

O texto original de Adrien-Marie Legendre – Prefácio à primeira edição dos *Elementos De Geometria*, Paris, 1794⁵

Reprovam-se os elementos de geometria por serem poucos rigorosos. Várias destas obras podem ter vantagens particulares e cumprir muito bem o objetivo para o qual elas foram compostas, mas nenhuma delas tem tido sucesso ao demonstrar todas as proposições de uma maneira absolutamente satisfatória. Ora os autores supõem as coisas que não estão contidas nas definições, ora as definições são defeituosas em si mesmas. Algumas vezes eles se contentam em invocar o testemunho dos olhos, às vezes empregam princípios que são verdadeiros em si mesmos, mas que parecem ocasionar algumas negligências, donde o espírito não fica satisfeito (1). Em geral, é difícil fazer elementos rigorosos não somente em geometria, mas em todas as ciências: as proposições mais simples são as mais embaraçosas e as que se demonstra com menos sucesso. A dificuldade, entretanto, não é uma razão que deva impedir empreender tarefas tão úteis. Como o objeto da geometria é simples e fácil de apreender é, sobretudo, nessa ciência que se pode esperar produzir bons elementos. Para conseguir esse objetivo não é preciso o receio de parecer enfadonho e minucioso: contanto que se seja claro, exato, e que não se diga nada de supérfluo, o objetivo está cumprido. E os prolongamentos, se os há, devem ser rejeitados pela natureza das coisas, a menos que se sacrifique a maior vantagem da ciência, a sua exatidão. Eu penso que o tipo de método de que se serviram os antigos é ainda o que mais se aproxima da perfeição e o que melhor convém às demonstrações geométricas. Os modernos acham esse método muito trabalhoso e o substituíram pelos mais simples e mais rápido, mas é preciso reconhecer que eles também não são nem tão rigorosos nem tão satisfatórios.

Ocupado com o ensino das ciências, já a longo tempo eu tive ocasião de destacar as imperfeições encontradas em algumas obras elementares mais conhecidas. Pouco a pouco eu reuni os materiais para o aperfeiçoamento dos elementos; enfim, eu me determinei a trabalhar esses materiais e disso resultou a obra que ofereço neste momento ao público.

Pelo que eu já disse se deve ver que meu objetivo foi o de tornar os elementos mais rigorosos. Eu segui bastante o método dos *Elementos* de Euclides

⁵ Todos os itálicos são do original de Legendre.

e aquele do livro de Arquimedes, *Da esfera e do cilindro*. Mas em lugar de igualar ou mesmo de ultrapassar meus modelos de exatidão, eu quis também poupar esforço do leitor tanto quanto me foi possível, e eu me empenhei em dar às demonstrações a clareza e a brevidade que o assunto comporta.

Eu suponho que o leitor conheça a teoria das proporções que se encontra exposta nos tratados ordinários de aritmética e de álgebra. Eu suponho ainda o conhecimento das primeiras regras da álgebra, tais como a adição e a subtração de quantidades e as operações mais simples que se fazem sustentar em equações do primeiro grau. Os antigos, que não conheciam a álgebra, supriam essa falta pelo raciocínio e pelo uso das proporções que eles manejavam com muita destreza. Para nós, que temos este instrumento à mão, não há motivo para não usá-lo se isso pode resultar em grande facilidade. Eu não hesitei, então, em empregar os signos e as operações da álgebra quando julguei necessário: mas não me preocupei em complicar com operações difíceis o que deve ser simples pela sua natureza. E todo o uso que eu tenho feito da álgebra nesses elementos se reduz, como eu já disse, a algumas regras bem simples que se pode saber logo sem duvidar que isso seja álgebra.

Parece-me, enfim, que se o estudo da geometria deve ser precedido de algumas lições de álgebra, não será inútil levar adiante o estudo dessas duas ciências e de entremeá-las o quanto seja possível. Na medida em que se avança em geometria, se encontra a necessidade de combinar um número maior de conjunto de razões, e a álgebra pode ser de grande ajuda para conduzir os resultados de maneira mais rápida e mais fácil. Se eu reuni uma trigonometria a esses elementos, eu tive o cuidado de demonstrar as proposições fundamentais pelo método ordinário que se chama método sintético. Em seguida, eu me servi da álgebra para combinar essas proposições entre si e deduzir diferentes casos. As proposições dos elementos já estando estabelecidas sobre fundamentos sólidos, suas diversas combinações, aplicações e consequências que se pode tirar deles derivam da força da álgebra. Hoje seria pueril empregar um método laborioso enquanto se pode substituí-lo por um muito mais simples e também seguro.

Esta obra está dividida em oito livros dos quais quatro tratam da geometria plana e quatro da geometria sólida.

O livro I, intitulado *Os princípios*, contém as propriedades das linhas retas que se cruzam, das perpendiculares, das paralelas, os casos de igualdade dos triângulos, etc.

O livro II é a continuação de *Os princípios*. Ele trata das propriedades mais simples do círculo, das cordas, das tangentes e da medida dos ângulos por arcos de círculo. Os dois primeiros livros terminam com a resolução de alguns problemas referentes à construção de figuras.

O livro III, intitulado *Proporção das figuras*, contém a medida das superfícies, sua comparação, as propriedades do triângulo retângulo, dos triângulos equiângulos, das figuras semelhantes, etc. Talvez, a nós se repreenderá por termos misturado indistintamente as propriedades das linhas com as das

superfícies, mas nós quase seguimos a ordem de Euclides e essa ordem nem deixa de ser boa se as proposições são bem encadeadas umas com as outras. Esse livro termina também com uma série de problemas relativos aos assuntos que nele são tratados.

O livro IV trata dos *Polígonos regulares e da medida do círculo*. Dois lemas servem de base para essa medida que, aliás, é demonstrada segundo a maneira de Arquimedes, e nós damos em seguida dois métodos de aproximação para quadrar o círculo um dos quais é de Jacques Gregory. Esse livro é seguido por um apêndice em que se demonstra que o círculo é maior que toda figura retilínea com igual perímetro.

O livro V contém as *propriedades dos planos e dos ângulos sólidos*. Essa parte é muito necessária para o entendimento dos sólidos e das figuras em que se diferentes planos são considerados. Nós nos ocupamos em torná-la mais clara e mais rigorosa do que ela se apresenta nas obras comuns.

O livro VI trata dos *Poliedros* e da sua medida. Esse livro parece bem diferente do que consta de outros elementos. Acreditamos apresentá-lo de uma maneira inteiramente nova.

O livro VII é um tratado abreviado da *Esfera e dos triângulos esféricos*. Esse tratado não consta ordinariamente dos outros elementos de geometria. Entretanto, nós cremos que deve constar, nem que para servir apenas de introdução à geometria esférica.

O apêndice adicionado aos livros VI e VII tem como tema os *Poliedros regulares*, matéria tratada extensivamente em Euclides e que pode fornecer aplicações interessantes em trigonometria.

O livro VIII trata dos *Corpos redondos* que são a esfera, o cone e o cilindro. Medem-se as superfícies e os corpos sólidos com um método análogo ao de Arquimedes e baseado, quanto a superfícies, nos mesmos princípios que nós cuidamos de demonstrar sob o nome de *lemas preliminares*.

Pensamos primeiramente em empregar para essas medidas, assim como para a do círculo, o *método dos limites* que tem sido, aliás, uma boa preparação ao cálculo diferencial. Mas, à parte que seria necessário submeter à teoria dos limites alguns princípios gerais que são mais do campo da álgebra que da geometria, o uso desse método exige que se considere em cada caso particular, uma cadeia infinita de figuras inscritas e uma de circunscritas, o que desencadeia lentidões e dificuldades. Escolhemos o método de Arquimedes como sendo mais simples, descartando quase inteiramente a idéia de infinito. Não faltará quem nos censure pelas demonstrações que, concernentes à superfície do cilindro e à da esfera, são bem longas. Mas parece que a dificuldade é inerente ao assunto e quase não se pode abreviar essas demonstrações sem torná-las menos rigorosas.

Assim é o plano e a divisão desta obra. Quanto à execução, eu sinto que ela ainda está bem imperfeita e que pode ser aperfeiçoada em muitos aspectos. Compete aos geômetras pronunciar-se sobre as inovações que eles encontrarão em grande número nestes elementos. Espero seu julgamento e invoco o socorro das suas luzes para estar ao alcance de dar a esta obra os aperfeiçoamentos de que ela possa ser suscetível.

As notas, no fim desta obra, têm diferentes objetivos: umas levam em conta o que se pode ter de novo em alguns lugares do texto. Outras apresentam novas demonstrações de pesquisas ou as discussões relativas ao aperfeiçoamento dos elementos. Essas notas são uma espécie de descanso que eu procurei ao compor esta obra. Elas nem fazem parte dos elementos de geometria e os leitores que não tiverem conhecimentos suficientes de cálculo para entendê-las podem seguir sem inconveniente.

Nota. Os números colocados à margem indicam as proposições às quais se reenvia para o entendimento do discurso. Um único número 4 indica a proposição do presente livro; dois números, 20.3, indicam a 20ª proposição do 3º livro.

Tentou-se tornar esta edição o mais correta possível. Entretanto, restam ainda algumas faltas que não se pôde evitar: pede-se ao leitor corrigir as que estão indicadas na *errata*.

(1) *Eis o que diz d'Alembert sobre os Elementos de geometria, nos tomos IV e V das suas Miscelâneas de filosofia.*

Concluindo...

Não obstante a importância do texto original de Legendre, pelas discussões que ele levanta, resta o fato de entender o processo de transformações sofridas por um mesmo livro-texto. O embate entre o uso dos procedimentos algébricos e a abordagem sintética euclidiana no tratamento das grandezas em geral implica a questão do rigor e também a questão de tratar de um modo mais simples e eficiente os conteúdos. Como diz o próprio Legendre, acima, “as proposições dos elementos já estando estabelecidas sobre fundamentos sólidos, as diversas combinações, aplicações e consequências que se pode tirar, derivam da força da álgebra”. Ou seja, os procedimentos algébricos surgem como ferramentas que têm o poder de representar por meio dos símbolos – “uma forma menos laboriosa”, referindo-me outra vez ao original – a exposição discursiva do método ordinário euclidiano. Mas a análise desse processo mostra, ainda, que os procedimentos algébricos introduzem uma mudança na argumentação que sustenta a prova dos teoremas. Nesse sentido, o livro de Legendre explica que a álgebra permite que as razões representem valores numéricos associados à medida das

grandezas, tratamento que não consta dos *Elementos de Euclides* em função de os antigos gregos não disporem de ferramentas para tratar numericamente as grandezas em geral: os números, na abordagem dedutiva euclidiana, eram considerados como uma linha, um segmento de reta e, quando comparados dois a dois, eram iguais ou desiguais.

Assim, a ausência do prefácio nos livros tipo *elementos de geometria* estaria atestando a consolidação dos procedimentos algébricos no tratamento dedutivo em geometria, ou seja, a primazia do método analítico sobre o método sintético euclidiano. Ao longo de anos, a reedição do próprio livro de Legendre, ao ir incorporando tais procedimentos, mostra justamente como vai sendo concebida a relação entre geometria, álgebra e aritmética. Nesse sentido, a criação dos números reais vai significar a existência de fundamentos que justificam, com rigor, o tratamento algébrico das grandezas – como o caso do tratamento geométrico das grandezas que, conforme a tradição euclidiana preservada nos livros tipo *elementos de geometria*, estabeleceu também fundamentos justificativos e um padrão de rigor que vigoraram por muitos séculos.

Referências

HEATH, T. L. **The thirteen books of Euclid's Elements**. New York: Dover Publications, 1956. 3v.

LEGENDRE. A. M. **Éléments de Géométrie, avec des notes**. Paris: Firmin Didot, 1794.

LEGENDRE. A. M.. **Elementos de Geometria**. Trad. Manoel Ferreira de Araújo Guimarães. Rio de Janeiro: Imprensa Regia, 1809.

LEGENDRE. A. M.. **Éléments de Géométrie, avec additions et modifications, par M. A. Blanchet**. 29. ed. Paris: Firmin-Didot, 1886.

LEGENDRE. A. M.. **Éléments de Géométrie, avec des notes**. 11. ed. Paris: Firmin Didot, 1817.

LEGENDRE. A. M. **Éléments de Géométrie, avec des notes**. 12. ed. Paris: Firmin Didot, 1823.

MANSO DE ALMEIDA, R. C. **Demonstrações em geometria plana em livros-texto no Brasil a partir do século XIX.** 2008. 273 p. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

SCHUBRING, G. Neues über Legendre in Italien. Mathematik im Fluss der Zeit. In: HEIN, W.; ULRICH, P. (Orgs.), **Algorismus**, n. 44, p. 256-274, 2004.

SCHUBRING, G. **Análise histórica de livros de matemática:** notas de aula. Campinas: Editora Autores Associados, 2003.

Aprovado em julho de 2009

Submetido em abril de 2009