Bolema, Rio Claro (SP), v. 23, nº 37, p. 977 a 1004, dezembro 2010 ISSN 0103-636X

O Impacto da Modelação no Processo de Ensino Aprendizagem: uma simbiose entre a resolução de problemas e a modelação do quotidiano[1]

The Impact of Modeling in the Teaching-Learning Process: a symbiosis between problem solving and modeling everyday life

Carlos Miguel Ribeiro[2]

Resumo

Situações que envolvem modelação possuem um grande potencial no processo de ensino aprendizagem, porém, não são tão utilizadas nas aulas como seria desejável e expectável. Como professores cabe-nos o papel de preparar tarefas de modelação do quotidiano dos alunos, que envolvam, na sua perspectiva, verdadeiros problemas, de modo a que se consciencializem da efectiva possível simbiose entre os contextos da modelação e da resolução de problemas. Neste artigo apresento e discuto algumas situações de possível introdução à teoria de grafos, modelando a rotina diária nos diferentes níveis de escolaridade portugueses. As tarefas foram preparadas com o intuito de permitir aos alunos criarem os seus significados e desenvolverem a capacidade de efectuar conexões entre diferentes conteúdos e contextos, levando-os a atribuírem-lhe um carácter móvel através de uma rede conceptual. Serão ainda discutidos alguns aspectos da prática docente e conhecimento profissional bem como implicações deste tipo de abordagem e trabalho para a aprendizagem.

Palavras-chave: Modelação. Situações do quotidiano. Grafos. Conhecimento profissional.

[1] Foi conservada a ortografia e normas sintácticas de Português de Portugal.

[2] Doutorando em Didáctica da Matemática. Research Centre for Spatial and Organizational Dynamics (CIEO), Universidade do Algarve, Portugal. Universidade do Algarve, Escola Superior de Educação e Comunicação, Campus da Penha, 8005-139, Portugal. E-mail: cmribeiro@ualg.pt

Abstract

Modeling has great potential in the teaching-learning process, although it is not used in class as much as would be expected. As teachers, one of our roles is (should be) to prepare tasks involving real problems for the students' daily life. This will allow them to be aware of the possible symbioses between problem solving and modeling of those kinds of situations. In this paper, I present and discuss some possible situations to introduce graphs theory from modeling daily life situations in different grades. The tasks where prepared with the goal of allowing students to build their own knowledge and the ability to make connections between different contents and contexts. This may lead them to recognize the mobility of those concepts thorough a conceptual network. I will also discuss some aspects related to the teachers' practice and professional knowledge as well as the implications of this kind of approach for the teaching-learning process.

Keywords: Modeling. Everyday life. Graphs. Professional knowledge.

Introdução

Uma das dificuldades dos alunos portugueses evidenciadas nas provas tanto nacionais como internacionais (GAVE, 2004, 2006a, 2006b), é a de transpor as situações que lhes são colocadas (algumas do contexto real) para algo que se torne para si manejável, efectuando a sua modelação. Estas dificuldades encontram se maioritariamente associadas à resolução de problemas, que tem sido, nessas provas, um dos "calcanhares de Aquiles" dos estudantes portugueses. Nessas provas, os alunos têm um desempenho razoável em *itens* relacionados com o conhecimento matemático dos conteúdos, quando questionados de forma directa (procedimentos), mas desastroso no que concerne aos *itens* de raciocínio[3].

Poderíamos supor que as dificuldades evidenciadas pelos alunos, nos *itens* envolvendo mais directamente o raciocínio estariam directamente relacionadas com uma ausência de preocupação por parte dos responsáveis pela elaboração dos Programas portugueses (DEB, 1991a, 1991b, 2001, DES, 2001a, 2001b, DGEBS, 1991, PONTE et al., 2007) – incluindo o Pré-Escolar – e Orientações Curriculares (DEB, 1997); porém, isso não se verifica, pois, apesar de todas as dificuldades dos alunos evidenciadas nas

[3] Alguns destes *itens* relacionam-se directamente com situações de modelação ou em que um dos processos de resolução poderia ser o de recorrer a esta.

provas, ao consultar as referidas Orientações Curriculares e Programas, desde o 1.º Ciclo do Ensino Básico ao Ensino Secundário,[4] constatamos que, de forma mais ou menos explícita, a resolução de problemas e a modelação assumem um papel central.

Este lugar de destaque, para a resolução de problemas, não tem sido devidamente valorizado, pois, esta é, ainda hoje, encarada, muitas vezes, como algo que se faz à parte de tudo o resto. Como alguns exemplos desse desfasamento, podemos presenciar em algumas escolas – infelizmente em mais do que seria expectável, pelo menos em relação aquelas com as quais tenho contacto mais directo –, coisas como sejam: o dia dos problemas; a tarde da matemática divertida; torneios matemáticos; etc ….

Este tipo de actividades não se encontram integradas nas rotinas diárias, o que poderá incutir nos seus alunos uma ideia de que os problemas, e as situações envolvendo a modelação, são algo que se resolve fora das salas de aula e, parte das vezes, sem qualquer ligação com o que se passa na sociedade. Esta situação, ocorrerá, também, por as crenças dos professores, relacionadas com o formalismo, provocarem grandes obstáculos ao recurso a problemas de modelação durante o ensino da matemática, pois, a natureza dos problemas de contexto e de aplicação não é compatível com essas crenças (KAISER, 2006).

Felizmente, muitas outras situações há em que isso não ocorre e onde são efectivamente implementadas as Orientações Ministeriais sobre esse assunto. Nestas últimas situações, associa-se a resolução de problemas a tarefas promotoras de verdadeiras aprendizagens (LESH et al., 2000), sendo esta, tal como referem Leal, Veloso e Abrantes (1994), encarada como metodologia por via da qual são desenvolvidos diversos conteúdos e não como um conteúdo *per si*. Considero, e reforço a ideia de que a associação da resolução de problemas à modelação deverá, neste contexto, ir assumindo um papel de destaque à medida que se avança ao longo da escolaridade, para

[4] O sistema de ensino português divide-se em 4 ciclos distintos. O 1.º Ciclo é leccionado por um único professor para todas as áreas curriculares e corresponde aos quatro primeiros anos de escolaridade – alunos com idades compreendidas entre os 6 e os 9 anos; posteriormente o 2.º Ciclo (2 anos) onde têm já distintos professores para as áreas não afins; o 3.º ciclo corresponde aos 3 anos seguintes, seguindo se o Ensino Secundário que termina ao fim de mais três anos. Os alunos têm, assim, um total de 12 anos de escolaridade antes de iniciarem o Ensino Superior.

que os alunos se possam consciencializar progressivamente do efectivo papel desempenhado pela matemática no seu quotidiano.

Uma das áreas da matemática que, marcadamente, permite efectuar, no contexto escolar, a modelação de situações/problemas do quotidiano é a Teoria de Grafos. Esta área possui uma grande potencialidade no processo educativo, servindo também como mais uma forma de evidenciar a presença da matemática nas mais diversas situações, mesmo naquelas em que os alunos, raramente, a imaginam. Estas potencialidades ficam, não raras vezes, subvalorizadas, pois, por ser uma área que não é tradicionalmente abordada nos Programas Nacionais e nos manuais, os próprios professores geralmente não se sentem muito à-vontade para o fazer. Os professores parecem assim acabar por reflectir os modelos de ensino que eles próprios tiveram enquanto alunos daqueles níveis de escolaridade (MELLADO et al., 1997; NICOL, 1999). Desse modo sobrepõem os modelos a que foram sujeitos enquanto estudantes a todas as perspectivas teóricas e/ou práticas com que possam ter tido contacto, enquanto alunos de formação inicial (ou contínua) de nível superior. Muitos dos professores nunca tiverem sequer qualquer tipo de contacto (nem antes do curso superior, nem durante, e, muitos deles, nem depois) com este tipo de conteúdos e/ou abordagem (teoria de grafos).

Com esta ideia e preocupação em mente (de facultar aos professores, por vezes, também por via das actividades dos alunos, partindo de situações rotineiras um contacto com alguns dos fundamentos da modelação, considerada aqui na perspectiva da teoria de grafos), tenho tido a preocupação de apresentar e dinamizar diversas sessões de trabalho, em encontros de professores no âmbito da educação matemática, em cursos de formação inicial, complementar ou contínua, em grupos de trabalho colaborativo e ainda no âmbito de um projecto da Universidade do Algarve (Equipa UAlg), envolvendo professores e alunos, desde o 1.º Ciclo até ao Ensino Secundário.

Este texto é resultado de uma reflexão sobre algumas das actividades desenvolvidas, essencialmente no âmbito desta última (Equipa UAlg), referindo e complementando, sempre que se considere necessário, com outros tipos de experiências de outros contextos. Nesse contexto, tenho por objectivo primordial, apresentar e discutir um conjunto de tarefas e suas potencialidades para levar os alunos (e em última instância também os professores) a tomarem consciência da presença da matemática em contextos onde eles imediatamente não a consideram presente. Tendo essa discussão por pano de fundo, abordarei também as relações que se podem obter entre a implementação de um tal conjunto de tarefas – que apesar de, ou talvez por, baseadas em situações de rotina diárias, não são frequentes na sala de aula – e o conhecimento profissional dos professores necessário para que essas tarefas se tornem efectivamente promotoras de aprendizagens e não somente num conjunto de exercícios que se desenvolvem de forma rotineira.

Assim, de modo a desenvolver as ideias de forma coerente, iniciarei por focar algumas questões relacionadas com a forma como, de modo explícito, a Teoria de Grafos surgiu nos currículos, referindo em que situações concretas ali se podem encontrar situações de modelação, e indicando também algumas situações específicas onde considero que deveria/poderia verificar-se a sua utilização. Apresentarei o já referido projecto (Equipa UAlg), evidenciando quais os seus objectivos principais e referindo como os tento levar a cabo[5], apresentando algumas das actividades exploradas nesse contexto que, creio, possibilitam que os alunos vão criando uma rede conceptual consistente e, simultaneamente, aproximar a escola da sociedade, considerando, como base fundamental destas propostas, alguns aspectos da vida quotidiana dos alunos. Terminarei discutindo possíveis implicações deste tipo de abordagem – a possibilidade de partir da completa ausência de conhecimentos sobre um determinado tópico e recorrer à modelação para a construção de uma determinada componente, ou componentes, da rede conceptual dos alunos –, nas práticas lectivas dos professores e nas aprendizagens dos alunos.

Os grafos no contexto escolar português – uma breve perspectiva

Em Portugal, apenas muito recentemente (2001) se verificou uma inclusão explícita nos Programas de um capítulo dedicado ao estudo da teoria de grafos, apesar de, a nível internacional, em particular incentivado pelo

[5] Cada conjunto de actividades propostas é da inteira responsabilidade do docente (ou conjunto de docentes) que as propõe, pelo que, referir-me-ei explicitamente, à realidade que conheço na primeira pessoa – as minhas.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1991), a discussão sobre a integração da Teoria de Grafos nos diversos programas ocorreu pelo menos desde o início dos anos oitenta. Em Portugal, este debate iniciou-se[6] com a discussão de que tipos de renovações/adequações deveriam ser efectuadas nos distintos Programas Curriculares Portugueses em vigor na altura, de modo a que pudessem ser integradas (e onde) e exploradas situações que, partindo da resolução de problemas, pudessem ser modeladas, utilizando, entre outros, a teoria de grafos.

Apesar de, desde os anos oitenta, existir esta sensação de necessidade de facultar aos alunos o conjunto de oportunidades e de vivências que se encontram associadas ao estudo dos grafos, e que podem, quanto a mim, ser facultadas, pelo menos, assim que se inicia a sua formação académica, apenas em 2001 se incluiu nos Programas (DES, 2001b) uma unidade relacionada directamente com a Teoria de Grafos, abrangendo essa inclusão apenas um número limitado de alunos[7] (no ensino Secundário, uma disciplina *optativa* – Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS)). Estes alunos, tradicionalmente, escolhem o tipo de cursos que oferecem esta opção, para fugir à Matemática.

No que concerne ao programa da disciplina este refere, para além de outros aspectos, que se pretende

> [...] desenvolver a capacidade de formular e resolver matematicamente problemas (…) a capacidade de comunicação de ideias matemáticas (…) que os estudantes tenham experiências matemáticas significativas que lhes permitam saber apreciar devidamente a importância das abordagens matemáticas nas suas futuras actividades. (DES, 2001b, p.1)

Porém, apesar de mencionar estas pretensões, o Programa debruça-se na generalidade sobre os problemas históricos, relacionados com os caminhos e circuitos de Euler e de Hamilton, bem como com o problema do caixeiro-viajante, referindo que

---

[6] Maioritariamente através da Associação de Professores de Matemática – APM.

[7] Apenas para os alunos que frequentem o curso Científico Humanístico de Ciências Humanas e Sociais.

> [...] os modelos de grafos introduzem outra forma de mobilizar a Matemática para outros fins e pensando de maneira não usual. E pretendem ser modelos úteis para enfrentar problemas de gestão e iniciar intervenções sociais ao nível da compreensão dos sistemas de distribuição ou recolha… (DES, 2001b, p. 2)

Esta selecção deixa de fora muitos outros tópicos que considero fundamentais, tais como, por exemplo, a resolução de conflitos – tão presente em todas as sociedades. Isto pode deixar na ideia de alunos (e professores) que a modelação, e em concreto a Teoria de Grafos, se resume a este tipo de situações.

Algumas potencialidades da inclusão nos Programas da modelação através de grafos

Por ser uma área que permite, com relativa facilidade e simplicidade, a integração de outros e em outros conteúdos e disciplinas (RIBEIRO; FEITEIRA, 2007), considera-se uma área potenciadora de abrir as portas à tão desejada interdisciplinaridade. Porém, apesar de ser um ramo da matemática que possui um vasto campo de aplicações – Electrónica, Biologia, Mecânica, Sociologia, … –, de permitir, de uma forma simples e com sentido para os alunos, colocar em evidência a importância e presença da Matemática na vida quotidiana, as conexões são ainda pouco efectuadas.

Nos Programas portugueses dos diversos níveis de escolaridade (DEB, 1991a, 1991b, DES, 2001b, DGEBS, 1991, PONTE et al., 2007) encontramos, de forma mais ou menos explícita (mais explícita nos que se refere aos seis primeiros anos de escolaridade (DEB, 1991a, DGEBS, 1991, PONTE et al., 2007)) a pretensão de que sejam os alunos, através da sua própria investigação, a adquirirem o seu próprio conhecimento, e que a informação, a partir da qual se constrói o referido conhecimento, provenha, de entre outras fontes, de situações quotidianas centradas na resolução de problemas.

Por estar cada vez mais consciente de que esta é uma prática que, apesar de requerida desde há muito, ainda não se encontra totalmente implementada nas nossas escolas urge, que, enquanto formadores de professores (de formação inicial e contínua), facultemos aos nossos alunos/formandos, todas as oportunidades possíveis de que estes utilizem/construam modelos matemáticos que reflictam situações da vida real e com significado para os seus alunos (actuais e futuros).

Para que este tipo de práticas se torne habitual, e de modo a que a resolução de problemas e a modelação possam assumir o papel de promoção de efectivas aprendizagens, conduzindo os alunos a um nível de raciocínio superior, é importante que as tarefas que os professores propõem sejam efectivamente desafiadoras. Lesh et al. (2000) consideram que estas devem encorajar a realização de múltiplas abordagens e interpretações, dar prioridade à comunicação matemática, tornar necessária uma documentação dos resultados finais e fazer da auto-avaliação uma sua componente inerente.

Para que isso possa ocorrer, de modo a que as tarefas possuam verdadeiro sentido e significado para os alunos, devem partir das realidades por si vivenciadas de modo a trazê-las para a sala de aula, em forma de problema, para que, no decurso da sua resolução, estes a possam modelar matematicamente, contribuindo assim para uma consciencialização da presença desta ciência em todas as situações do (seu) quotidiano. Para que esta se torne uma efectiva integração, as situações propostas devem possibilitar o acesso, de modo explícito, ao processo de raciocínio dos alunos, acesso esse que poderá ser efectuado por via das suas descrições, explicações, representações e justificações ao longo da actividade resultante da tarefa proposta ou, no final, aquando da apresentação dos resultados e processos, à turma.

Para que esta visão teórica do ensino se possa tornar realidade, cumpre-nos, enquanto professores, entre outras coisas, proporcionar aos nossos alunos um vasto conjunto de oportunidades que lhes permitam criar um conjunto de redes conceptuais e os habilitem a movimentarem-se agilmente entre elas.

Com esse intuito considero que, através do caso concreto da modelação (mas também em muitos outros), podemos contribuir para a criação e expansão das bases de tais redes conceptuais. Uma mesma situação do quotidiano (veja-se a primeira situação apresentada abaixo na secção referente às propostas apresentadas) poderá ser o ponto de partida para explorar, com quaisquer alunos, independentemente do seu ano de escolaridade conteúdos tão diversos como a modelação *per si*, as funções ou as probabilidades, correspondendo a conteúdos que se encontram nos programas do 3.º Ciclo (DEB, 1991b, PONTE et al., 2007) ou no Ensino Secundário (DES, 2001a) mas que, com relativa facilidade, alunos bastante mais novos (1.º Ciclo – entre 6 e 9 anos), as resolvem, explicando o processo e raciocínio seguido. Os alunos encaram essas actividades com motivação e interesse também pela proximidade que têm com o seu quotidiano. Não será necessário lembrar que dever-se-á ter em conta o tipo de exploração, generalização e demonstração que se efectua, adequando-as, obviamente, ao nível etário e cognitivo dos alunos.

A abordagem às funções pode partir, por exemplo, da situação de modelação do número de abraços possíveis entre, digamos, cinco alunos. Nesta primeira fase de modelação os alunos podem identificar os elementos do grupo por pontos (alunos de tenras idades provavelmente necessitam desenhar os alunos e colocar-lhes os nomes) e os abraços pelas ligações entre estes. Posteriormente pode passar-se dessa representação para uma outra recorrendo a um diagrama *sagital*, em que os alunos, intuitivamente abordam a diferenciação entre variáveis dependentes e independentes, podendo ainda representar os valores em forma de tabela, obtendo a expressão geral. Claro que estas etapas terão de ser adequadas à especificidade dos alunos a que são propostas.

O contexto de trabalho e alguns objectivos

No ano lectivo de 2002/2003, a Universidade do Algarve teve a iniciativa de criar uma equipa, denominada Equipa UAlg, que tem por objectivos: sensibilizar os alunos para saberes em áreas científicas diversificadas; ajudar os jovens a construir uma opinião mais sólida sobre os percursos escolares e profissionais; reforçar a imagem da Universidade do

Algarve junto dos alunos e docentes das escolas básicas e secundárias e estreitar os laços entre o ensino superior e os outros níveis de ensino.

Perseguindo estes objectivos, foi proposto aos docentes, que, individualmente ou em conjunto, preparassem o que denominaram de palestras de modo a que pudessem ser apresentadas pelas escolas da área geográfica. O projecto, Equipa UAlg, é divulgado pelo actual Gabinete de Comunicação[8] junto das escolas, com o intuito de que estas requisitem os serviços dos elementos pertencentes à Equipa. Passados já seis anos desde a sua criação a prova de que a sua existência é um sucesso é o facto de, actualmente, estas actividades estarem incluídas nas planificações de actividades das escolas, (dos diversos níveis) e/ou das diversas disciplinas.

Neste texto, centro-me numa das palestras que faz actualmente parte do opúsculo da Equipa UAlg e que tem como título: *Como Resolver conflitos com a Matemática?*. No seu resumo é referido que

> [...] sempre que possível os problemas e actividades na sala de aula devem derivar de situações e vivências do dia a dia. Uma parte dessas vivências está directamente relacionada com a gestão e resolução de conflitos, muitos dos quais podem ser matematicamente modelados. […] pretende se que os alunos tomem consciência da aplicabilidade da matemática na resolução de conflitos, quer estes sejam à escala global (conflitos entre países) quer sejam aqueles com que nos deparamos na escola, em casa, com os amigos, etc. (GRE, 2006, p. 29)

Esta proposta foi efectuada com o intuito de explorar com os alunos um conjunto de tarefas que lhes permitam partir de um reduzido nível de conhecimento sobre modelação e levá-los a contactar com uma matemática (*in)felizmente* "diferente". Também por isso não foi preparada em forma tradicional de palestra (um orador e um conjunto de ouvintes), mas fundamentalmente como uma sessão de trabalho onde ocorre uma interacção entre os participantes, verificando-se nessa interacção uma negociação de significados, considerando a comunicação que se verifica, como um processo de interacção social (BELCHIOR, 2003, FERIN, 2002).

[8] Este gabinete até há três anos atrás era denominado de Gabinete de Relações Exteriores (GRE).

Quando perguntamos aos alunos o que é para eles a matemática e para que serve ou onde a utilizam, obtemos, não raras vezes, como resposta, "é a disciplina onde têm de aprender o que se encontra no livro". Atribuem-lhe uma utilidade prática quase exclusivamente relacionada com explorações numéricas (fazer compras, efectuar trocos, medir distâncias)[9] ou, nas palavras de um deles: "*Quando pensamos em matemática imaginamos sempre contas e mais contas*, *números e mais números, inúmeras dificuldades e imensas complicações*".

Assim, quando surgiu, no contexto da Equipa UAlg, a oportunidade institucional de poder ir às escolas falar e discutir com alunos e professores sobre um determinado tema, um dos temas a eleger teria de ser, sem margem de dúvida, um que me permitisse levar os alunos a desmistificarem, "descobrirem", e a tomarem consciência de que a matemática, como ciência/ disciplina não é um conjunto de operações que se faz com números e incógnitas – e muitas vezes por repetição sem compreensão – existindo muitas outras abordagens possíveis onde se podem aplicar e utilizar conteúdos matemáticos, de modo a solucionar as mais diversas situações, e onde as incógnitas podem não ser entendidas no sentido tradicional (dos conteúdos numéricos).

Esta era também uma oportunidade de evidenciar, perante os professores, de que os seus alunos eram capazes de ir, não raras vezes, muito mais além do que aquilo que eles próprios imaginavam.

Com o conjunto de tarefas proposto pretende-se também que os alunos possam motivar os seus professores a incluírem-nas nas suas práticas, levando-as para o exterior – casa, salas de aula – evidenciando distintas potencialidades de modo a que, em particular, os próprios professores se possam aperceber das mesmas. A maioria dos professores que solicitaram a referida palestra, assistiu e participou activamente nas actividades da mesma, tendo também ocorrido posteriormente, com parte deles, uma discussão mais profunda sobre as distintas potencialidades, diferentes formas de a adoptar/adequar às suas realidades, bem como alguns aspectos específicos relacionados com os

[9] Esta é uma das questões que "tradicionalmente" coloco nas diferentes situações em que trabalho com professores (em formação inicial ou contínua), tendo passado também a ser uma das que coloco antes de iniciar o tipo de trabalho e de exploração que se relata neste texto. Estes tipos de respostas apresentadas são, de entre as dos alunos, as que mais expressão possuem.

conhecimentos profissionais necessários à sua implementação.

De modo a ilustrar o que se referiu anteriormente, apresentarei algumas das propostas de trabalho abordadas nas palestras, devendo estas propostas ser consideradas como uma espécie de possível roteiro de modo a possibilitar aos alunos um contacto com a modelação – recorrendo à teoria de grafos – e a permitir lhes uma tomada de consciência de que a matemática está presente nas mais diversas situações sociais. A opção do roteiro pretende possibilitar também que os professores o adoptem, como possível fonte de ideias para futuras explorações.

Em algumas palestras é solicitado aos alunos (pelos professoras da turma) que entreguem um relatório final da sessão e, frequentemente, eu solicito também uma cópia das actividades que os alunos desenvolveram, para que me seja possível, posteriormente, discutir as diversas situações com os professores, evidenciando alguns aspectos chave de cada tarefa. Algumas destas sessões são também gravadas em áudio e vídeo[10] (ROCHELLE, 2000, SHERIN; VAN ES, 2005). Estas gravações são uma importante fonte de informação também de modo a permitir uma posterior discussão e reflexão mais aprofundada com os professores sobre as formas de explorar as situações propostas e alguns dos diferentes tipos de conexões possíveis de fazer com outros conteúdos, e também de modo a expandir o que Ball, Thames e Phelps (2008) denominam de conhecimento do horizonte matemático – conhecimento das relações existentes entre os distintos tópicos matemáticos e de que forma as aprendizagens de um mesmo tópico vão evoluindo ao longo da escolaridade, mas também do seu conhecimento comum e especializado do conteúdo.

Algumas propostas de trabalho

As tarefas aqui apresentadas e discutidas foram já realizadas com alunos de todos os níveis de escolaridade (com idades compreendidas entre os 6 e os 18 anos) – e grande parte delas também com professores, ou futuros professores –, e nortearam-se pelo objectivo de que fossem os alunos

[10] No âmbito da Equipa UAlg apenas uma sessão foi gravada em vídeo, porém nos restantes âmbitos essas gravações ocorreram por diversas vezes, e em níveis de escolaridade distintos. Os comentários e respostas dos alunos apresentados neste texto advêm dessas formas de recolha de dados.

(resolutores) a elaborar as suas próprias estratégias de resolução, comunicando-as ao grupo de modo a tornar as aprendizagens efectivamente colaborativas e em que todos são responsáveis pela aprendizagem de todos (RIBEIRO, 2007).

Pretende-se que, durante o processo de resolução, os alunos vão construindo uma noção de grafo que seja válida, em cada instante, bem como algumas propriedades destes – sem que, para isso, seja necessário qualquer tipo de formalização, ocorrendo esta apenas quando exclusivamente necessário ou solicitado pelos alunos como forma de simplificar a sua própria representação e compreensão da situação.

Muitas das situações que permitem uma modelação matemática e em que não estão envolvidos algoritmos, podem ser representadas recorrendo, somente, a pontos e linhas. Os pontos designam os elementos de um determinado conjunto e as linhas representam as possíveis relações que ocorrem entre esses elementos. Ao recorrermos a esta representação/ denominação estamos a simplificar drasticamente a situação real mas sem que se perca de vista o cerne da questão, com o objectivo de simplificar para tornar manejável.

Uma das actividades que os alunos realizam em todas as aulas de educação física é o aquecimento. Esta situação poderá ser utilizada para levar os alunos a consciencializarem-se de que a matemática está presente até quando efectuam este momento numa aula de educação física, por exemplo, no andebol. Uma das situações propostas aos alunos é a seguinte: *Imaginem-se numa aula de educação física, em que se vai jogar andebol. Durante o aquecimento, realizado em grupos de cinco, para quem é que cada um dos alunos do grupo pode passar a bola? Representem as distintas situações possíveis. Como podem todas as viagens da bola ser representadas?*

Aquando da sua apresentação aos alunos, as primeiras ideias expressas são relacionadas com o facto de, supostamente, estarem ali para abordar temas/conteúdos de matemática (pois quem têm à frente é um professor de matemática). Ao tentarem efectuar o registo que consideram poder dar resposta à questão, muitas vezes sentem necessidade de a visualizar, pelo que é necessário solicitar a um grupo de alunos que exemplifique a situação descrita, e por essa via todos os alunos compreendem efectivamente o que se pretende iniciando, imediatamente, a representação que consideram poder responder à situação.

Aquando do registo, e dependendo do nível de abstracção dos alunos, alguns têm necessidade de representar os colegas efectuando desenhos (um boneco para cada aluno), enquanto outros o fazem através de simples pontos, mas, independentemente da situação, e deste tipo de representação efectuada, todos expressam de forma correcta, tanto oral como escrita, o que representam cada um deles bem como cada uma das "linhas" que os unem.

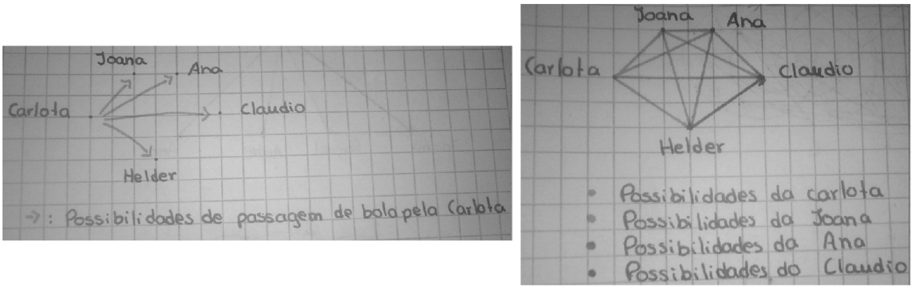

Ilustração 1 – Representação das diferentes possibilidades de um aluno passar uma bola aos restantes quatro (resolução de alunos com 15 anos)

Um facto curioso é o de que alguns alunos, após o "embate inicial" (antes de ser solicitada a representação) começam por representar os cinco alunos do problema em linha, mas depois referem que não é dessa forma que normalmente executam, eles próprios, o aquecimento, efectuando, então, a modelação em círculo, reflectindo assim uma sua experiência social. É também curioso o facto de alguns deles não representarem as setas indicativas do aluno (ponto) de destino (tal como é o caso da imagem da direita) mas quando são questionados, por ser uma situação que faz parte das suas vivencias, respondem, com naturalidade que, por ser a Andreia que tem a bola então as linhas só podem representar a origem na Andreia e o destino serem os colegas. No entanto, posteriormente, com as discussões entre os colegas, e ouvindo as suas argumentações sobre qual seria a *melhor forma de explicarem as diversas opções a alguém que não soubesse nada do que se estava a* *tratar*, todos chegam à conclusão que, pela forma como a questão foi colocada terão de recorrer às setas ou, como é o caso da Ilustração anterior (imagem do lado direito), a uma legenda com cores diferenciadas.

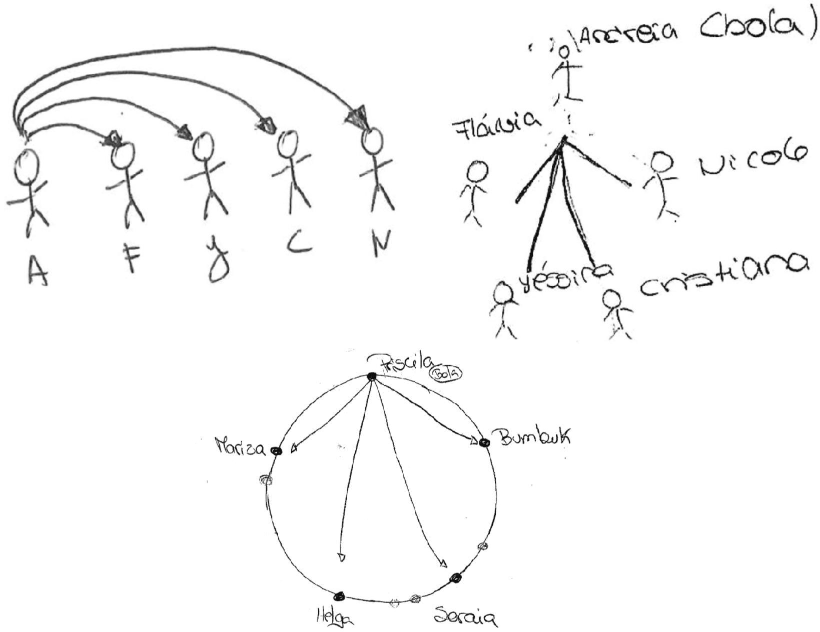

Ilustração 2 – Representação das diferentes possibilidades de um aluno passar uma bola aos restantes quatro (resolução de alunos com 11 anos)

Vários outros tipos de problemas podem ser utilizados para introduzir a modelação e o conceito de grafo (mesmo sem que se tenha para isso que efectuar a formalização). Muitos deles são utilizados de forma frequente, inclusivamente desde o 1.º Ciclo, sendo o mais tradicional o problema das saias e das blusas: "*A Maria foi acampar e na sua mochila levava apenas três blusas – branca, azul e preta – e duas saias – azul e vermelha. De quantas maneiras diferentes se pode vestir a Maria utilizando a roupa que tem disponível?*". Não raras vezes, os professores, quando exploram estas situações, limitam-se ao objectivo de que os alunos respondam correctamente ao problema colocado, através de desenhos ou preenchimento de tabelas – previamente fornecidas – não o explorando de forma mais sistemática e que poderia permitir uma primeira aproximação à teoria das probabilidades, efectuando uma representação metódica de todos os casos possíveis.

Com o intuito de levar os alunos a verdadeiramente compreenderem o papel de cada um dos componentes dos modelos que elaboram, uma outra situação que se explora relaciona-se com as distintas línguas maternas existentes na sala de aula. Este contexto tem também um bom motivo para ser seleccionado, dado que cada vez mais, nas nossas escolas, (pelo menos no contexto português) se verifica uma heterogeneidade de nacionalidades, línguas maternas, religiões, credos, …, pelo que, considerando a matemática como uma forma de Linguagem Universal, esta poderá ser vista como uma área curricular aglomeradora, a partir da qual podemos partir para o estudo de todas as outras fazendo uso das igualdades e diferenças próprias de cada aluno. Assim, pede-se aos alunos que refiram quais são as que existem dentro da sua sala – trazendo-os para a própria tarefa que irão desenvolver – colocando-lhes, posteriormente, a seguinte situação:

Como podemos escolher um grupo de cinco alunos da sala de modo a formar dois conjuntos com três alunos cada, se em cada um desses grupos apenas estiverem alunos que falem a mesma língua (têm de falar línguas distintas)? De entre esses, quem é que pode falar com quem?

Também aqui a primeira expressão é a de impossibilidade de tal ocorrência, pois, *pretende formar-se dois conjuntos de três, apenas com cinco elementos*![11] Mas como é uma realidade sua[12] rapidamente a solucionam, atribuindo inclusivamente nomes a cada um dos cinco alunos (cf. Ilustração 3). É solicitado que apresentem sempre mais do que uma forma de poderem ilustrar a solução, e nesta situação concreta fazem-no, recorrendo a conjuntos e grafos, mas também a listagem e a tabelas, o que enriquece também a sua visão e perspectiva matemática. Ao encontrarem os dois conjuntos, imediatamente referem que *existe um aluno que terá de pertencer aos dois conjuntos, logo tem de estar ligado a cada um dos outros dois elementos de cada conjunto*. Exteriorizam, desta forma informal, a definição de grafo, como um conjunto de pontos que se encontram ligados se existe uma determinada relação entre si.

[11] Comentário comum a várias das sessões realizadas, mesmo com alunos de anos mais avançados.
[12] Raras têm sido as situações em que se tem de recorrer a outro contexto por impossibilidade de recurso à própria turma.

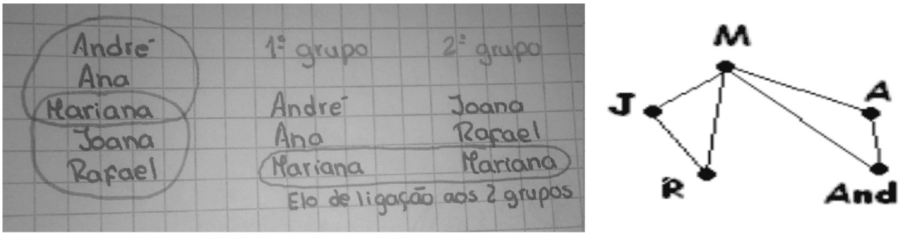

Ilustração 3 – Duas representações de dois grupos para a situação das línguas distintas

Quando obtêm, por si, este tipo de definição, dificilmente será esquecida, pois foi efectivamente compreendida, o que se exterioriza quando são confrontados com uma situação que, no início dos trabalhos, poderiam considerar nada ter que ver com matemática, mas que, neste momento, estão já tão embevecidos com as actividades que realizam – também por se referirem a situações suas – que têm a mente aberta para qualquer outro tipo de situação.

A resolução da última situação que aqui se apresenta depende das escolhas que os alunos efectuarem para os animais que mais gostavam que um dos Jardins Zoológicos da área onde residem adquirisse[13].

Um dos Zoos do Algarve está a pensar adquirir oito novos animais, mas para poder rentabilizar o negócio necessita da ajuda do público para a sua escolha. Com esse intuito anda a fazer um questionário pela região, indicando um conjunto de doze de entre os quais os inquiridos devem escolher oito possíveis. Depois de escolhidos os animais os donos do parque, têm de construir os recintos para os poderem acomodar e, aí, mais uma vez necessitam da tua ajuda. Como podemos distribuir os animais escolhidos de modo a que tenham de construir o número mínimo de recintos?

Ao serem os alunos a escolher os animais (de entre a lista fornecida) e ao verem reflectidas as suas escolhas na restante actividade, sentem que as suas vivências e experiências têm significado e importância, de tal modo que são efectivamente utilizadas na escola – à semelhança do que ocorria com as situações anteriores, em particular a das nacionalidades.

[13] Na região do Algarve, onde residem estes alunos, por ser uma zona bastante turística, existem diversos pequenos Zoos, conhecendo os alunos alguns deles, pois são frequentemente locais de visitas de estudo.

Nesta situação é, frequentemente, necessária alguma discussão e negociação com os alunos, sobre quais serão as possíveis formas de representar o facto de determinados animais não poderem ficar na mesma jaula, referindo estes que, no máximo, seriam necessárias oito novas jaulas – tantas quantos os animais –, mas que é expectável que sejam necessárias menos, pois de entre os que escolheram (em cada situação concreta), *há alguns que são amigos e que podem partilhar jaula*.

Após alguma discussão e da elaboração do registo das (in)compatibilidades em tabela de dupla entrada, os alunos efectuam sem dificuldade a modelação da situação. Para tal utilizam a teoria de grafos, pois compreenderam que, nesta situação, existirá uma determinada ligação entre dois animais se eles forem (in)compatíveis de ficar juntos. Na Ilustração abaixo apresento uma destas situações onde os alunos optaram por seleccionar leão, tigre, chita, gorila, girafa, rinoceronte e veado como sendo os oito animais para os quais teriam de construir o número mínimo de recintos.[14]

Após terem registado o conjunto das relações obtidas – pelas suas escolhas – e registadas na tabela, seleccionam que animais podem ficar juntos ou não. Dependendo de estarem a efectuar a modelação das compatibilidades ou incompatibilidades, assim juntarão os animais se estes se encontrarem ligados ou não (tiverem esse tipo de relação). Estas escolhas são, maioritariamente, efectuadas pelos alunos com recurso a cores (coloração de vértices) ou, então também a figuras geométricas, associando-as a cada conjunto de jaulas.

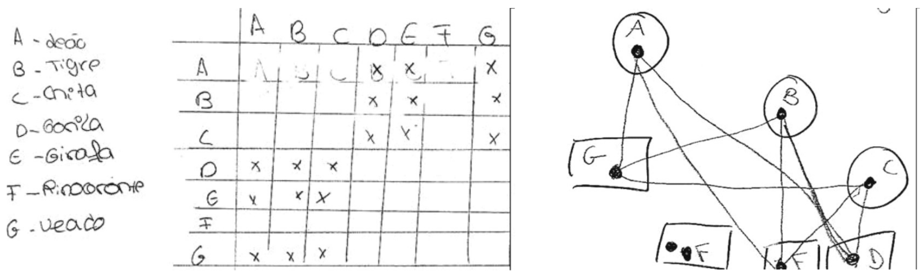

Ilustração 4 – Resolução de uma situação de incompatibilidades entre animais

[14] Recorde-se que cumpriu aos alunos a selecção dos animais, sendo deles também a opção final aquando do registo das (in)compatibilidades.

Este tipo de representação permite ainda abordar o facto de uma mesma situação (problema) poder ter várias soluções, pois, tal como é o caso aqui, são necessárias duas jaulas para os oito animais, mas podem existir diversas maneiras distintas de os colocar nessas jaulas. Neste caso, uma outra solução seria incluir o rinoceronte (F) no conjunto das jaulas circulares, pois não possui incompatibilidade com nenhum dos outros animais (na perspectiva dos alunos, pois foram eles que forneceram essas informações, podendo este ser um ponto de partida para o estudo dos animais e suas características).

Ao longo do decurso das actividades os alunos expressam verbalmente os seus raciocínios, ainda que por vezes incorrectos, sendo esta uma importante etapa do processo de aprendizagem. Esta exteriorização, do processo de raciocínio, assume um papel fundamental se considerarmos que é a partir das discussões resultantes que se tornam possíveis as negociações de significados entre todos os elementos, responsabilizando-os pelas aprendizagens realizadas.

Possíveis implicações deste tipo de tarefas nas práticas lectivas dos professores e nas aprendizagens dos alunos

Este tipo de tarefas, talvez por não serem comuns em Portugal nos circuitos comerciais (manuais e materiais propostos pelas editoras), e, por aparentemente, envolverem conteúdos que os professores consideram nunca ter tido contacto nas suas formações, são de difícil implementação a um nível mais global. Apenas recentemente (talvez cerca de dez anos) e somente em alguns cursos de formação inicial de professores, se incluíram disciplinas onde são abordadas e discutidas as bases teóricas da teoria de grafos. Apesar disso, e pelas evidências nos diversos encontros regionais e nacionais, os professores que mais parecem estar despertos para a exploração da teoria de grafos, ou pelo menos de alguns conceitos subjacentes a esta, são os dos primeiros anos de escolaridade – Pré-Escolar e 1.º Ciclo. Uma possível explicação poderá advir do facto de estar a ser implementado, actualmente, um Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º e 2.º Ciclos (SERRAZINA et al., 2005, 2008) e os professores poderem estar mais sensibilizados para a necessidade de incorporar nas suas práticas as realidades envolventes. Por outro lado, poderá indiciar também, que os professores dos outros níveis, em oposição, não se preocupam/interessam por esta área, que se quer transversal, pois assumem que, nesse ano específico, não irão leccionar a tal disciplina que implica, necessariamente, uma abordagem à modelação (teoria de grafos).

As actividades do tipo das que se apresentaram são, grande parte das vezes, mais complexas e consomem mais tempo na sua realização do que as actividades rotineiras (DOERR; ENGLISH, 2006), pelo que os professores poderão mostrar alguma resistência à sua preparação e implementação. Um outro aspecto que poderá desencorajar os professores a proporcionarem aos seus alunos novas e desafiantes situações de modelação, que envolvam, preferencialmente, as suas características, gostos, opções ou situações do seu contexto, poderá ser o facto de simplesmente não saberem como o fazer.

Para que estas práticas se tornem uma realidade, essa possível lacuna de saber, saber fazer, saber como explicar, … terá de ser, de alguma forma, colmatada, devendo para tal os professores passarem a estar mais dispostos para a discussão e reflexão.

O conhecimento profissional dos professores terá, portanto, de ser adequado a este tipo de tarefas que envolvem, frequentemente, situações que o professor não havia considerado, ocorrendo o que denomino de improvisação de conteúdo (RIBEIRO et al., 2009a). Por improvisações entendem-se todas as acções que o professor leva a cabo como resposta a algum evento que ocorre de forma inesperada e se esse evento estiver relacionado com o conteúdo que se aborda naquele instante, já se abordou ou virá a abordar, denomino-as de improvisação de conteúdo. Estas, por não terem sido previstas pelo professor, nem mesmo aquando da preparação da aula, implicam a entrada em jogo, em particular dos seus conhecimentos na sua forma mais pura, pois são situações em que está a trabalhar sem rede (RIBEIRO et al., 2009a), o que, caso o professor não possua um conhecimento profissional bem fundamentado, em todas as suas componentes (BALL et al., 2008), poderá levar a que as situações sejam indevidamente exploradas ou mesmo, a que sejam efectuadas relações que não são possíveis nesse contexto específico. Exemplos desse tipo de relações impossíveis são o facto de em algumas situações, os professores considerarem que após modelarem o problema tão conhecido dos apertos de mão envolvendo cinco pessoas[15], associam a modelação efectuada à figura geométrica do pentágono regular, utilizando a representação obtida para explorar conceitos de geometria.

Estas lacunas no conhecimento profissional do professor, podem levar a que, ao introduzir um determinado tipo de alteração menos adequada – de forma, conteúdo, contexto ou exploração –, ocorra a formação de *buracos negros* nas redes conceptuais que se pretende que os alunos vão construindo, tornando-as, portanto, menos densas. Esta falta de densidade traduz se, mais previsivelmente, na criação de lacunas e incongruências nos conhecimentos adquiridos naquele momento e entre estes e os anteriores/posteriores do que em progressos efectivos no processo de generalização dos conhecimentos. Os alunos são, assim, tentados a reproduzir as lacunas evidenciadas pelos próprios professores nessas situações.

Notas finais

O conjunto de actividades que se relatam e o modo como os alunos e professores, de uma maneira geral as encaram, têm grandes potencialidades em diversas áreas. Têm permitido, em diversas situações, facultar a ambos a oportunidade de se consciencializarem de que todas, ou grande parte das suas situações e vivências diárias se encontram "contaminadas" de matemática. Considero que os professores devem encarar a exploração desta contaminação como um meio no qual todo o Saber se desenvolve, explorando cada componente de forma isolada, mas também as relações entre todas as componentes desse sistema.

Os alunos encaram-nas como um desafio e tentam resolvê-las mobilizando as ferramentas matemáticas de que dispõem, de acordo com o seu nível de escolaridade, recorrendo, em diversas situações, à intuição!. Esta capacidade intuitiva é um recurso que se quer desenvolvido, pois será também a base das capacidades de um bom resolutor de problemas (CRUZ;

[15] Nesta situação colocam as cinco pessoas estrategicamente de modo a que formem um conjunto de cinco pontos à mesma distância de um ponto central imaginário e registando as relações existentes por via de segmentos de recta.

CARRILLO, 2004). Frequentemente, entre estas ferramentas matemáticas, encontra-se o recurso a algoritmos que permitem, pela sua exploração, auxilia-los a organizar e estruturar o seu pensamento (GRAHAM, 1991), facultando-lhe assim a oportunidade de se tornarem mais cidadãos de um mundo "onde a cultura dos procedimentos sequenciais se torna rapidamente um padrão" (JURKIEWICS, 2001).

Através da exploração e discussão com cada grupo específico de alunos, estas tarefas (ou outras do mesmo tipo) permitem relacionar diferentes domínios e conteúdos matemáticos (modelação *per si*, funções, sucessões, processos de contagem, introdução à teoria das probabilidades, …), bem como apresentar e explorar um mesmo conceito de diferentes formas, diversificando e fortalecendo assim as aprendizagens. Os alunos, e não será demais relembrar que, também os professores, adquirem (ou pelo menos assim se espera) uma visão mais ampla dos domínios abordados, o que contribuirá também para desmistificar um pouco as suas concepções de que a matemática é apenas e só a ciência dos números – um conjunto de operações que se realizam somente para obter uma aprovação final (tal como expressam alguns alunos no início das sessões).

Infelizmente, pela falta de rotina deste tipo de situações na sala de aula, quando facultadas, associadas à reflexão e discussão conjunta, estas tornam-se vivências significativas, quer em experiência quer em conteúdo. Esta significância é tão mais relevante/forte quanto mais importante for o papel desempenhado pelos alunos nas referidas tarefas e fundamentalmente nas actividades por si desenvolvidas, pois desse modo não estão apenas a construir as representações evidenciadas pelo professor, mas sim a serem capazes de criar e explicar representações que lhes são úteis e possuem para si significado, tal como referem Doerr e English (2006). Esta situação deve ocorrer nas tarefas propostas de modo a que sejam verdadeiramente desafiantes para os alunos.

Com este conjunto de tarefas (e outras similares construídas na mesma linha) pretende-se que os alunos desenvolvam actividades que permitam aperceber-se da presença da matemática em contextos de onde eles tradicionalmente a excluem, conduzindo a uma aproximação entre as actividades que se realizam no contexto escolar e na sociedade, dentro ou fora da escola. Este tipo de abordagem permite também, penso, auxiliar na criação das anteriormente referidas redes conceptuais levando inclusivamente, a uma possível mobilidade no seio de uma mesma rede e entre diferentes redes que possam existir, relacionando os conteúdos, não os tornando estanques. O facto de efectuarem modelações que lhes permitam criar os seus significados e a capacidade de aplicar os conhecimentos adquiridos em contextos diferentes daqueles onde foram apreendidos, conduz a que lhes atribuam um carácter móvel através da(s) rede(s) criada(s).

Penso que são evidentes algumas das possíveis potencialidades deste tipo de abordagem aos mais diversos conteúdos, mas, por outro lado, também surgem alguns dos condicionantes relacionados com a prática lectiva.

Do lado das potencialidades, para além das anteriormente referidas, temos o facto de que muitas das situações propostas aos alunos, e posteriormente discutidas com os professores, terem, noutras ocasiões, servido de base – pelo menos em termos de processo – a outras propostas de trabalho apresentadas aos seus alunos. Um outro aspecto relevante é o facto de, após as palestras, terem ocorrido, com os professores, discussões e reflexões sobre as diversas situações vivenciadas.

Também o facto de os professores assistirem à apresentação e discussão das tarefas com os alunos torna muito mais fácil e susceptível a que as implementem nas suas aulas, uma vez que (TICHÁ; HOSPESOVÁ, 2006) possuem já um modelo em que se podem basear para a sua prática[16]. As discussões e reflexões originárias desse trabalho conjunto, permitiram, de forma similar ao que referem Jaworski e Goodchild (2006), levantar questões sobre o processo de ensino aprendizagem. Serviram também para que alguns professores preparassem e discutissem diferentes tarefas a propor aos seus alunos.

Para que se verifique a necessária mudança de perspectiva por parte dos professores, passando a integrar nas suas práticas este tipo de actividades

[16] Não pretendo com isto dizer que é um modelo de boas práticas, até porque é uma situação pontual, porém, vem ao encontro do que referem muitos dos professores com quem tenho trabalhado no âmbito de um Programa de Formação Contínua em Matemática (SERRAZINA et al., 2005), quando afirmam que muitas vezes é suficiente observarem alguém fazer algo de forma diferente do que eles próprios fariam para que se passem a questionar sobre a sua própria prática.

com a frequência desejada, é necessário, também, que mantenham sempre a capacidade de se surpreenderem com o mundo à sua volta (SCHÖN, 1983), reflectindo sobre o significado que atribuem à prática de sala de aula (VAN DER BERG, 2002) e à sua orientação, e também a uma consciência de que enquanto Ser Humano estamos sempre a aprender, desde que se tenha predisposição para tal, cabendo-lhe esse papel enquanto professores.

Do lado de possíveis condicionantes poderá estar a natural impedância dos próprios professores à mudança das práticas, como sejam, por exemplo, aspectos relacionados com a matemática escolar (metodologia, orientação, conteúdo, finalidade), de como se realiza a aprendizagem, qual é o papel/importância da argumentação dos alunos, e de qual o papel do aluno e do professor nesse processo. Este pouco à-vontade que alguns professores revelam em relação à utilização das situações do quotidiano e à modelação como abordagem aos mais diversos conteúdos estará, também, relacionado com o seu conhecimento profissional, e com as possíveis lacunas que possam apresentar na componente específica de conhecimento do conteúdo, tal como o define Ball et al. (2008), uma vez que ninguém poderá "ensinar" aquilo que não domina (RIBEIRO et al., 2009b), nas suas mais diversas componentes.

Um outro aspecto a ter em conta é, obviamente, o facto de não se encontrar de forma explícita nos Programas que os alunos devem ser confrontados com este tipo de situações (apesar de implicitamente estar fortemente presente) (DEB, 1991a, 1991b, 2001, DES, 2001a, 2001b, DGEBS, 1991, PONTE et al., 2007). Desta forma, e segundo a interpretação de cada um dos documentos oficiais, os professores encontram uma justificação para centrarem a atenção das actividades de sala de aula de forma mais direccionada para a manipulação de símbolos matemáticos, considerada uma matematização vertical, em vez de uma horizontal (FREUDENTHAL, 1991), que se relaciona com o facto de transformarem problemas da vida real em problemas matemáticos.

De um modo geral, e no que concerne ao tipo de tarefas propostas e às consequentes actividades desenvolvidas pelos alunos, considero, que este tipo de abordagem evidencia, mais uma vez, a importância e potencialidades para as aprendizagens dos alunos e, neste caso e contexto específico, também dos professores. Urge, portanto, considerar como ponto de partida as características e etnomatemática dos alunos, de modo a que a construção de conceitos de forma mais formal parta da análise do seu concreto matematizando-o. Estas oportunidades facultadas aos alunos devem conduzir à elaboração/desenvolvimento de um pensamento matemático que lhes permita organizar, interpretar e compreender a realidade que os rodeia, bem como a possibilidade de se tornarem em aprendizes autónomos.

Referências

BALL, D.; THAMES, M.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: what makes it special? **Journal of Teacher Education**, Las Vegas, v 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BELCHIOR, F. Pedagogia, comunicação e existência. **Revista Portuguesa de Pedagogia**, Coimbra, v.37, n.3, p.197-230, 2003.

CRUZ, J. e CARRILLO, J., ¿Qué ponen en juego los alumnos al resolver problemas? Diferencias entre alumnos de 12 y 14 años. In: SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 8, 2004, La Coruña. **Investigación en Educación Matemática**. La Coruña, Espanha: Universidad de la Coruña, 2004.

DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO BÁSICA (DEB). **Organização Curricular e Programas**: Ensino Básico – 1.º Ciclo. Lisboa: Ministério da Educação, 1991a.

DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO BÁSICA (DEB). **Programa de Matemática Ensino Básico - 3.º Ciclo: Plano de Organização do Ensino-Aprendizagem**. Lisboa: Ministério da Educação, v. II, 1991b.

DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO BÁSICA (DEB). **Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escola**. Lisboa: Ministério da Educação, 1997.

DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO BÁSICA (DEB). **Currículo Nacional do Ensino Básico - Competências Essenciais**. Lisboa: Ministério da Educação, 2001.

DEPARTAMENTO DO ENSINO SECUNDÁRIO (DES). **Matemática A (10.º, 11.º, 12.º ano) Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas.** Lisboa: Ministério da Educação, 2001a.

DEPARTAMENTO DO ENSINO SECUNDÁRIO (DES). **Programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais**. Lisboa: Ministério da Educação, 2001b.

DIRECÇÃO GERAL DO ENSINO BÁSICO E SECUNDÁRIO (DGEBS). **Programa de Matemática Ensino Básico - 2.º Ciclo: Plano de Organização do Ensino-Aprendizagem**. Lisboa: Ministério da Educação, v. II, 1991.

DOERR, H. M.; ENGLISH, L. D. Middle grade teacher's learning through students engagement with modeling tasks. **Journal of Mathematics Teacher Education**, Dordrecht, v.9, p.5-32, 2006.

FERIN, I. **Comunicação e culturas do quotidiano**. Lisboa: Quimera, 2002.

FREUDENTHAL, H. **Revisiting Mathematics Education**. Dordrecht: Kluwer, 1991.

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL (GAVE). **Resultados do Estudo Internacional PISA 2003 (Primeiro Relatório Nacional)**. Gabinete de Avaliação Educacional do Ministério da Educação. Lisboa, 2004

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL (GAVE). **Reflexão dos docentes de matemática do 3º ciclo – Exame de 2005**. Gabinete de Avaliação Educacional do Ministério da Educação. Lisboa, 2006a.

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL (GAVE). **Resultados do Exame de Matemática do 9º ano 2005 – 1ª chamada**. Gabinete de Avaliação Educacional do Ministério da Educação. Lisboa, 2006b.

GABINETE DE RELAÇÕES EXTERIORES (GRE). **Equipa UALG**. Gabinete de Relações Externas da Universidade do Algarve. Faro, 2006.

GRAHAM, C. Strenghtening a K-8 Mathematics Program with Discrete Mathematics. In: M. Kenney & C. Hirsh (Ed.). **Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12**. Virginia: NCTM, 1991, p. 18-29.

JAWORSKI, B.; GOODCHILD, S. Inquiry Community in an activity theory frame. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 26, 2006, Prague. **Mathematics in the center**. Prague: Czech Republic University, Faculty of Education, 2006. p.353-360.

JURKIEWICS, S. **A Matemática Discreta e o Ensino Médio**. 2001. Disponível em <http://ensino.univates.br/~chaet/materiais/matdiscreta_medio.pdf>. Acesso em: 5 de Abril 2007.

KAISER, G. The Mathematical beliefs of teachers about applications and modeling - Results of an empirical study. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 26, 2006, Prague. **Mathematics in the center**. Prague: Czech Republic University, Faculty of Education, 2006. p.393-400.

LEAL, L.; VELOSO, E.; ABRANTES, P. Pode haver um currículo de Matemática centrado na resolução de problemas? In: FERNANDES, D.; BORRALHO, A. *et al* (Orgs.). **Resolução de problemas:** processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular. Lisboa: IIE, 1994. p.239-259.

LESH, R. ; HOOVER, M. B. ; KELLY, A.; POST, T. Principles for developing thoughts-revealing activities for students and teachers. In: LESH, R. A.; KELLY, A. (Orgs.). **Handbook of research design in mathematics and science education**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 2000. p.591-646.

MELLADO, V. J.; RUIZ, C. M.; BLANCO, J. L. Aprender a enseñar Ciencias Experimentales en la formacion inicial de maestros. **Bórdon**, Madrid, v.49, n.3, p.275-288, 1997.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM). **Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional, 1991.

NICOL, C. Learning to teach mathematics: questioning, listening, and responding. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v.37, p.45-66, 1999.

PONTE, J. P.; SERRAZINA, L.; GUIMARÃES, H.; BREDA, A.; GUIMARÃES, F.; SOUSA, H.; MENEZES, L.; MARTINS, M., E.; OLIVEIRA, P. **Programa de Matemática do Ensino Básico**. Lisboa: Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular, Ministério da Educação, 2007.

RIBEIRO, C. M. Práticas inclusivas em Educação Matemática: um trabalho colaborativo com professores do 1.º ciclo. IN BARCA, A; PERALBO, M.; PORTO, A.; SILVA, B. D.; ALMEIDA, L. (Eds.), **Livro de Actas do Congreso Internacional Galego-Portugués de Psicopedagoxía**. La Coruña, Espanha: Universidad de la Coruña, 2007, p.1746-1757.

RIBEIRO, C. M.; CARRILLO, J.; MONTEIRO, R. O conhecimento profissional em acção aquando da elaboração de um pictograma: uma situação de (i)literacia. In: ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – NÚMEROS E ESTATÍSTICA: reflectindo no presente, perspectivando no futuro, 19, 2009, Vila Real. **Proceedings...** Vila Real, Portugal: SPCE, 2009a.

RIBEIRO, C. M.; FEITEIRA, R. Conflitos com grafos: uma experiência interessante. In: ENCONTRO NACIONAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA – PROFMAT, 23, 2007, Angra do Heroísmo. **Actas**… Angra do Heroísmo, Portugal: Associação de Professores de Matemática, 2007. (CdRom)

RIBEIRO, C. M.; MONTEIRO, R.; CARRILLO, J. Professional knowledge in an improvisation episode: the importance of a cognitive model. In: CONFERENCE OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION – CERME, 6, 2009, Lyon. **Proceedings…** Lyon, França: Université de Lyon, 2009b.

ROCHELLE, J. Choosing and using video equipment for data collection. In: KELLY, A.; LECH, R. (Eds.). **Handbook of research design in mathematics and science education**. Londres: Lawrence Erlbaum Associates Publishers, 2000. p.709-732.

SCHÖN, D. **The reflective practitioner:** how professionals think in action. Nova York: Basic Books, Inc., Publishers, 1983.

SERRAZINA, L.; CANAVARRO, A.; GUERREIRO, A.; ROCHA, I.; PORTELA, J.; SARAMAGO, M. J. **Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º Ciclo**, 2005 *(documento não publicado*).

SERRAZINA, L., CANAVARRO, A., GUERREIRO, A., ROCHA, I. E PORTELA, J. **Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º e 2.º Ciclos**. 2008. *(documento não publicado*).

SHERIN, M. G. e VAN ES, E., A. Using video to support teachers' ability to interpret classroom interactions. **Journal of Technology and Teacher Education**, v.13, n.3, p. 475-491, 2005.

TICHÁ, M.; HOSPESOVA, A. Qualified pedagogical reflection as a way to improve mathematics education. **Journal of Mathematics Teacher Education**, n. 9, p. 129-156, 2006.

VAN DER BERG, R. Teachers' meaning regarding educational practice. **Review of Educational Research**, v.72, n.4, p.577-625, 2002.

Submetido em setembro de 2009
Aprovado em fevereiro de 2010