Bolema, Rio Claro (SP), v. 23, nº 37, p. 1081 a 1110, dezembro 2010 ISSN 0103-636X

Um Estudo Histórico-Filosófico acerca do Papel das Demonstrações em Cursos de Bacharelado em Matemática

A Historical-philosophical Study about the Role of Mathematical Proof in Undergraduate Courses to Bachelor's Degree on Mathematics

Irinéa de Lourdes Batista[1]
Thiago Nagafuchi[2]

Resumo

O presente artigo descreve os passos e apresenta resultados de uma pesquisa que buscou identificar elementos que pudessem contribuir com construções de abordagens histórico-filosófica para o ensino das demonstrações na formação inicial do bacharel em Matemática. Para alcançar tal objetivo, realizamos estudos históricos e filosóficos que propiciaram a identificação de elementos epistemológicos para tais abordagens e que fundamentaram, como filtros teóricos, a construção, a análise e a síntese de entrevistas semiestruturadas com docentes de cursos de Matemática em universidades brasileiras, de forma a contemplar e contemporizar tal identificação com aspectos da realidade do ensino de Matemática realizado no Brasil.

Palavras-chave: Demonstração. História e Filosofia da Matemática. Bacharelado em Matemática. Ensino de Matemática.

[1] Doutora em Filosofia – USP, Docente da Universidade Estadual de Londrina, CCE, Departamento de Física, Campus Universitário. Endereço para correspondência: Cx. Postal 6001, 86051-990 – Londrina – PR. E-mail: irinea@uel.br

[2] Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática – UEL. Endereço para correspondência: Setor Bancário Norte, Quadra 2, Bloco L, Lote 06, 70040-020 – Brasília – DF. E-mail: thiago.nagafuchi@capes.gov.br

Abstract

This paper describes the steps and presents the results of research about elements that contribute to the construction of a historical-philosophical approach for teaching mathematical proof in undergraduate courses to bachelor's degree on Mathematics. We performed a historical and philosophical survey that provided epistemological fundamentals and argument, as theoretical filters, for the construction, analyses and synthesis of semi-structured interviews with undergraduate Mathematics professors from some Brazilian universities. This process of combining ideas into a complex whole contemplated and contemporized the identified elements with the teaching of Mathematics in Brazil.

Keywords: Mathematical Proof. History and Philosophy of Mathematics. Bachelor's degree. Mathematics Teaching.

Introdução

Esta pesquisa teve como objetivo principal trazer à tona uma discussão a respeito de elementos com potencial contribuição na construção de abordagens histórico-filosóficas para o conteúdo de demonstrações na formação inicial do bacharel em Matemática. A escolha por estudar a formação do bacharel se deu essencialmente pelo fato de nossos levantamentos bibliográficos evidenciarem uma carência de pesquisas específicas e explícitas acerca dos problemas dos cursos de bacharelado em Matemática, principalmente na esfera das pesquisas nacionais em Educação Matemática.

Nossos estudos preliminares geraram a pergunta "(Como) Seria possível um ensino mais explícito das demonstrações a partir de um debate histórico-filosófico?" Com o desenvolvimento teórico-metodológico no âmbito documental, a questão inicial transformou-se em duas "Qual o papel das demonstrações na formação do Bacharel em Matemática?" e, ainda, "Qual a relevância de um estudo histórico-filosófico acerca desse papel na formação inicial do bacharel?".

Para respondê-las, a investigação compreendeu duas fases: a primeira foi o desenvolvimento de um referencial teórico por meio de uma reconstrução histórica e de uma visão fundamentada em aspectos filosóficos da demonstração. Como resultado, elaboramos uma reconstrução histórica das demonstrações matemáticas através dos tempos e uma síntese a partir de pesquisas existentes dos aspectos filosóficos das demonstrações. A segunda fase, de caráter empírico, constituiu-se de entrevistas realizadas com professores e coordenadores de curso diretamente ligados a seis cursos de Bacharelado em Matemática, em que se buscaram noções, abordagens e as principais dificuldades dos alunos, identificadas por esses docentes que, de alguma forma, pudessem descrever e caracterizar a participação da demonstração – como conteúdo ou como uma prática *per se* – que se realiza nas Instituições de Ensino Superior (IES) que fizeram parte da pesquisa.

O atual artigo está centrado na disseminação dos resultados dessa segunda fase, sendo a primeira fase objeto de outro trabalho. Não obstante, como subsídio para a contextualização e a justificação da construção, análise e síntese dos dados obtidos do estudo empírico, apresentaremos os fundamentos necessários advindos dos estudos da primeira fase, que apresentam os aspectos mais relevantes e pertinentes nos âmbitos histórico-filosóficos da Matemática e da Educação Matemática.

Resgate-se, também, que as pesquisas acerca das demonstrações vêm se intensificando nos últimos quinze anos com a formação de grupos internacionais de pesquisa específicos, com publicações de números especiais em importantes revistas sobre o tema como, por exemplo, a revista brasileira *Bolema* e a internacional *ZDM Mathematics Education*, com a criação de grupos de trabalhos em importantes congressos internacionais da área e com a publicação de capítulos ou de livros inteiros dedicados à temática. Essas pesquisas têm mostrado o modo, muitas vezes confuso, de uso dos termos prova e demonstração em situações do ensino de Matemática (MARIOTTI; BALACHEFF, 2008). A origem da imprecisão vem do próprio contexto de ensino, aulas de Matemática, o que pressupõe que o objetivo final é a obtenção do conhecimento formal, final, consistente e coerente com as regras e conhecimentos bem estabelecidos, que compõe uma ou várias demonstrações, alcançando o enunciado de uma teoria. Nesse contexto, uma prova é implicitamente pensada como prova formal e final de uma proposição dada, que é possível de ser computada e processada por computadores, ou seja, uma demonstração.

No entanto, em situações didáticas, vários outros tipos de provas são ensinados, muitas vezes sem as devidas diferenciações, causando confusões e obstáculos conceituais, como indica Balacheff (1987). Discutir demonstração, do ponto de vista pedagógico, envolve necessariamente discutir as provas e as contradições, o que estabelece demonstrações e provas como uma sinonímia no processo educativo matemático. Ressalte-se que, com os devidos cuidados, essa sinonímia enriquece o campo de pesquisa desde que explícita e coerentemente apresentada (MARIOTTI; BALACHEFF, 2008), como pode ser percebido no periódico *Educational Studies in Mathematics*, em que o termo prova (*proof*), por sua riqueza e abrangência conceitual (BALACHEFF, 2008), é de uso mais corrente em inglês[3], enquanto o termo demonstração é utilizado, mas menos usual, para o resultado de prova formal final, sendo este tipo de prova considerado um método de demonstração (MACINTYRE, 2005).

Desse modo, como nossa pesquisa está no âmbito da Matemática e no seu ensino, as palavras *prova* e *demonstração* serão, em geral e com o devido cuidado, tomadas como sinonímias, acompanhando o enfoque de Balacheff (2008). Ressalvamos, no entanto, o fato de que em Epistemologia da Ciência o conceito de prova é menos geral do que o de demonstração, no âmbito da constituição de universais, e que uma demonstração pode ser sempre computada, enquanto uma prova nem sempre o pode ser.

Problematizando: o que é demonstração?

Saber construir uma demonstração e saber demonstrar não implica em saber o que é uma demonstração, quando "saber" é dar uma resposta coerente, factual e conceitual. Hersh esclarece:

> O problema é que, a "prova matemática" tem dois significados. Na prática, é uma coisa. Em princípio, é outra. Nós *mostramos* aos estudantes o que a prova é na prática. Nós lhes *dizemos* o que é em princípio. Os dois significados

[3] O leitor poderá identificar o pouco uso do termo demonstração em estudos matemáticos de língua inglesa, notadamente a partir do início do século XX, fazendo uma consulta na base de arquivos digitais JSTOR. No entanto, vale lembrar que em textos do século XVII e XVIII, esse termo é corrente nas demonstrações geométricas.

> não são idênticos. Tudo bem. Mas jamais *reconhecemos a discrepância*. Como pode estar tudo bem? (HERSH, 1997, p. 49, grifos do autor).[4]

Para Hersh (1997), o primeiro significado, o significado prático, é informal e impreciso. É o que é feito para que os outros *acreditem* nos teoremas provados, ou seja, para que reconheçam que determinado resultado é válido. Os outros são os especialistas céticos e qualificados. São as provas que encontramos n'*Os Elementos* de Euclides e nos boletins da Sociedade Brasileira de Matemática. O que é, de fato, ninguém diz.

O outro significado é o formal, conceituado por Aristóteles, Boole, Frege, Hilbert, Peirce, Russel, Gödel e outros. É uma transformação de sequências simbólicas escolhidas de acordo com certas regras lógicas, ou ainda, uma sequência de passos, na qual cada um desses passos deve ter uma dedução lógica estrita, ou ser explicitamente desdobrado em uma dedução lógica estrita (HERSH, 1997). De acordo com uma conversa particular com Paul Ernest citada por esse autor, esta é uma conceituação formal, idealizada, a partir de uma reconstrução racional da ideia de prova (HERSH, 1997).

Para Bicudo (2002), as definições da Lógica deveriam modelar as demonstrações matemáticas, porém, a demonstração que se encontra nos livros e periódicos é aquela que satisfaz a comunidade de especialistas, não interessando o quão distante ela possa estar do ideal lógico.

Godino e Récio (1997) argumentam que, no contexto da Matemática profissional como a atividade produzida pelos matemáticos, nem sempre as demonstrações obedecem estritamente a característica tão cara aos aficionados pelo formalismo, ou seja, elas não são dadas de acordo com a definição de prova formal.

Por que um debate histórico-filosófico acerca das demonstrações?

Alguns estudos abalizam consideráveis contribuições que a perspectiva

[4] Oferecemos ao leitor o texto original da citação "The trouble is, 'mathematical proof' has two meanings. In practice, it's one thing. In principle, it's another. We *show* students what proof is in practice. We *tell* them what it is in principle. The two meanings aren't identical. That's O.K. But *we never acknowledge the discrepancy*. How can that be O.K.?"

histórico-epistemológica pode trazer à questão das demonstrações. Para Mariotti e Balacheff (2008), essa é uma perspectiva tradicional, e ela está diretamente relacionada à natureza da prova – e argumentação – matemática e suas funções.

Por que o enfoque histórico-filosófico? Matthews nos lembra que a História, a Filosofia e a Sociologia da Ciência podem não ser a panaceia para a melhoria da Educação. Porém, elas podem

> [...] humanizar as ciências e aproximá-las dos interesses pessoais, éticos, culturais e políticos da comunidade; podem tornar as aulas de ciências mais desafiadoras e reflexivas, permitindo, deste modo, o desenvolvimento do pensamento crítico; podem contribuir para um entendimento mais integral de matéria científica mais desafiadoras e reflexivas, permitindo, deste modo, o desenvolvimento do pensamento crítico; podem contribuir para um entendimento mais integral da matéria científica, isto é, podem contribuir para a superação do 'mar da falta de significação' que se diz ter inundado as salas de aula de ciências, onde fórmulas e equações são recitadas sem que muitos cheguem a saber o que significam; podem melhorar a formação do professor auxiliando o desenvolvimento de uma epistemologia da ciência mais rica e mais autêntica, ou seja, de uma compreensão da estrutura das ciências bem como do espaço que ocupam no sistema intelectual das coisas (MATTHEWS, 1995, p. 165, grifo nosso).

Batista, ainda, nos diz que

> A redução das Ciências e da Matemática à pura técnica, em certos casos, à técnica experimental e, em outros, à técnica matemática para a dedução lógica de conseqüências dos axiomas da teoria, evita questionamentos conceituais no seu ensino e gera uma formação estreita e acrítica. Assim, a investigação e o ensino de Ciências e da Matemática não devem ignorar simetricamente os avanços e contrastes históricos que deram origens às idéias de hoje (BATISTA, 2007, p. 270).

Na formação do pesquisador, Batista (2007) afirma que a História e a Filosofia da Ciência contribuem para a realização de pesquisa científica criativa, para o entendimento de metodologia e planejamento científicos, para a aquisição de fontes dos elementos de decisão de pesquisa (como dificuldades estruturais e epistemológicas e tendências frutíferas) e para o reconhecimento das diferentes formas de pesquisa.

Uma reconstrução histórica das demonstrações é capaz de nos mostrar como esse conceito foi evoluindo através dos tempos, desde as hipóteses do surgimento da demonstração até a justificação da atual conceituação de demonstração, considerada, por muitos, como cerne da Matemática.

Os aspectos filosóficos expõem muitos significados e papéis que as demonstrações podem ter em âmbitos diversos, como na Matemática, na Filosofia da Matemática, na Lógica e na Educação Matemática, evidenciando uma rica discussão, que mostra que não existe uma resposta geral para a questão "O que é e para que servem as demonstrações?"

Desenvolvimento teórico-metodológico

Esta pesquisa se insere no âmbito de pesquisa qualitativa em Educação Matemática. Em Bogdan e Biklen (1994) e Lüdke e André (1986) vemos que nesse tipo de investigação a fonte de dados é o ambiente natural e o pesquisador é o principal instrumento; a investigação tem uma natureza descritiva; os pesquisadores têm um interesse maior no processo e nos seus significados do que nos resultados ou produtos.

Para realizarmos a reconstrução histórica, adotamos algumas metodologias específicas. Segundo Martins,

> Não existe uma fórmula mágica ou receita infalível para fazer uma boa pesquisa em História da Ciência. Em diversos momentos, o pesquisador vai refletir sobre o problema estudado e procurar novas fontes. Ele vai precisar fazer levantamentos, selecionar e localizar documentos, buscá-los ou obter cópias deles e analisá-los. Precisará também escrever, elaborar uma argumentação, discutir trabalhos historiográficos anteriores sobre o mesmo assunto e fundamentar bem suas conclusões. (MARTINS, 2005, p. 307-8).

Kragh (1987) distingue o termo "história" em dois níveis diferentes. A História (H_1) é objetiva e descritiva, uma vez que narra fenômenos e acontecimentos. A História (H_2) é a análise e a interpretação teórica da realidade histórica H_1.

A historiografia pode significar simplesmente uma escrita profissional sobre história ou, ainda, teoria ou filosofia da história, e nesse caso, quando seu objeto de estudo é H_2, a historiografia pode ser caracterizada como uma metadisciplina.

Como nosso objetivo principal não é uma investigação histórica ou historiográfica acerca das demonstrações em Matemática, baseamos a reconstrução a partir de pesquisas históricas ou historiográficas já realizadas sobre o tema ou em livros de História da Matemática. Isto é, a reconstrução foi baseada em fontes secundárias, que Martins (2005) classifica como estudos historiográficos acerca do período, do autor ou do conceito investigado.

Para a nossa pesquisa empírica, utilizamos a técnica de entrevista, que é um importante instrumento de obtenção de dados. O tipo de entrevista aqui adotado foi aquele que segue um roteiro semiestruturado. Para Lüdke e André (2004, p.34), "a grande vantagem da entrevista [...] é que ela permite a captação imediata e corrente da informação desejada" e, ainda, a liberdade do percurso associada à entrevista semiestruturada "permite correções, esclarecimentos e adaptações que a tornam sobremaneira eficaz na obtenção de informações desejadas" (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p.34).

Para a construção das questões da entrevista, focamos em aspectos que são significativos à pesquisa, envolvendo a abordagem em que as provas são feitas nas disciplinas, as principais dificuldades dos alunos identificadas pelos professores, quais as formas de superação dessas dificuldades que esses professores valorizam e noções acerca das demonstrações e seus papéis atribuídos para a construção do conhecimento matemático, com perguntas auxiliares para a identificação de possíveis diferenças de abordagem das habilitações licenciatura e bacharelado, sempre tendo em foco as problemáticas identificadas nos estudos históricos e filosóficos. As perguntas tiveram como objeto a prática de cada professor, buscando a identificação e a caracterização de sua realidade acadêmica por meio dos dados obtidos acerca da noção dos mesmos quanto ao papel, a importância e o significado das demonstrações para a formação do bacharel.

A escolha por entrevista semiestruturada permitiu uma maior flexibilidade em relação à sua realização. As perguntas possuem um núcleo comum, porém, mudanças sutis foram feitas para cada grupo dos sujeitos de pesquisa envolvidos diretamente com a coordenação do curso de Bacharelado em Matemática em suas respectivas instituições. Dessa forma, o roteiro das questões obteve a seguinte configuração:

— Perguntas para o professor envolvido com a coordenação de curso:
– Qual o significado, o papel e a importância que o(a) senhor(a) atribui para as demonstrações na formação de um bacharel em Matemática? Há alguma diferença em relação à formação de um licenciado em Matemática?
– O que é saber o que é uma demonstração?
– Quais são as principais dificuldades com as demonstrações e como elas podem ser superadas?
– Qual seria o papel das demonstrações para a construção do Conhecimento Matemático?

— Perguntas para o professor de disciplinas específicas:
– Como o tema "demonstração" é abordado na disciplina? A abordagem é a mesma para as outras habilitações, como Matemática Aplicada ou Licenciatura?
– Para o(a) senhor(a), o que é uma demonstração e qual o significado que a demonstração deve ter para um bacharel em Matemática? E para um licenciado? É diferente?
– O que é saber o que é uma demonstração?
– Quais são as principais dificuldades com as demonstrações e como elas podem ser superadas?
– Qual seria o papel das demonstrações para a construção do Conhecimento Matemático?

A partir das entrevistas e das transcrições, criou-se um banco de dados com riqueza de informações. Quando o pesquisador vai a campo, porque está envolvido com determinado assunto, possui em mente possíveis respostas ou resultados. Porém, a natureza humana é muito mais intrigante – e por que não dizer complexa – do que uma previsão ou crenças iniciais. O momento de análise de dados é aquele em que o pesquisador mergulha num mar incógnito buscando uma síntese do que foi estudado e coletado como dado. Para Bogdan e Bikley,

> A análise envolve o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspectos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão do que vai ser apresentado aos outros (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 205).

E para Lüdke e André,

> A tarefa da análise implica, num primeiro momento, a organização de todo o material, dividindo-o em partes, relacionando essas partes e procurando identificar nele tendências e padrões relevantes. Num segundo momento essas tendências e padrões são reavaliados, buscando-se relações e inferências num nível de abstração mais elevado (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 45).

As entrevistas transcritas passaram por leituras criteriosas, em que foi possível identificar aspectos importantes no discurso de cada professor entrevistado. Unidades de análise foram identificadas e construídas a partir de semelhanças ou não que surgiram das respostas dos professores à luz da análise textual discursiva, que é um conjunto variado de metodologias de trabalho com textos, que inclui desde a análise de discurso até a análise de conteúdo, e representa "um movimento interpretativo de caráter hermenêutico" (MORAES; GALIAZZI, 2007, p. 7).

As unidades criadas a partir das análises são não-excludentes, ou seja, a fala de um professor pode estar inserida em mais de uma unidade. Com o intuito de facilitar a identificação dos professores, foi criada uma sigla para cada um deles, de forma que o primeiro caractere é uma letra em caixa alta (C), que indica aquele que está envolvido com a coordenação de curso, e

(P), aquele que ministra disciplina introdutória ou disciplina cujas demonstrações possuem grande ênfase. A fim de diferenciar cada um dos professores, o segundo caractere é um algarismo romano.

Instituições participantes

As IES escolhidas foram seis: três no estado de São Paulo, Universidade de São Paulo (USP), Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", campus Rio Claro (UNESP – RC); uma no estado do Paraná, Universidade Estadual de Londrina (UEL); uma no estado do Rio de Janeiro, Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ); e uma no Distrito Federal, Universidade de Brasília (UnB).

Inicialmente, a escolha das IES foi realizada a partir das notas de recomendação e reconhecimento concedidos pela CAPES para Programas de pós-graduação *strictu sensu* em Matemática Pura. As notas dos cursos recomendados variam de 3 a 7, sendo 7 o conceito mais alto de um curso de pós-graduação *strictu sensu.* Escolhemos as instituições com notas 6 ou 7, ou seja, instituições com nível de excelência em formação de recursos humanos de pesquisa e docência no Ensino Superior, excluindo-se o IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada), por não ofertar curso de graduação. Nessa categoria estão: UNICAMP (com nota 7), USP, UFRJ e UnB (com nota 6).

Uma vez que houve um congresso na UNESP de Rio Claro, tivemos a possibilidade de colher entrevistas nessa instituição, que também possui um dos cursos de pós-graduação *strictu sensu* em Educação Matemática mais bem avaliado pela CAPES. E por fim, incluiu-se a UEL como a instituição que sediou essa pesquisa no âmbito do Programa de Pós-graduação *Stricto Sensu* em Ensino de Ciências e Educação Matemática e que também abriga um Departamento de Matemática com mais de 30 anos de criação.

De cada uma das IES, foi entrevistado o professor responsável pela coordenação do colegiado de curso ou que fizesse parte da comissão de graduação (doravante representados por CI, CII, etc.) e pelo menos um professor (doravante representados por PI, PII, etc.) que ministrasse uma disciplina que fosse responsável pela introdução ao tema "demonstração" ou, no caso de inexistir uma disciplina com uma abordagem explícita do tema, um professor que ministrasse uma disciplina que envolvesse o uso de demonstrações (como por exemplo, Análise Real e Geometria Euclidiana). É interessante observar que, dentre os professores entrevistados envolvidos com a coordenação de curso, vários também ministram essas disciplinas. Todos os entrevistados aprovaram o uso dos dados obtidos nas nossas pesquisas, que tem o compromisso com o anonimato dos entrevistados.

O universo total de professores entrevistados é treze, sendo oito do sexo feminino e cinco do sexo masculino. A média de idade de docência dos professores é de 20,38 anos, com um desvio padrão de 11,22, sendo que o tempo mínimo e máximo de docência são, respectivamente, 3 e 41 anos.

A Reconstrução Histórica e os Aspectos Filosóficos da Demonstração

Destacamos dois momentos relevantes na pesquisa teórica: a reconstrução histórica acerca das demonstrações e o levantamento de aspectos filosóficos identificados na literatura em Educação Matemática e Filosofia da Matemática.

Na reconstrução histórica buscamos, em livros e artigos de História da Matemática, momentos importantes na história da demonstração que, de alguma forma, foram heurísticos e definidores para as demonstrações no seio da Matemática.

Abordamos os seguintes tópicos: (1) A origem do pensamento matemático na região do Mar Mediterrâneo; (2) alguns fatos sobre os gregos; (3) o papel de Aristóteles; (4) Euclides de Alexandria e *Os Elementos*; (5) demonstração na Matemática árabe; (6) Idade Média e Renascimento europeus; (7) o alvorecer da Matemática moderna; (8) século XIX: reintrodução da prova; (9) o Movimento Axiomático; (10) o Formalismo e os teoremas de Gödel; (11) um breve panorama da atualidade.

Identificamos que existem dois momentos históricos de maior significância para as nossas discussões:

– (i) a origem e o surgimento da organização e estruturação hipotético-dedutiva na Grécia Antiga e

– (ii) a reintrodução da prova e, por conseguinte, o valor primário dessa no corpo da Matemática, no período que cobre o movimento de rigorização da Análise até a Crise dos Fundamentos, na passagem do século XIX para o século XX.

Deteremos-nos aqui na discussão dos aspectos filosóficos, enfocando diferentes papéis das demonstrações em campos distintos, como na Matemática, na Lógica Matemática, na Filosofia da Matemática e na Educação Matemática, além de uma breve discussão acerca dos aspectos sociológicos da demonstração. Essa fundamentação tem papel na construção e análise das unidades discursivas geradas, daí sua inclusão para o auxílio no entendimento da síntese obtida.

Na Lógica, temos a seguinte definição de prova formal dada por Alfred Tarski:

> Uma prova formal de uma dada sentença consiste na construção de uma finita sequência de sentenças tais que (1) a primeira sentença é um axioma; (2) cada uma das outras ou é um axioma ou é dedutível diretamente das que a precedem na seqüência (...); e (3) a última sentença na sequência é aquela a ser provada (TARSKI, 1969, p. 75).[5]

E, ainda, uma definição mais atual, dada a partir da Teoria dos Modelos por meio dos sistemas formais. O sistema formal consiste de (i) um conjunto de axiomas e (ii) um conjunto de regras de inferência, que permitem uma relação entre os axiomas e as proposições.

Dessa forma, sendo **F** uma fórmula escrita numa linguagem formal **L**, ela será formalmente demonstrável em um sistema formal se existir uma sequência de fórmulas que contém apenas axiomas ou fórmulas demonstradas formalmente a partir das fórmulas que precedem na lista. E assim, uma demonstração de **F** é uma sequência, uma lista, que termina por **F**. As fórmulas demonstradas são chamadas teoremas ou teoremas formais (WAGNER, 2002).

[5] Oferecemos o texto original ao leitor "A formal proof of a given sentence consists in constructing a finite sequence of sentences such that (1) the first sentence in the sequence is an axiom, (2) each of the following sentences either is an axiom or is directly derivable from some the sentences that precede it in the sequence, (…), by virtue of one of the rules of proof, and (3) the last sentence in the sequence is the sentence to be proved."

Para Da Silva (2002), considerar a demonstração como sequências ordenadas no espaço lógico, com relações de dependência ou consequência lógicas, reflete apenas um de seus aspectos, que ele chama de *lógico-epistemológico*. Para ele, ainda existem mais dois aspectos: o *retórico* e o *heurístico*.

O aspecto retórico remete ao poder de convencimento das demonstrações "segundo o qual, elas aparecem como portadoras de força coercitiva de aquiescência às teses demonstradas" (DA SILVA, 2002, p. 69). O outro aspecto, em que uma demonstração tem uma função heurística, versa que ela pode ser indutora de descoberta matemática. Aqui o autor toma a perspectiva da epistemologia falibilista popperiana, proposta por Imre Lakatos em sua Filosofia da Matemática, centrada na dialética de provas e refutações, uma vez que a demonstração precisa de uma "incorreção" lógica para poder induzir ao progresso matemático, segundo o aspecto heurístico. Ela não poderia ser uma demonstração logicamente impecável do ponto de vista do aspecto lógico-epistemológico.

Weber (2008) discute três perspectivas acerca das provas. Uma delas, denominada de perspectiva formal, assemelha-se ao aspecto lógico-epistemológico descrito anteriormente, em que a prova é vista como uma estrutura formal que é validada por regras lógicas e convenções matemáticas bem definidas e explicitamente estabelecidas.

A segunda perspectiva, semelhante ao aspecto retórico descrito por Da Silva (2002), é de que a prova é um argumento com a finalidade de convencer, seja um matemático que conhece o assunto específico, seja um cético arrazoado ou um inimigo. O autor apresenta dois argumentos: a aceitação da prova tem objetivo maior de considerar a plausibilidade do argumento apresentado do que a verificabilidade dos passos específicos do processo dedutivo; e a plausibilidade dos argumentos, em que fatores não-matemáticos influenciam na aceitação, como por exemplo, a reputação do autor da prova.

A última perspectiva apresentada por Weber (2008) enfatiza o papel social da prova, que é um argumento que se constitui como uma questão de negociação social e de consenso, com regras, normas e técnicas bem estabelecidas no seio de uma comunidade.

Outra perspectiva possível, que aqui denominaremos de teórico-metodológica, proposta por Rav (1999) e Hanna e Barbeau (2008), é de que as provas são fomentadoras do conhecimento matemático. Uma vez que a essência da Matemática reside na invenção de métodos, instrumentos, estratégias e conceitos para a resolução de problemas, e pelo fato de as provas incorporarem tais elementos, elas deveriam ser o foco primário do interesse matemático.

Nos aspectos sociológicos, destacamos o Construtivismo Social, de Paul Ernest (2006) e na definição baseada na *Gestalt,* de Eric Livingstone.

Ernest (2006) descreve sua filosofia como nominalista, em relação à ontologia, e como convencionalista, em respeito à epistemologia e aos fundamentos do conhecimento. O construtivismo social é uma filosofia nominalista porque os objetos da Matemática são signos, e é convencionalista, porque os conceitos, termos, teoremas, regras e lógica das provas, verdades e teorias matemáticas são entidades culturais socialmente construídas.

No construtivismo social de Ernest, *grosso modo*, a produção do conhecimento matemático dar-se-ia por um ciclo entre o conhecimento subjetivo e o conhecimento objetivo, em que a prova seria um dos movimentadores desse ciclo. No nível subjetivo, o matemático produz novos conhecimentos e torna esse conhecimento objetivo, a partir do momento que o mesmo é publicado em revistas especializadas ou livros, etc. Dessa forma, o conhecimento fica disponível para que outros matemáticos o validem ou o refutem, fazendo novamente o ciclo entre conhecimento objetivo e subjetivo (ERNEST, 1991).

Para ele, a prova é algo essencial para o estabelecimento da verdade matemática. Necessária, porém, não é suficiente. Ela depende de que um grupo de profissionais a aceite e a use, além de fatores de segunda ordem, que são subjetivos a cada profissional e que influenciam o estabelecimento de novos conhecimentos matemáticos.

Eric Livingstone desenvolve seu argumento acerca das culturas de demonstração. Ele sugere que

> o surgimento da verdade necessária ou certeza absoluta na demonstração matemática (...) pode ser examinado como um fenômeno cultural e como um fenômeno gerado pelas

> mesmas práticas que sustentam essas práticas - ou seja, como um fenômeno que pertence a uma tribo particular, a tribo dos matemáticos provadores[6] de teoremas (LIVINGSTONE, 1999, p. 885).[7]

O estudo empírico: análise e síntese das entrevistas

Nossa análise constituiu-se no processo que foi da desconstrução do *corpus* do texto até a categorização das unidades e subunidades de análise construídas e consubstanciadas. A síntese foi a elaboração de um elenco de elementos potenciais para uma contribuição ao ensino do conteúdo em questão.

A desconstrução do *corpus* é um processo lento que foi realizado por meio de uma leitura criteriosa com o intuito de destacar os elementos constituintes e pormenorizar os limites de significados possíveis, mas não de forma absoluta e final. Moraes e Galiazzi afirmam que é "o próprio pesquisador quem decide em que medida fragmentará seus textos, podendo daí resultar unidades de análise de maior ou menor amplitude" (MORAES; GALIAZZI, 2007, p. 18).

Identificamos unidades de análise com características amplas, geradas por meio das perguntas comuns feitas a todos os professores, como, por exemplo, a pergunta "O que é saber o que é uma demonstração?", que pode caracterizar uma fala constituinte da unidade "noção geral quanto ao significado de demonstração".

A partir dos fragmentos de texto, escolhemos um termo que mais bem represente sua ideia central para que esse se torne uma subunidade de análise e que, então, possa ser estabelecido dentre as unidades de análise escolhidas. Cada subunidade é identificada por um código, de modo a organizar e tornar mais fácil sua identificação em outros fragmentos. Finalmente, os códigos são ordenados de acordo com as unidades.

---

[6] Tradução livre do termo "prover".

[7] Oferecemos o texto original ao leitor: "the appearance of necessary truth or absolute certainty in the mathematical demonstration (…) can be examined as a cultural phenomenon and as a phenomenon generated by the same practices that sustain those practices - that is, as a phenomenon belonging to a particular tribe, the tribe of mathematical theorem-provers.".

Vale ressaltar que a identificação das unidades de análise é um processo que tem por base o conhecimento referencial do pesquisador, consonante com os objetivos da pesquisa. Em nosso caso, a construção das unidades de análise se deu a partir do filtro teórico gerado pelos estudos histórico e filosófico.

Tomamos como pressuposto que a noção de demonstração está conectada à *epistemologia* de cada um dos professores entrevistados, pois é a exposição daquilo que o professor compreende acerca da natureza, da finalidade, do significado a respeito da noção das demonstrações no corpo da Matemática, ou seja, o que o professor tem para si do que é uma demonstração. Isso será destacado como *Aspectos Epistemológicos*.

Separamos a identificação dessa noção em dois destaques, aquele que chamamos de "Noções Gerais", em que o professor, em sua fala, define de forma objetiva o que ele acredita ser uma demonstração; e a "Noção quanto ao Papel e à Importância das demonstrações", na qual o professor emite um juízo de valor acerca do papel e da importância dessas no seio da Matemática e na formação do bacharel.

Em seguida, enunciamos as unidades de análise segundo as dificuldades de compreensão dos alunos identificadas pelos professores, as suas possíveis causas e como os professores acreditam que as mesmas podem ser superadas. Isso será destacado como *Aspectos de Aprendizagem e Ensino.*

Finalmente, mostramos as opiniões dos professores em relação ao questionamento sobre o fato de dever ou não existir diferença na abordagem das demonstrações nas habilitações de Licenciatura e Bacharelado no curso de Matemática.

Segue a lista das unidades de análise identificadas:

1. Noções gerais quanto ao significado de demonstração
2. Noção quanto ao papel e à importância das demonstrações
3. Dificuldades dos alunos em relação às demonstrações
4. Possíveis causas apontadas em relação às dificuldades dos alunos
5. A busca da superação das dificuldades
6. Abordagens para a Licenciatura e para o Bacharelado

Passemos agora à discussão de cada unidade, organizadas nos aspectos acima enunciados.

Aspectos Epistemológicos

Unidade 1

Unidade de Análise	*Noções Gerais Quanto ao Significado de Demonstração*
Subunidades de Análise	• Estrutura lógico-formal • Raciocínio lógico-formal • Justificativa formal • Retórica • Proficuidade

De acordo com as perspectivas filosóficas investigadas nos aspectos filosóficos, pudemos classificar e categorizar as noções gerais dos professores da seguinte forma:

• Perspectiva lógico-formal: lógico-formal e raciocínio;

• Perspectiva teórico-metodológica: aplicabilidade;

• Perspectiva retórica: justificativa e retórica.

A perspectiva mais enfatizada pelos entrevistados é a perspectiva lógico-formal, pois, a despeito de sua importância para o bacharel, saber o que é uma demonstração é ter o domínio da estrutura lógica. Esse fato corrobora a afirmação de Weber (2008) de que tal perspectiva formalista é tradicional, na qual uma prova pode ser vista como uma estrutura formal, cuja validade pode ser determinada a partir de convenções matemáticas e regras lógicas bem definidas e estáveis. O mesmo autor afirma que muitos matemáticos, filósofos e educadores matemáticos criticam essa concepção formal, porque eles acreditam que ela não condiz com a prática dos matemáticos.

Outra interpretação dessa visão tradicional é de que um argumento é considerado como uma prova se for possível escrevê-lo como uma prova formal na teoria axiomática dos conjuntos sem que suas características sejam perdidas, mesmo que permaneça em aberto a questão de como um matemático julga se um argumento pode ser reescrito dessa forma (WAGNER, 2002).

Na perspectiva teórico-metodológica, aquela em que uma prova pode não somente justificar outros conhecimentos, relacionados ou não às provas, mas elas também oferecem ferramentas, métodos, estratégias e conceitos, conforme descrito por Rav (1999) e Hanna e Barbeau (2008), um dos professores citou o exemplo da equação quadrática, contando como a prova da fórmula de Bhaskara poderia fornecer, por exemplo, a implementação e uso do método de completar quadrados. Nessa perspectiva, as provas fomentam o conhecimento matemático.

Por último, também foi encontrada a perspectiva retórica, em que as demonstrações são argumentos de convencimento de si mesmo ou de outro, de que um determinado argumento é válido.

Exemplos:

> "Bom, aí eu acho que é a estrutura mesmo, é a estrutura lógica que eu acho que é importante dominar, [...] é ter clareza do que é hipótese e o que é tese, de onde eu estou saindo onde que eu quero chegar, o que eu posso usar [...]." CI (Estrutura lógico-formal)
> "As demonstrações são a essência dos resultados matemáticos. Sem conhecer a demonstração é impossível aplicar de forma segura os resultados matemáticos, ainda que estes sejam conhecidos." CV (Proficuidade)

Unidade 2

Unidades de Análise	*Noção Quanto ao Papel e à Importância das Demonstrações*
Subunidades de Análise	• Essencialidade • Entendimento • Verdade • Referencial Teórico • Construção do conhecimento Matemático • Aplicação em outras áreas do conhecimento • Normas sociomatemáticas • Auxílio no raciocínio de forma geral • Papel teórico-metodológico • Formalização

Nessa unidade de análise encontramos diversas características que os professores atribuem às demonstrações, desde o fato de ser uma essência, uma condição *sine qua non* da Matemática, até o seu papel instrumental na compreensão de um assunto matemático.

Percebemos que alguns professores consideram a demonstração um objeto central e necessário para o matemático profissional, inclusive reduzindo todo o seu trabalho ao fato de "demonstrar teorema". A verdade também é um valor bastante citado, pois os resultados matemáticos sem demonstração são conjecturas que podem ou não ser verdadeiras. A prova garante sua verdade absoluta.

Destaca-se também o papel das demonstrações na construção do conhecimento matemático, em que são consideradas como o *modus operandi* que alicerça o desenvolvimento e o "funcionamento" dessa Ciência.

As provas também são uma espécie de norma sociomatemática, pela qual os resultados devem ser submetidos para terem uma validade asseverada. Weber (2003) vai mais além ao afirmar que essas normas estão impregnadas em livros-textos e comentários de professores, ou seja, em um ambiente de aprendizagem, e que elas determinam as crenças e os pensamentos subsequentes dos alunos. O autor comenta que pesquisadores acreditam que isso pode levar os estudantes a terem crenças indesejáveis a respeito do rigor e da prova.

Alguns professores crêem que as demonstrações sirvam para garantir todo o leque de aplicações que a Matemática permite no âmbito de outras Ciências, assim como as ideias contidas numa demonstração sirvam para uma aplicação dentro da própria Matemática.

Não só como uma espécie de formalização do pensamento matemático, as provas também são tidas como um tipo de raciocínio que torna mais fácil o entendimento de diversas outras coisas. É nesse sentido que um dos professores cita que as demonstrações agem como uma "chave no cérebro", que torna tudo mais facilmente compreensível.

Essa unidade representa qualificações que os professores entrevistados empregam para as demonstrações. O número de subunidades identificadas remete não somente ao fato dos professores atribuírem as mais diversas opiniões, mas também a tamanha importância que esses professores acreditam que a demonstração deva ter para um matemático profissional, um bacharel, e para um professor da Educação Básica, que deve saber justificar tudo o que ensina.

Exemplos:

> "Acho que ensinar sem demonstração é totalmente o oposto do que é Matemática." PI (Essencialidade)
> "Sem demonstração, temos uma conjectura: pode ser verdadeira ou não. Com a demonstração obtemos uma certeza." CIV (Verdade)
> "Em todos os resultados e na própria produção de um matemático, a demonstração faz parte da construção do conhecimento do matemático." CVI (Construção do conhecimento matemático)

Aspectos de Aprendizagem e Ensino

Unidade 3

Unidade de Análise	*Dificuldades dos Alunos com Relação às Demonstrações*
Subunidades de Análise	- Como começar uma demonstração - Estrutura lógico-formal - Dificuldades notacionais - Interpretação - Abstração - Organização das ideias - Necessidade da demonstração

Entre as mais citadas pelos professores, temos a dificuldade de começar ou ter a ideia inicial da demonstração e os erros com a estrutura lógico-formal. Pode existir uma relação entre "começar a demonstração" e as outras dificuldades citadas, pois se o aluno não consegue identificar os elementos da estrutura lógico-formal, ou se ele não consegue interpretar o enunciado do teorema, ele não conseguirá "começar" ou encontrar o encaminhamento cognitivo da estruturação demonstrativa.

A prova por absurdo oferece uma situação particular, uma vez que, mesmo sendo logicamente fundamentada, não é explicativa e direta, ou seja, ela não justifica o resultado demonstrado e, por isso, o aluno pode não ter facilidade ao tentar utilizá-la.

A dificuldade notacional identificada pelos professores não é exclusiva das demonstrações. Weber (2003) cita estudos em que menos de 10% dos sujeitos avaliados foram bem sucedidos ao fazer a tradução de afirmações matemáticas informais em linguagem de lógica predicativa. Já a dificuldade de interpretar o texto de uma proposição é exterior à Matemática, originada em outra área do saber do aluno, mas que reflete diretamente no entendimento matemático.

Exemplos:

> "Em geral é ter a ideia, saber como começar, aí, é o segredo de tudo." PI ("como começar a demonstração")
> "Eles também têm a dificuldade de sentir a necessidade de demonstrar aquilo que parece tão verdadeiro." PV (Necessidade da demonstração)

Unidade 4

Unidade de Análise	*Possíveis Causas Apontadas em Relação às Dificuldades dos Alunos*
Subunidades de Análise	• A demonstração é uma novidade • Falta de prática • Falta de bom senso do professor • Imediatismo • Negligência das teorias de prova • O ensino é tradicional • Falta de leitura e meios de comunicação • Dificuldade inerente e talento

Muitos professores indicaram o fato da demonstração ser uma novidade, pois a Matemática do Ensino Médio e Fundamental é basicamente "simbólica e cheia de fórmulas", sem explicações ou justificações, como uma das principais causas dos problemas que os alunos encontram no entendimento e realização das demonstrações.

Assim como as dificuldades, existem causas citadas que são exteriores à Matemática. Uma delas seria o imediatismo, a forma na qual as pessoas recebem todas as informações prontas e, por essa razão, não têm necessidade de uma reflexão mais profunda sobre o que se está fazendo. De forma semelhante, um professor citou que não somente os meios de comunicação, mas a falta de leitura colabora com as dificuldades em relação às demonstrações.

Um entrevistado assinalou que alguns professores não têm "bom senso" na escolha do conteúdo ministrado e insistem em provas que seriam desnecessárias naquele momento, irritando e afastando os alunos das demonstrações. A despeito de sua importância, consideram que não há necessidade de se provar tudo.

Em nossas expectativas, uma resposta inesperada foi a dos professores que citaram a dificuldade inerente e o talento. Nesse caso, a dificuldade é considerada nata, e talvez nada haja a se fazer a não ser se contentar com a limitação.

Exemplos:

> "Olha, eu vou ser sincera, eu acho que tem gente que tem uma dificuldade muito grande com isso [...].Eu acho que existem dificuldades inerentes, [...] não é todo mundo que serve para fazer tudo." CI (Dificuldade inerente)
> "Porque o aluno em geral chega aqui e, pelo menos no curso de Matemática, não vem com essa formação de demonstrar coisas. [...] o aluno não está habituado à demonstração." CIII (A demonstração é uma novidade)
> "Existe uma série de áreas dos fundamentos da Matemática negligenciada no ensino superior da Matemática no país: teoria de conjuntos, lógica matemática, teoria de prova, entre outras. Lastimosamente, essa negligência estende-se de forma intransigente a matemáticos formados de maneira bastante restrita no país; matemáticos que unicamente reconhecem áreas como análise, álgebra e geometria como centrais das ciências matemáticas." CV (Negligência das teorias de prova)

Unidade 5

Unidade de Análise	*A busca da superação das dificuldades*
Subunidades de Análise	- Prática - Situação de conflito - Exemplos - Incentivo - Experiência Matemática - Escrita e expressão - Abstração - Leitura - Estrutura lógico-formal e teorias de prova - Demonstrações na Educação Básica - Interpretação de texto - Desenvolver o talento

Grande parte dos entrevistados acredita que a prática, o trabalho com a demonstração, é a melhor forma de se conseguir superar as dificuldades, algo como aprender fazendo, simplesmente incentivando os alunos a tentarem construir demonstrações por si mesmos ou propondo algo como a "experiência matemática", citada por um professor.

A abordagem das provas por meio da "experiência matemática" é semelhante à proposta do *debate científico* de Alibert e Thomas (1991), que asseveram que

> Estabelecendo-se um ambiente no qual os estudantes podem ver e experimentar em primeira mão o que é necessário para que eles convençam outrem da verdade ou falsidade de proposições, a prova se torna um instrumento de valor pessoal que eles terão mais prazer em usar no futuro (ALIBERT; THOMAS, 1991, p. 230).[8]

[8] Oferecemos o texto original ao leitor: "By establishing an environment in which students may see and experience first-hand what is necessary for them to convince others, of the truth or falsehood of propositions, proof becomes an instrument of personal value which they will be happier to use in future."

Como resultado da aplicação da experiência do debate científico, temos o exemplo de uma disciplina de Análise Real, em que os alunos, enquanto o semestre progredia, iam reconhecendo a necessidade de definições mais precisas, argumentos mais claros e demonstrações como meio de decisão da validade dos resultados matemáticos. Num questionário final, 75% dos alunos disseram preferir o método do debate científico contra 10% que o rejeitou (ALIBERT apud WEBER, 2003).

Alguns professores expressaram a importância de ensinar a demonstração explicitando sua estrutura, dando a ideia do que é hipótese, do que é tese, das diferentes técnicas de provas, etc. Um dos docentes mantinha, inclusive, um caderno em que os alunos resolviam os exercícios e lhe entregavam periodicamente para que ele fizesse a correção, no qual os alunos deviam sempre explicitar a tese e a hipótese antes de realizar a demonstração solicitada.

Em conversas complementares às entrevistas, muitos dos docentes concordaram que, de forma adaptada e adequada, as demonstrações deveriam ser abordadas no ciclo de Educação Básica.

Exemplos:

> "Só tentando, é que nem ginástica, você só aprende, você só malha se você mesmo malhar." PI (Prática)
> "[...] eu acho que incentivar mais o hábito da leitura, eu acho que isso ajuda as pessoas a refletirem um pouco mais e a passarem a elaborar um pouco mais os seus raciocínios de dedução." CII (Leitura)
> "Muitos já têm o talento, tem o gosto pela Matemática. E isso tem que ser desenvolvido." PIII (Talento)

Unidade 6

Unidade de Análise	*Abordagens para a Licenciatura e para o Bacharelado*
Subunidades de Análise	- Igual - Diferente

A grande maioria dos professores entrevistados acredita que a abordagem das demonstrações deve ser igual para ambas as habilitações, mas há quem pense o contrário. Exemplos das duas opiniões:

> "[O licenciado] tem que saber tanto quanto o bacharel de demonstração, que tudo tem que ser demonstrado [...]. Se ele vai ensinar Matemática, ele tem que saber isso." PI (Igual)
> "Eu acho que o licenciado não precisa dominar tanto a arte de saber manipular as demonstrações. Ele tem que saber que o papel é importante, tem que saber fazer algumas, mas não precisa ser um mestre nessa arte. E o bacharel precisa." CI (Diferente)

Construção de uma síntese: o estabelecimento de um caminho

Como dissemos na introdução, partimos com a pergunta "(Como) Seria possível um ensino mais explícito das demonstrações a partir de um debate histórico-filosófico?", e com o desenvolvimento da pesquisa documental e da análise realizada dos dados das entrevistas, a pergunta central se desdobrou em "qual o papel das demonstrações na formação do Bacharel em Matemática?" e, ainda, "qual a relevância de um estudo histórico-filosófico acerca desse papel na formação inicial do bacharel".

As unidades de análise obtidas, respondendo tais questões, indicam a importância da presença de um debate histórico-filosófico que enriqueça o ensino das demonstrações e, ainda, uma re-significação das provas num nível mais abrangente, que vá além dos cursos de Licenciatura e da Educação Básica, como propôs Pietropaolo (2005), alcançando também os cursos de Bacharelado e os cursos nos quais sua relevância seja identificada.

Uma pesquisa internacional (BALACHEFF, 2008) apontou, recentemente, que não existe consenso entre os pesquisadores que se dedicam ao tema na Educação Matemática, e fazemos de sua sugestão a nossa, aplicada ao contexto brasileiro: há necessidade de um maior número de estudos relacionados ao tema, em que sejam buscados léxicos comuns a todos os envolvidos com o ensino e com a aprendizagem das demonstrações e que, caso isso não seja possível, as diferenças possam se tornar objetos de nova investigação.

Dos dados empíricos obtidos, sob um olhar quantitativo de frequência relativa, pudemos concluir, dentre outras coisas: que os professores, em sua maioria, consideram que as demonstrações têm um papel essencial para a Matemática; a perspectiva lógico-formal é a mais comum; que "começar a demonstração" é um problema para os alunos tão quanto a questão lógico-estrutural das demonstrações e que a melhor forma de superação é a prática.

O nosso foco é o ensino mais explícito, em que a demonstração deva ser ensinada por seus significados, objetivos e papéis nos âmbitos teórico-conceituais e culturais. Uma forma de alcançar tal objetivo é realizar uma abordagem histórico-filosófica, que seria uma primeira solução para: o entendimento do papel da demonstração para o conhecimento matemático e o reconhecimento axiológico que ela assume na estruturação desse conhecimento, e para o problema de "começar a demonstração", com o uso de sequências históricas que recuperem o caminho cognitivo das demonstrações.

Nosso objetivo não era apresentar uma abordagem possível, mas sim identificar elementos que possibilitassem a construção de propostas com essa abordagem. E nossos resultados mostram que esses elementos, aqui notadamente filosóficos e pedagógicos, caracterizam, justificam e explicitam de forma estrutural, conceitual, epistemológica, cultural e educacional a importância da demonstração e da matemática demonstrativa na formação do bacharel.

No entanto, tais elementos não têm sido incorporados explicitamente nas disciplinas da graduação em Matemática, uma vez que a maioria dos professores apresenta restritamente a perspectiva lógico-formal. É natural indicar a introdução das perspectivas retórica e social, de forma a diversificar as formas de raciocínio associados e enriquecer o debate teórico-conceitual presente no conhecimento matemático.

A falta desse repertório de recursos que um professor do nível superior deve possuir para lançar mão nas situações que os demandem, o faz se apegar ao ensino mecânico-repetitivo representado pela concepção do "conhecer pela prática". Uma forma que supera tal mecanicismo e que incorpora o exercício explicativo da "prática" é o uso do enfoque da negociação intersubjetiva professor-aluno e de exercícios que apliquem as várias formas de provas e demonstração, podendo inclusive envolver uma sequência histórica da obtenção dessas formas. Tais aspectos, oriundos de um enfoque epistemológico, irão, com os devidos cuidados didáticos, influenciar certamente as condições de criação de situações de aprendizagem e propiciar uma mudança positiva nos aspectos de ensino e de aprendizagem apresentados nas unidades de análise 3, 4, 5 e 6.

Vale ressaltar que, apesar de existirem muitos resultados positivos, um enfoque histórico-filosófico não é *a* panaceia, mas sim um enfoque possível e que, *ex aequo et bono*, tem seu lugar entre as mais diferentes vertentes que ocupam o núcleo das pesquisas em Educação Matemática. Reiteramos a importância dessa pesquisa, pois, a despeito do cenário de pesquisas internacionais acerca das demonstrações, pouco é debatido sobre esse tema e sobre a formação inicial do Bacharel em Matemática no Brasil.

Agradecimentos

Registramos nossos agradecimentos ao grupo IFHIECEM (http://www.uel.br/grupo-pesquisa/ifhiecem), no qual discutimos vários aspectos no percurso dessa pesquisa, de maneira especial, nas validações das questões das entrevistas; aos pesquisadores Keith Weber e Eric Livingstone, que gentilmente nos enviaram cópias dos artigos citados; à CAPES, pelo financiamento parcial da pesquisa; e aos pareceristas anônimos da revista Bolema, pelas sugestões que nos auxiliaram a complementar e aperfeiçoar o texto para nossos leitores.

Referências

ALIBERT, D.; THOMAS, M. Research on mathematical proof. In: TALL, D. (Org.). **Advanced Mathematical Thinking**. Kluwer: The Netherlands, 1991. p. 215-230.

BALACHEFF, N. Processus de preuve et situations de validation. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrechet, v. 18, p. 147–176, 1987.

BALACHEFF, N. The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. **ZDM Mathematics Education**, Heidelberg, v. 40, n. 3, p. 501–512, 2008.

BATISTA, I. L.. Reconstruções histórico-filosóficas e a pesquisa em Educação Científica e Matemática. In: NARDI, R. (Org.). **A pesquisa em Ensino de Ciências no Brasil:** alguns recortes. São Paulo: Escrituras, 2007. p. 257-272.

BICUDO, I. Demonstração em Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 15, n. 18, p. 79-90, 2002.

BOGDAN, R., BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Portugal: Porto Editora, 1994, 336p.

DA SILVA, J. J. A Demonstração Matemática da Perspectiva Lógica Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 15, n. 18, p. 68-78, 2002.

ERNEST, P. Nominalism and Conventionalism in Social Constructivism. **The Philosophy of Mathematics Education Journal**, Exeter, n. 19, p. 1-18, 2006. Disponível em < http://www.people.ex.ac.uk/PErnest/ >. Acesso em 19 set. 2007.

ERNEST, P. **The Philosophy of Mathematics Education**. London, New York, Philadelphia: The Falmer Press, 1991. 329 p.

GODINO, J. D.; RECIO, A. M. **Meaning of proofs in Mathematics education**. International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof: Maria-Alessandra Mariotti & Bettina Pedemonte (ed.), 1997. Disponível em <http://www.lettredelapreuve.it/Resumes/Godino/Godino97.html>. Acesso em: 8 Ago. 2008.

HANNA, G.; BARBEAU, E. Proofs as bearers of Mathematical Knowledge. **ZDM Mathematics Education**, Heidelberg, v.40, n. 3, p. 345-353, 2008.

HERSH, R. **What is Mathematics, Really?** Oxford: Oxford University Press, 1997. 368p.

KRAGH, H. **Introdução à Historiografia da Ciência**. Traduzido por Carlos G. Babo. Portugal: Porto Editora, 1987. 240 p.

LIVINGSTONE, E. Cultures of Proving. **Social Studies of Science**, Thousand Oaks, v. 29, n. 6, p. 867-888, 1999.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: E.P.U., 1986. 100p.

MACINTYRE, A. The mathematical significance of proof theory. **Philosophical Transactions:** Mathematical, Physical and Engineering Sciences (Royal Society), London, v. 363, n. 1835, p. 2419-2435, 2005.

MARIOTTI, M. A.; BALACHEFF, N. Introduction to the special issue on didactical and epistemological perspectives on mathematical proof. **ZDM Mathematics Education**, Heidelberg, v.40, n.3, p. 341-344, 2008.

MARTINS, L.A-C.P. História da Ciência: Objetos, métodos e problemas. **Ciência & Educação**, Bauru, v.11, n.2, p. 305-317, 2005.

MATTHEWS, M. R. História, Filosofia e Ensino de Ciências: a Tendência Atual de Reaproximação. Trad. por Claudia Mesquita de Andrade. **Caderno Catarinense de Ensino de Física**, Florianópolis, v. 12, n.3, p. 164-214, 1995.

MORAES, R., GALIAZZI, M. C. **Análise Textual Discursiva**. Ijuí: Ed. Unijuí, 2007, 223p.

PIETROPAOLO, R. C. **(Re)significar a Demonstração nos Currículos da Educação Básica e da Formação de Professores de Matemática**. 2005. 247f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), São Paulo, 2005.

RAV, Y. Why Do We Prove Theorems? **Philosophia Mathematica**, Oxford, v.7, n.3, p. 5-41, 1999.

TARSKI, A. Truth and Proof. **Scientific American**, New York, v. 220, n. 6, p. 63-77, 1969.

WAGNER, P. Qu'est-ce que La Théorie des Modèles? In: NOUVEL, P. (Org.). **Enquête sur le concept de modèle**. Paris: P.U.F. p. 7-28, 2002.

WEBER, K. Students' Difficulties with Proof. **The Mathematical Association of America**: research sampler, Washington, n. 8, sem número de página, 23 jun.2003. Disponível em <http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_8.html>. Acesso em: 17 jun. 2008.

WEBER, K. How Mathematicians Determine if an Argument is a Valid Proof**. Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 39, n. 4, p. 431-459, 2008.

Submetido em outubro de 2009
Aprovado em fevereiro de 2010