Bolema, Rio Claro (SP), v. 24, nº 38, p. 127 a 170, abril 2011 ISSN 0103-636X

Das Überraschende: Wittgenstein sobre o surpreendente em Matemática[1]

Das Überraschende: Wittgenstein on the Surprising in Mathematics

Juliet Floyd[2]

Resumo

Este ensaio argumenta que os conceitos de surpreendente, de interessante e a mudança do aspecto das coisas têm uma importância central, tanto para Wittgenstein quanto para a filosofia da matemática. Eles não precisam, sem perdas, ser psicologizados ou reduzidos para outros tipos de falar sobre a linguagem. Neste sentido, discuto Adam Smith, sobre o maravilhar, as observações de Wittgenstein sobre o teorema de Gödel em correspondência com Schlick e seus comentários sobre Hardy, e vários exemplos da história da matemática que se encaixam perfeitamente às idéias de Wittgenstein, incluindo a teoria dos quadrados latinos (envolvida no Sudoku, no famoso problema de Euler sobre os trinta e seis oficiais), que recebeu surpreendente rearticulação no decorrer do desenvolvimento da álgebra moderna e contemporânea. Estes exemplos evidenciam um sentimento perfeitamente em sintonia em que o surpreendente pode ser acomodado às

[1] Esta é uma versão revista de artigo já publicado. Ao fazer minha revisão, beneficiei-me de conversas com Avner Baz, Robert Briscoe, Robert Bowditch, Laurence Goldstein, Guevara Daniel, Jonathan Ellis, Kanamori Akihiro, Matthias Kross, Link Montgomery, Jean-Philippe Narboux, Schappacher Norbert, Peter Simons, Hartley Slater, Alan Thomas, Anja Weiberg e, especialmente, Felix Mühlhölzer (o ensaio inteiro está em dívida com Mühlhölzer (2002), que iniciou a discussão com a publicação do Apêndice III, sobre a surpresa, da RFMI de Wittgenstein. Audiências no Einstein Fórum, Potsdam, na Universidade de Kent, Canterbury e da Universidade de Chicago, bem como a conferência de 2006 na Universidade da Califórnia, Santa Cruz, sobre a filosofia da mente de Wittgenstein ofereceram críticas úteis. E na fase final de edição eu fui favorecida com o apoio muito generoso da Lichtenberg-Kolleg, Georg August Universität Göttingen. Agradeço a Kyle Robertson por corrigir um erro em um dos quadrados latinos durante a correção das provas do original.

[2] Juliet Floyd é professora de filosofia da Universidade de Boston, e-mail: jfloyd@bu.edu. Este texto foi traduzido por Mauro Lúcio Leitão Condé, professor associado na Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG, e-mail: mauro@fafich.ufmg.br, a partir da versão original: FLOYD, J. Das Überraschende: Wittgenstein on the Surprising in Mathematics. In: ELLIS, J; GUEVARA, D. (Eds.). Wittgenstein and the Philosophy of Mind. Oxford University Press. 2008.

nossas discussões sobre a matemática, sem forçar-nos a adotar quer seja o platonismo ou o anti-psicologismo de eliminação sobre os fenômenos em questão. A reestruturação conceitual envolvida aqui confirma a utilidade da abordagem de Wittgenstein para a investigação do surpreendente em matemática, que se recusa a interpretar essa noção como a descoberta de novos objetos ou fatos.

Palavras-chave: Wittgenstein. Filosofia da Matemática. Surpresa. Surpreendente.

Abstract

This essay argues that the concepts of the surprising, the interesting, and the change of aspect of things are centrally important, both for Wittgenstein and for the philosophy of mathematics. They need not be psychologized or reduced to other kinds of talk about language without loss. In this vein I discuss Adam Smith on wonder, Wittgenstein's remarks about Gödel's theorem in correspondence with Schlick and his remarks on Hardy, and several examples from the history of mathematics that fit nicely with Wittgenstein's ideas, including the theory of Latin Squares (involved in Sudoku, in Euler's famed problem concerning the thirty-six officers) which received surprising rearticulation in the course of the development of modern algebra and in contemporary discrete mathematics. These examples evince a perfectly good sense in which the surprising may be accommodated within our discussions of mathematics without forcing us to adopt either Platonism or eliminative anti-psychologism about the phenomena at issue. The conceptual reframings involved here confirm the usefulness of Wittgenstein's approach to the investigation of surprise in mathematics, which resists construing the notion as everywhere indicating the discovery of new objects or facts.

Keywords: Wittgenstein. Philosophy of Mathematics. Surprising.

I

É um fato incontroverso que a matemática, em parte, depende da surpresa, do inesperado, do confuso, do belo, e do iluminando para reter nosso interesse em praticá-la. A matemática, como Wittgenstein escreve, parece-nos uma mistura "multicolorida" em suas múltiplas aplicações e usos[3]. Seria este um fato meramente psicológico ou epistemologicamente relevante?

[3] RFM III 46: "Estou inclinado a dizer que a matemática é uma mistura colorida de técnicas de prova [*ein buntes Gemisch von Beweistechniken*] – E nisto se baseia a sua aplicabilidade múltipla e sua importância". De acordo com Mülhölzer (2006), rejeito a (influente) tradução de Anscombe de *"Bundes Gemisch"* por "colcha de retalhos": esta seria desnecessariamente negativa, conotações caóticas (como faz a tradução em francês, *"bigarrée"* (WITTGENSTEIN, 1983).

A consideração de como podemos experimentá-la desempenharia um papel nas discussões filosóficas dos fundamentos da matemática?

É notável quão relativamente tão pouco tenha sido escrito nos anos recentes sobre o papel crucial desempenhado na matemática pela nossa capacidade de sermos impressionados, ficarmos preocupados ou satisfeitos com quadros, diagramas, generalizações simbólicas e novas formas de estruturas conceituais e representacionais[4], e menos ainda sobre o tópico (que poderia discutivelmente ser chamado de) critério estético, que são importantes na determinação do que pode ser tomado como uma formulação de um problema interessante ou um conjunto canônico de axiomas para um ramo da matemática[5]. Essas lacunas são especialmente impressionantes quando se percebe, até mesmo como mostra um rápido olhar na história da matemática, que, entre matemáticos, termos como "surpreendente" e "bonito" são cruciais e bastante comuns.

O que eu quero sugerir, com uma pequena ajuda de certas passagens de Wittgenstein, é que estes marcadores da experiência matemática não podem ser julgados irrelevantes ou "não cognitivos" sem que haja perdas. Ainda que observações sobre nossas experiências matemáticas apresentem, como Frege advertiu, o perigo psicologista de confundir os fundamentos para um julgamento com seu contexto de descoberta. No que se segue, argumentarei

---

Talvez valha a pena notar que a observação (MS 122, p. 86r, 8 de janeiro de 1940) parece estar hesitante, com um ponto de interrogação adicionado na margem ao lado do sublinhado: Wittgenstein está lutando para formular uma linha de pensamento sobre a "falta de visão panorâmica" (*"unsurveyability"*) das provas nos *Principia Mathematica*, sem ficar plenamente satisfeito. Mülhölzer (2006a e 2006b), ambos no prelo, documenta com grande *insight* as formas em que Wittgenstein estava reagindo a Hilbert na RFM III, enfatizando que as provas matemáticas são *"überblickbar"*, *"übersehbar"*, ou *"übersichtlich"*. O tratamento adequado deste importante comentário e a questão da "visão panorâmica" ("*surveyability"*) da prova estão fora do escopo deste ensaio. Mühlholzer argumenta, curiosamente, que Wittgenstein não usa *"surveyability"* para significar "compreensão", mas sim algo "puramente formal". Aqui, talvez, em contrapartida, eu ligue a questão de ver o aspecto com a compreensão. Mas deve ser dito que defendo aqui duas idéias que estão de acordo com a interpretação de Mülhölzer da relação de Hilbert com Wittgenstein. 1. Wittgenstein *não* está exigindo que as provas sejam "tomadas" em um piscar de olhos. 2. A percepção do aspecto e a "visão panorâmica" ("*surveyability"*) estão relacionados a aplicações teóricas extra e intra-matemática (comparadas em Floyd, no prelo).

[4] Recentes exceções incluem Brown (1999), D. Barker-Plummer et.al (2002), Mancosu, Jøorgensen e S. Pedersen (2005), Grialou, Longo, Okada (2005) e Norman (2006). Wilson (2006) e Grosholz (2007) enfatizam a deriva conceitual e as ambigüidades produtivas envolvidas nos nossos aplicativos de diagramas e representações matemáticas.

[5] Putnam (1994), Rota (1997) e Kennedy (no prelo).

prioritariamente por ilustração tentando esclarecer algumas das observações de Wittgenstein sobre a matemática com exemplos vívidos e de fácil acesso.

Meu motivo ulterior é jogar luz em uma vertente temática nos escritos de Wittgenstein sobre filosofia e matemática da qual até mesmo a maioria dos seus intérpretes simpatizantes tem muito frequentemente evitado: seu interesse reincidente no reconhecimento de nossas observações sobre a percepção do aspecto, do mostrar e do dizer, do figurar e do ver ou fazer "avaliações". Tendo escrito por mais de uma década sobre as observações de Wittgenstein sobre a matemática, apenas recentemente[6] vim reconhecer que não há nenhuma possibilidade de fazer justiça interpretativa a estas observações como um todo sem considerar, de alguma maneira, a obsessão dele com o "tagarelar" [*Geschwätz*] que cerca a atividade matemática (RFM IV §27), a "matéria-prima"[7] ou "prosa"[8] que os matemáticos usam em sua atividade – o que se poderia chamar, informalmente, o intuitivo ou experimental, incluindo nossas expressões referentes a diagramas, provas-figuras, anotações, simbolismos, modelos geométricos assim como também outros modelos. Admitidamente, ele faz muitas críticas a apelos mentalísticos, intuições inexplicáveis ou estados mentais de intuições diretas. Articula estas críticas parcialmente pelo apelo ao famoso e amplo pensamento construtivista de que no algoritmo, explicitamente governado por regras, elementos da matemática humanamente calculáveis e controláveis (por exemplo, cálculos e provas), permanecem em seu núcleo como um objetivo prático, e não com suas características referenciais isoladas.

[6] Em trabalho anterior abordo a importância das metáforas figurativas e a percepção do aspecto para as observações de Wittgenstein sobre matemática e lógica.

[7] "Matéria prima": PI § 254. MS 124 p. 35 (em sua versão original) é dirigido a Hardy (1940), discutido abaixo, na parte III. Gerrard (1991) estabelece uma analogia útil entre a discussão de Wittgenstein sobre a citação de Agostinho nas PI e suas observações sobre Hardy (1940). Discutirei as observações de Wittgenstein sobre Hardy (1941), abaixo, na parte IV.

[8] "Prosa": PR. pp 324, 330, 335; PG 286, 269, 375 - 6; RFM V § 46, VII, § 41, cf. Wittgenstein a Schlick 13.7.1935, citado e discutido a seguir. Floyd (2001) e Floyd, no prelo, discutem a questão da "prosa" com maior alcance, tomando Wittgenstein para se referir às maneiras potencialmente enganosas de entendimento sobre a glosa, e apresentações de provas matemáticas e resultados (cf. MÜHLHÖLZER 2002). Mühlhölzer argumenta que a principal idéia de Wittgenstein na investigação da "prosa" em seus manuscritos não tende a ser tão geral, mas usualmente envolve uma rejeição mais específica da idéia de que a matemática envolve usos descritivos da linguagem ou consiste de proposições. Esta leitura restrita de "prosa" certamente ilumina as observações manuscritas citadas aqui, com a exceção, penso eu, da carta de Wittgenstein a Schlick, que interpreto abaixo, de forma mais geral, uma forma que eu tomo por estar visando a um ponto mais específico enfatizado por Mühlhölzer.

No entanto, para Wittgenstein (mesmo no *Tractatus*) a matemática envolve mais do que simplesmente as regras ou os cálculos: envolve uma variedade de métodos de prova e de argumentação e articulação, uma variedade de “máquinas” e formas de pensar que desenvolvemos e aplicamos a uma variedade de propósitos[9]. Wittgenstein está preocupado, portanto, em criticar concepções irrefletidas sobre o que as regras-em-si mesmas ou a provas padrões podem explicar, além de considerar nossas capacidades e atividades na sua aplicação. Assim, ele inclui na “prosa” em torno da matemática a “falta de visão panorâmica” (*unsurveyable*) das estruturas de prova formalizada nos *Principia Mathematica* (RFM V § 46, VII, § 41). E, na mesma linha, ele também, ao longo de sua vida, repetidamente revisitou a idéia de que em matemática (e em lógica e em filosofia) não há nenhuma surpresa genuína, verdades “profundas” ou fatos. Nessas áreas da atividade humana – diferentemente da cognição experimental, empírica ou perceptual – “processo e resultado são equivalentes”[10] isto é, o *processo* de calcular, provar, clarificar, definir, argumentar, ver ou comunicar são o que dão significado aos resultados (nos dizem o que os resultados *são*). Conhecer um resultado em matemática é ser capaz de vê-lo (retratá-lo, comunicá-lo) enquanto necessário, inevitável, não surpreendente no contexto da prova (cálculo, definição, método de argumentação, representação ou explicação)[11]. As formas de Wittgenstein enfatizar isso, suas observações do efeito da equação do processo e do resultado de que não existem resultados surpreendentes em matemática (ou lógica e filosofia) e que, em certo sentido, o objetivo da prova (padrão dedutivo ou investigação conceitual) é fazer a surpresa desaparecer, naturalmente, são duramente contra-intuitivas, dado o fato de que não estamos de modo algum logicamente oniscientes, dado o caráter aparentemente cognitivo ampliativo

[9] Sobre “maquinaria de prova” veja MS 117 p. 170 e MS 126, p. 127 (discutido abaixo). Quanto às aplicações da matemática e da percepção do aspecto no período pré-*Tractatus*, consulte Floyd, no prelo.

[10] “Processo e resultado são equivalentes”: MN (NB p. 114), NB 24.4.15, TLP 6.1261, PG p. 457, RFM I §§82,154, III §24, IV §50.

[11] Mühlhölzer (2006) enfatiza que por “visão panorâmica” da prova Wittgenstein significa que uma prova pode ser reproduzida, “com certeza e na forma em que nós reproduzimos imagens”. A metáfora da prova como uma imagem ou modelo (*Bild*) é, segundo creio, central para Wittgenstein nas RFM, forçando a falar da percepção do aspecto sobre ele.

de pelo menos algum raciocínio dedutivo[12]. Wittgenstein pretende, no entanto, desmascarar as contas enganosas da surpresa como algo "profundo" para colocar a sua profundidade filosófica em uma perspectiva adequada. Ele não está negando que certos assuntos interessantes podem estar escondidos, mas reformula nossas idéias sobre quais tipos de ocultamento e quais tipos de abertura e de revelações matemáticas, lógicas e filosóficas, em uma visão realista, pode haver[13].

E, assim, é significativo que comparações visuais e musicais, metáforas e investigações de expressões de perplexidade, surpresa, experiências de alterações em nossos conceitos e maneiras de ver estão espalhadas com freqüência crescente ao longo de os todos escritos de Wittgenstein, e nem sempre de forma a serem desmascaradas ou criticadas[14]. Mas o que estamos dizendo com isso?

É tentador concluir de certas observações que as alusões de Wittgenstein para o quê e como vemos, bem como suas investigações de provas-figuras e a percepção do aspecto, são principalmente dirigidas à visão (platônica e/ou quase-causal) que tenta apresentar explicações do significado e da objetividade da matemática a partir da mera existência de entidades abstratas, apreendidas por nós nas meras visualizações de significados, regras ou intuições *a priori*. Se isso é tudo o que há para dizer, porém, em seguida, a fala de Wittgenstein sobre o que vemos e como vemos e experimentamos é realmente apenas uma fala de transição, a ser criticada e, ao fim, descartada como irrelevante para uma caracterização adequada da matemática. Qualquer outra coisa pode parecer cair no risco do mentalismo psicologista ou na

---

[12] Duas discussões relevantes sobre as tensões nos debates sobre o caráter ampliativo ou não da dedução estão em Dummett (1978) e Dreben e Floyd (1991).

[13] Aqui refiro-me ao sentido de "realismo" discutido no ensaio de Diamond (1991), ou seja, um abrir de olhos, a atitude sóbria que é realista mais do que fantástica. Veja também Diamond (1997) para uma discussão de "realismo" e um paralelo entre o tratamento da matemática e da ética de Wittgenstein que me influenciou muito neste ensaio.

[14] É verdade que Wittgenstein é muitas vezes reflexivamente suspeito de seus próprios apelos para falar do aspecto (sobre a importância deste ponto geral, ver Baz, no prelo). No entanto, ele sempre volta a tratar do aspecto ao longo de sua vida, como se nunca conseguisse livrar-se do foco que tal tratamento requer. Um bom exemplo da ambivalência é RFM III, §§ 46-50, em que ele primeiro rejeita e, em seguida, reaplica a linguagem do aspecto, e ele primeiro aceita, e em seguida, rejeita a noção de "descoberta" de um aspecto. A distinção entre "descoberta" e "invenção" às vezes é importante para Wittgenstein, e às vezes não, com a mesma série de passagens ilustra. Para a discussão das falas de Wittgenstein dos aspectos e paradigmas, ver Floyd, no prelo, e Narboux, no prelo.

fenomenologia metafísica[15]. Se, contudo, as observações de Wittgenstein sobre ver, experimentar e inspecionar imagens e figuras são tomadas para serem intencionais visando a avançar um finitismo empiricista ou antropológico, é menos claro ainda como elas poderiam conseguir fazer isso de um modo convincente. Porque elas são amorfas, freqüentemente metafóricas e sem princípios, faltando-lhes qualquer base ou conteúdo epistemológico claros[16]. Além disso, as observações que mencionam a percepção do aspecto parecem ser precisamente dirigidas contra as visões empiristas tradicionais de como adquirimos e justificamos o nosso conhecimento da verdade e da necessidade aritmética, como já foi enfatizado pelas interpretações da Parte II, xi, das *Investigações Filosóficas* (BUDD, 1989, cap. III; MULHALL, 1990; GLOCK, 1996, p. 40)[17]. A lógica e a matemática forneceram a Wittgenstein úteis fundos de ressonância – talvez até mesmo essenciais – para o desenvolvimento de sua exposição sobre o aspecto da percepção[18]. Na Parte I das *Observações sobre os Fundamentos da Matemática* – em que há observações em primeira pessoa sobre aspectos do ver e sobre quebra-cabeças –, por exemplo, diante de uma série de críticas sobre o mito de uma experiência mediatamente dada ou uma representação do significado, o número e ou a necessidade lógica, o modo de argumentação difere fortemente do de Frege, mesmo que esteja em debito com Frege em suas críticas ao empirismo ingênuo e o psicologismo sobre o nosso conceito de número (sua crítica sobre dever existir uma idéia associada a cada palavra matemática considerada como uma unidade em si própria, sua rejeição dos números palavras como se referindo a idéias, e assim por diante)[19].

Sem negar que as críticas de Wittgenstein ao mentalismo são centrais e poderosas para a sua filosofia, gostaria de abordar uma alternativa, de forma

[15] Wright (2007, p. 490) enfatiza que a fenomenologia tem pouca esperança de responder às preocupações inspiradas, por exemplo, pela exploração de seguir a regra de Wittgenstein.

[16] Isto pode explicar porque os intérpretes têm repetidamente tentado fornecer essa base inspirada por Wittgenstein. Cf. Wright (1980, 1993), Marion (1998, 2009) estão corretos, acredito, tomando Wittgenstein como tendo uma forma solta e indeterminada de finitismo como um estilo da prática matemática ao invés do finitismo estrito do tipo abordado por Bernays, Wang e Kreisel e discutidos em Dummett (1959).

[17] No entanto há alguns que leram a visão de Wittgenstein como amplamente empirista e naturalista, por exemplo, Steiner (1996), que enfatiza as formas pelas quais podemos “endurecer” regularidades empíricas em regras de descrição como algo central à visão da matemática de Wittgenstein.

[18] Este é o meu argumento em Floyd, no prelo, onde destaco o tratamento precoce de Wittgenstein de probabilidade. Essa discussão deve ser comparada com Raïd (2009).

[19] Quão precisamente as RFM I estão de fato ligadas a Frege é uma questão interessante, que seria útil explorar.

mais construtiva, na interpretação que segue, ainda que apenas para afastar a idéia de que toda a força das considerações de Wittgenstein pode ser resumida essencialmente em uma linha negativa de pensamento. Sugiro que tomemos o foco de Wittgenstein em nossas respostas imediatas e expressivas às provas-figuras – sobre a nossa perplexidade, surpresa, frustração, prazer e nossas imediatas visualizações de experiências e suas descrições – nem como algo principalmente epistemológico ou verificacionista em sua intenção, nem total ou principalmente destinado a uma rejeição do platonismo ou do "privado", visão cartesiana da sensação. Em vez disso, proponho que (também) o consideremos como um foco lógico (gramatical), projetado para sofisticar e aprofundar nossa(s) concepção(ões) da expressão de conteúdos cognitivos ou pensamento na linguagem. Esta sugestão permite-nos ver estas observações como uma maneira (dentre outras) para rever e reinterpretar, tanto a concepção de Frege sobre o que o anti-psicologismo e anti-empirismo exigem, quanto a concepção de Russell sobre o que o empirismo pode explicar. A programática de Wittgenstein, a idéia construtiva, foi investigar, apurar e esclarecer filosoficamente, de modo despretensioso, a fala ingênua sobre interesses, expectativas e experiências em matemática (sua filosofia da "matéria prima"), voltando-se às lições filosóficas gerais decorrentes do exercício. A ideia é parcialmente programática, e foi aplicada diretamente, por exemplo, às observações dos matemáticos K. Gödel e G. H. Hardy, bem como a Frege e Russell (para saber mais sobre Hardy e Gödel, cf. III-IV, em seguida). Este foi um tema importante na evolução da filosofia wittgensteiniana precisamente porque Frege foi, para Wittgenstein, o mais poderoso filósofo a tentar retratar a experiência matemática, para a nossa compreensão da lógica e ou da aritmética, como uma mera coloração tonal distinta do sentido ou do conteúdo; e Russell foi o mais poderoso filósofo a ter tentado explicar essas experiências em termos causais ou psicológicos, em sua gramática como "puramente verbal" (RUSSELL, 1936). Trata-se da idéia de que aquilo que dizemos sobre "como" e "por que" certas coisas nos tocam e nos interessam pode, *a priori*, não ter qualquer significado cognitivo, mas *meramente* sensorial, estético, psicológico ou histórico, e isto constitui a meta de boa parte dos escritos de Wittgenstein sobre matemática. Este anti-não-cognitivismo (*anti-noncognitivism*) trabalha lado a lado com a sua rejeição da idéia (desde pelo menos 1929 em diante) de que a experiência humana (por exemplo, o espaço do campo visual) pode ser realizada para se ter uma determinada estrutura matemática. Há nesses escritos, penso eu, um esforço bastante claro visando a "desfazer a psicologização da psicologia" (como em CAVELL, 1976, p. 91), isto é, visando a desempericisar (*deempiricizing*) nossa fala sobre a experiência matemática de tal forma a evitar, seja na perspectiva de Frege ou Russel, a psicologização da experiência matemática. As observações de Wittgenstein voltam-se para a imagem do significado como algo vivo e, enquanto tal, para cada um de nós, um a um – como o empirista supõe –, vivo também naquilo que fazemos e dizemos um ao outro, no sabor de como fazemos demandas uns sobre os outros, na forma como reagimos, discriminamos e fazemos comparações à luz dessas experiências. Nossos interesses são revelados na forma como nós nos expressamos com conceitos e Wittgenstein está interessado no que nos interessa (PI cf. § 570, II do PV p. 46).

Não vou defender a idéia de que Wittgenstein transmitiu uma filosofia da matemática elaborada e sistemática, pois penso que ele não fez isso. Talvez faça sentido afirmar que o que ele fez foi apontar, sugestivamente, na direção de uma gama de formas específicas que falam da prática e da experiência matemáticas, e até mesmo falar de intuição. Pelo menos ele tinha razão em levantar uma série de questões sobre a idéia logicista que Frege e Russell refutaram como *a priori* irrelevante para a filosofia da aritmética. Seus comentários sobre a matemática voltam-se às características de nossas descrições e vocalizações das nossas experiências na descrição do que é a prática matemática, em gramaticizar o intuitivo. Já no *Tractatus* ele escreveu que "à questão se a intuição é necessária para a resolução de problemas matemáticos, a resposta é que a própria linguagem fornece a necessária intuição. O processo de cálculo traz esta intuição. O cálculo não é a experiência" (TLP 6,233 – 6,2331). Esta é uma crítica a Kant, de inspiração logicista, que mais tarde expressaria uma crítica à psicologia transcendental de Brouwer e à expressão de certa simpatia às preferências construtivistas de Brouwer, o que evidencia uma sugestiva mudança de pensamento – dos apelos filosóficos à intuição para a atividade do cálculo – que se manteve atraente para Wittgenstein ao longo de sua vida (Cf. TLP 6.211; KREMER, 2002). Mas existe uma vertente anti-logicista que destaco a seguir. Esta vertente não é deve ser identificada à insistência de Wittgenstein, contra Frege e Russell, quanto aos elementos lógicos em matemática serem meramente calculáveis. Pelo contrário, através da investigação particular de exemplos de provas, diagramas e notações em lógica e matemática, Wittgenstein está, no fundo, propondo um novo tipo de crítica dirigida aos nossos caminhos de interesse, apreciação e preocupação quando discutimos matemática na filosofia. Ele está avançando com base no pressuposto de que existem maneiras qualitativas de explorar a nossa fala, que há experiências e atividades na lógica e na matemática que são parte do ordinário, do cotidiano, do familiar e, portanto, que a fala pode ser repudiada, extraviada, desobedecida e incompreendida quando filosofamos. Isto não é para ser lido como uma obsessão de interpretar a linguagem em seu estado atual, mas como um convite para refinar nosso entendimento da nossa fala "bruta".

A surpresa não é simplesmente uma experiência, nem simplesmente uma atitude ou ponto de vista sobre o mundo – embora ela envolva e reflita elementos de cada um deles. Adam Smith tinha razão para distinguir entre maravilhamento, surpresa e admiração em sua história da filosofia. Wittgenstein aliou-se, como Smith, à idéia grega antiga de que a filosofia originou-se mais do maravilhamento que da surpresa, (cf. §§ 522ff PI), mas Wittgenstein nem sempre foi tão claro como Smith:

> Maravilha, surpresa e admiração, são palavras que, embora muitas vezes confundidas, denotam, na nossa língua, sentimentos que são de fato aliados, mas que também são diferentes em alguns aspectos e distintos um do outro. O que é novo e singular desperta esse sentimento que, em sentido estrito, é chamado de *Maravilha*; o que é inesperado, é chamado de *Surpresa*; e o que é grande e bonito de *Admiração*.
>
> Nós nos *maravilhamos* com todo objeto incomum e extraordinário, com todos os fenômenos raros da natureza, como meteoros, cometas, eclipses, plantas e animais singulares e, em suma, com todas as coisas de que antes tivemos pouco ou nenhum conhecimento; e nós ainda nos maravilhamos, e continuamos a nos maravilhar, embora

> prevenidos do que estamos a ver.
>
> Nós ficamos *surpresos* com aquelas coisas que já vimos muitas vezes, mas não esperamos encontrá-las no lugar em que a encontramos, ficamos surpresos com o repentino aparecimento de um amigo, a quem vimos milhares de vezes mas que não imaginávamos ver neste instante.
>
> Nós *admiramos* a beleza de uma planície ou a grandeza de uma montanha, ainda que já tenhamos visto ambas muitas vezes, e ainda que, para nós, nada de diferente nelas apareça, nada além do que já esperávamos nelas, com certeza, ver.
>
> [...] A surpresa, portanto, não deve ser considerada como uma emoção original de uma espécie distinta de todas as outras. A violenta e súbita mudança produzida a partir da mente, quando uma emoção de qualquer natureza lhe é trazida de repente, constitui toda a natureza da surpresa. (SMTH, 1795, p. 1).

Um dos pontos (gramaticais) de Smith é que, como o ceticismo, a surpresa não é tanto factível (respondendo à existência de alguma coisa) como reativa: ela coloca em jogo nossas capacidades discriminativa, cognitiva e avaliativa. Em matemática, chamar um determinado resultado de “surpreendente” pode expressar dúvidas, perplexidade, dificuldade de compreensão, prazer ou elogios, mas deve designar algo digno de nota[20]. Assim como o ceticismo, a surpresa não deve ser entendida em função apenas de ignorância ou da clara expectativa, mas também dos nossos interesses e necessidades, do que achamos que vale a pena ou não esperar.

Em matemática “surpreendente” é uma expressão de trabalho que pode ou não ser expressa impessoalmente. Sua função, no entanto, não deve ser reduzida à descrição de um determinado estado psicológico. Um olhar rápido sobre o papel do termo no uso corrente é suficiente para nos convencer disto. Um famoso matemático trabalha sobre um resultado, não pode prová-lo, e alguém o faz. O matemático, em seguida, escreve em um grande tratado

[20] Há muitos exemplos que poderiam ser recolhidos na correspondência de trabalho entre matemáticos, e eu recomendo ao leitor a coleta e a análise desses exemplos. Algumas instrutivas expressões de surpresa podem ser encontradas na correspondência de Gödel com Bernays (cf., em particular, Gödel (2003: 91-2)).

que a solução é "surpreendentemente simples" (ou "importante", "notável", "decisiva", ou talvez mesmo "incrível"), e os leitores repetem isso, baseados na autoridade. Depois disso os leitores não se surpreendem com a simplicidade, pois eles não tinham qualquer expectativa inicial, eles não tinham lutado com um problema cuja dificuldade havia sido intensificada por um ponto de vista anterior – isso ocorreria se eles pudessem trabalhar voltando ao contexto original do problema, e se deixassem ficar impressionados com o que era novo, mas que agora é desinteressante, trivial ou óbvio. Um matemático recentemente escreveu que "sem dúvida, muitas ocorrências da beleza na matemática, eventualmente, desaparecem ou caem na banalidade quando a matemática progride" e há verdade na idéia – uma das favoritas de Wittgenstein – de que parte do objetivo da matemática é fazer o que é intrigante ou surpreendente desaparecer na trivialidade (cf. ROTA, 1997, p. 175, MÜHLHOLZER, 2002). O que é transmitido por tais termos críticos não é o mero registro da experiência de uma pessoa, ou mesmo a percepção de um momento histórico na matemática, quando uma comunidade se orienta em uma nova direção. Eles também são experiências possíveis e matéria de juízo normativo. Neste sentido, a noção de surpresa vincula-se ao interesse e à importância do que fazemos, e por que fazemos: o que, em suma, a matemática é.

O trecho seguinte sobre Hobbes, encontrado em *Aubrey's lives*, nos permite saborear esses pontos.

> [Hobbes] tinha 40 anos quando conheceu a Geometria, o que aconteceu acidentalmente. Encontrando aberto na biblioteca os *Elementos* de Euclides, na proposição 47 do primeiro livro, ele a leu. Que inferno, disse! (ele jurou que desse momento em diante daria ênfase às coisas) *Isto é impossível!* Assim, ele lia a demonstração da proposição, que o remetia de volta a outra proposição já lida. Isto o remetia a outra (...) e, afinal, ele estava efusivamente convencido daquela verdade. Isto o fez apaixonar-se por Geometria.

Esta observação é repetida pelos historiadores da matemática (por exemplo, STILLWELL, 1989, p. 13), não tanto por seus interesses biográficos ou filosóficos (apesar ser de interessante nesses aspectos), mas por seu retrato de uma experiência paradigmática que é familiar. Os prazeres da surpresa no reino do necessário são distintos e amplamente conhecidos. Aqueles que trabalham com enigmas matemáticos nos jornais diários não estão focados na geração de verdades até então desconhecidas, mas no específico prazer do *divertimento* pela manhã.

Essa captura de nossa atenção é, em certo sentido, efêmera: a surpresa deve ser capaz de desaparecer completamente se ela é (gramaticalmente falando) capaz de aparecer (PI cf. §§ 133, 524), e ela está localizada na direção da sua atenção. Se cada passo na escrita de uma série aritmética elementar é "novo", "diferente" e "surpreendente" da mesma maneira, então, alguma coisa não está, como dizemos, dominada. Mas também não é correto dizer que, para dominar a seqüência geral, cada passo singular tem que ser visto como mundano e óbvio. O domínio desta natureza implica que somos capazes de desenhar os contrastes entre o interessante e o desinteressante, o informativo e o redundante, o notável e o óbvio. Assim como as observações de Wittgenstein, "se você for surpreendido [no resultado matemático], então você não deve ter entendido ainda (...) quando a surpresa vem a você no final de uma cadeia de inferência é apenas um sinal de que a falta de clareza ou algum mal-entendido permanece". (RFM I Gest. II, § 2). No entanto, a boa ordem dos sentimentos em relação à filosofia (e matemática) é seqüencial, na visão de Smith (e da tradição clássica), uma visão que estou usando para esclarecer as declarações de Wittgenstein. A seqüência correta é da surpresa ao maravilhamento e à admiração, não havendo nenhuma rota de fuga para a "boa" surpresa, sem surpresa. A *Surpresa* é inicialmente uma corrida[21] de perplexidade e confusão que se esvanece; o maravilhado pergunta: como isso é possível! E somente depois que se estabelece algum tipo de conexão, que

[21] Isto pode explicar a atração de psicólogos e filósofos pela surpresa como algo que pode ser investigado de forma causal, em termos de reações corporais. Como o riso ou o reflexo do medo, ela tem sido associada pelos filósofos (incluindo Wittgenstein) com o que é – pelo menos em alguns contextos meramente psicológicos ou corporais – quase-intencional e, na melhor das hipóteses, brutalmente reativo, parte de nossa natureza animal (cf. RFM I App. II, § 2 º, RPP, I, § 568). A literatura psicológica que tenho em mente visa a retratar a tapeçaria da emoção humana como se ela fosse tecida a partir de uma paleta finita de substratos emocionais universais (pelo menos sete emoções básicas, da qual a surpresa é uma delas), substratos espelhados na fisionomia muscular do rosto humano. Estes substratos são vistos como cognitivos e evoluídos, em grande parte automáticos e inconscientes, ao invés de convencionais ou culturais (EKMAN, 2003). Para uma discussão sobre o quase intencional estado psicológico do reflexo de medo e sua ligação ao conceito de surpresa, cf. Robinson (1995) e, mais criticamente, Shanker (1998), Shanker e Greenspan (2004).

se dá o sentido da razão específica para a discórdia ou confusão, é que surge a *admiração* ou a *apreciação* verdadeira do resultado que tinha de ser.

Em seu habitat natural, a surpresa inflige um selo peculiar sobre a intencionalidade humana que está saturada com os nossos valores, preocupações, preferências, escolhas e interesses, como nós os vemos agora. O que eu quero frisar é que não há nenhuma tese geral sobre o significado, a importância ou o conteúdo que possa mapear este conceito de forma legível. Tal como o chato, o trivial e o belo, o surpreendente é um fenômeno que concerne ao que vemos e assistimos *no* real do cotidiano: o local é primordial, ele reflete a nossa mudança de atenção quando destacamos particularidades e não a quando visamos a uma relação com o mundo como um todo. Posto de modo diferente, a surpresa exige algo específico, idiossincrático ou individual para fixar-se, o pequeno e ou o limitado é parte integrante daquilo que, gramaticalmente falando, ela é. (Isto talvez explique a atração de psicólogos e filósofos por esta noção como algo que pode ser investigado causalmente, em termos de reações corporais; como o riso, que há muito tempo tem sido associado pelos filósofos – incluindo Wittgenstein – com o que é, pelo menos em alguns contextos meramente psicológicos ou físicos, quase-intencional e, na melhor das hipóteses, brutalmente reativo, parte de nossa natureza animal) (cf. RFM I App. II §2, RPP I §568).

Se isso estiver certo, então a surpresa não é um conceito que possa subscrever qualquer explicação da existência independente da mente ou da realidade ontológica do eterno, do imutável, de entidades abstratas, nem qualquer teoria do caráter de dedução cognitivo ampliativo, somente porque não há nada *intrinsecamente* surpreendente. Digo isso porque o fenômeno da surpresa na matemática – a real dificuldade de aceitar uma prova que não se poderia esperar – foi por vezes apresentado como prova do espírito, da realidade transcendente dos objetos matemáticos. Mas um momento de reflexão deve mostrar que este apelo à fenomenologia de maneira nenhuma pode estabelecer ou refutar o realismo, e muito menos subscrever a idéia de que o matemático *é antes* um descobridor que um inventor. Um ficcionista em matemática pode certamente apontar para o fato de que as narrativas ficcionais e os personagens também nos afetam quando nos permitem olhar para as coisas de outra maneira, e não apenas para as coisas que pertencem propriamente ao mundo ficcional[22].

Aqui eu estou sugerindo uma mudança de ênfase ou complementação na forma usual de leitura do famoso apêndice de Wittgenstein sobre o "surpreendente" nas *Observações sobre os Fundamentos da Matemática* – uma amostra de observações que ele próprio, evidentemente, considerava tosca, porque a extirpou a partir da primeira versão das *Investigações Filosóficas*. Tem havido uma tendência compreensível entre os intérpretes em enfocar a relação dessas observações com o anti-platonismo, o compromisso de longa data de Wittgenstein ao caráter não descritivo da lógica, da matemática e da filosofia em contraste com a física, uma distinção que, ao longo da vida, ele tendeu a associar à frase "não existem surpresas" (cf. MÜHLHÖLZER, 2002). Nestas últimas observações ele não trabalhou totalmente livre desta linha de pensamento que ele associava explicitamente à idéia de que o matemático não é (meramente) um descobridor [*Entdecker*], mas também (um elogio de Wittgenstein) um inventor [*Erfinder*][23]. Mas em seus últimos escritos esta linha de pensamento é tomada em um contexto mais amplo no qual ele virá explorar sua coloração e tonalidade, suas conexões com o que chama explicitamente de questões "estéticas" e com a sua idéia de que pode haver a descoberta ou o achado de um novo aspecto das coisas em matemática (RFM I §167, App. II §2, II §38, IV §47). Nesta medida, ele

---

[22] Com o convencionalismo radical (passo a passo, estipulativo) é outra história. Como disse Dummett (1959) (que interpretou Wittgenstein como um convencionalista), uma prova não nos conduz à base de um "quer queira quer não", mas orienta e exige de nós. Este ponto fenomenológico não parece relevante para a posição convencionalista radical. Como Diamond (1991) argumenta, no entanto, Wittgenstein baseia-se no fato de que nós não simplesmente *escolhemos* ou *estipulamos* o que vai nos compelir ou atacar e, portanto, ele não é um convencionalista radical.

[23] Assim, há muita verdade na leitura destas observações oferecidas por Mühlholzer (2002), que toma a "conjectura" de Wittgenstein como afirmando que na matemática só há representação de fatos, e não intrinsecamente fatos surpreendentes – isto é dizer: só existem "fatos" cujo caráter surpreendente desaparece na "trivialidade", uma vez que eles são compreendidos (o trivial aqui é visto como a antítese do surpreendente). Gostaria de acrescentar a isto, no entanto, que a antítese do mistério secreto não precisa ser intrínseca trivialidade e que o uso comum (freqüente) que o matemático faz da palavra "trivial" não costuma significar, como acontece na vida cotidiana, "bobo", "chato", "desinteressante" ou "irrelevante", mas sim algo como "produzidos por todos que tenham o conhecimento exigido de matemática e que podem facilmente aplicá-lo" (tais usos aparecem em Rota (1997) e em Hardy (1940) e são citados neste ensaio). Mühlhölzer disse (em conversa, 2009) que ele enfatizaria mais a intenção terapêutica de Wittgenstein: pode-se esperar que cada sentença que nos surpreenda revele alguma coisa, mas isso pode não estar correto. Concordo com essa sugestão.

está interessado tanto na forma como falamos e no que fazemos com a surpresa quanto na negação do conceito em nossas discussões sobre matemática (cf. RFM I App. II, §§ 1-3,13). Ele, portanto, contrapõe a imagem da prática matemática, enquanto a descoberta de fatos incríveis ou surpreendentes ou mistérios, a uma imagem da matemática como uma prática que nos permite "ver o valor de uma linha de pensamento em seu trazer algo surpreendente para nós" (RFM I Apêndice II § 1º, cf. RFM II § 40). Minha tese é a de que Wittgenstein está interessado no que nos interessa e nos ocupa, e o que podemos dizer sobre isso, e, portanto, suas observações sobre a matemática – como suas observações sobre a percepção do aspecto em geral – são dedicadas a considerar nossos interesses e valores na discussão do que são nossas experiências de necessidade. É bastante claro que as articulações dos nossos interesses não podem ser deslocadas, mas o que eu quero considerar, no que se segue, é o modo como Wittgenstein, em sua melhor forma, considera essa articulação.

II

Permitam-me primeiro discutir um exemplo, extraído da combinatória finita[24]. Será importante para o que se segue que os temas epistemológicos e ontológicos comumente envolvidos com o finitismo não apareçam na minha descrição de por que esse exemplo é interessante: não preocuparei com a prova teórica do valor da informação de uma prova finitista ou "examinável" em relação a uma não-finitista ou menos compacta, por exemplo, nem com o contexto social da matemática, nem com as regras dedutivas de um determinado sistema lógico relevante – embora estas questões estejam nos escritos de Wittgenstein – mas apenas com o que é marcante, belo e interessante sobre as formas como a matemática pode permitir (e permite) uma mudança em

[24] Há razão para supor que Wittgenstein estudou a aritmética modular finita e suas aplicações. Uma alusão a isso pode ser encontrada em RFM VII, §§ 18-20. Não vou analisar aqui a questão de como princípios e/ou preferências restritivas de Wittgenstein pela matemática finitista e/ou computacional foram, deveriam ou poderiam ter sido. Devido ao forte compromisso de sua segunda filosofia com a complexidade e variedade dos elementos da prática lingüística (incluindo a matemática), parece-me perfeitamente imaginável que – inspirado por grandes excertos dos escritos de Wittgenstein – de possa desenvolver uma filosofia gramatical do infinito de inspiração wittgensteiniana que não seja fortemente revisionista da teoria dos conjuntos (compare Moore (1990) e Kanamori (2005)).

nosso modo de ver as coisas.

A maioria dos leitores deve ter ouvido falar de “Sudoku”, a “mania” que varreu os jornais europeus e norte-americanos nos últimos anos. Este estilo de quebra-cabeça foi importado do Japão como um passatempo popular, e pode ser jogado sem conhecermos matemática. Esses enigmas são resolvidos apenas com a lógica, embora, curiosamente, não haja palavras nele[25]. No entanto, os professores de matemática elementar ainda sabem ver o Sudoku como uma parte muito mais antiga da matemática, o estudo dos quadrados latinos.

O leitor pode tentar resolver o sudoku apresentado em seguida, preenchendo os quadros com os dígitos de 1 a 9 de tal forma que cada dígito ocorra exatamente uma única vez em cada linha e cada coluna da estrutura geral, e também uma única vez em cada um dos nove quadrados de 3 x 3 da estrutura que compõem o quadrado maior:

				8	3	4		
3					4	8	2	1
7								
		9	4		1		8	3
4	6		5		7	1		
1	2	5	3					9
		7	2	4				

Vamos agora considerar o contexto matemático mais amplo que conduz a uma análise deste jogo.

Para qualquer inteiro positivo n, um quadrado latino $L\ (i, j)$ pode ser definido como uma matriz $n \times n$ em que cada um dos símbolos 1,2, ... n

[25] Felix Mühlhölzer objetou em conversa pessoal que lógica, para Wittgenstein, tem a ver, sobretudo, com as formas das sentenças, e assim deve ter a ver com palavras. A resposta adequada a esta objeção está além do escopo do que eu possa escrever aqui. Talvez problemas de Sudoku sejam lógicos em um sentido mais amplo do termo. Mas eu tomo a idéia de esgotar todas as possibilidades como centrais para as suas soluções, bem como a própria idéia de lógica de Wittgenstein.

ocorrem exatamente uma vez em cada linha *i* e uma vez em cada coluna *j*. Existem apenas dois quadrados latinos de ordem 2:

1	2
2	1

2	1
1	2

Um problema de Sudoku é simplesmente completar um quadrado latino, parcialmente apresentado, de ordem 9, com a condição adicional de que as nove matrizes 3x3 que compõem a matriz 9 x 9 contenham cada um dos sinais de 1 até 9[26].

Para ficar com a terminologia do *Tractatus* de Wittgenstein, poderíamos dizer "sinal" e não "símbolo", quando definimos um quadrado latino. Não há, naturalmente, necessidade alguma no uso dos sinais de "1" a "9" neste jogo: poderíamos ter jogado com os sinais "*", "&", "^" ou palavras, cores ou letras. Provavelmente não refletimos sobre o fato contingente, mas significativo, de que a maioria de nós foi treinada para perceber rapidamente a distinção entre a ordem dos sinais numéricos com facilidade: é parte do (muito amplamente compartilhado) prazer deste jogo não nos forçar a recorrer ao conhecimento de palavras ou de matemática quando o jogamos. Assim, estamos aqui vendo os numerais (na melhor das hipóteses) como índices, e não como argumentos (cf. *Tractatus* 5.02), isto é, como sinais distintos arbitrários dentro de uma matriz quadrada maior, não como numerais indicando os números naturais ou formando qualquer parte de uma imagem da realidade matemática ou física. Estes sinais do Sudoku não contribuem em nada para qualquer proposição relativa à cardinalidade de conjuntos ou às propriedades dos números naturais.

A distinção entre "sinal" e "símbolo" refere-se ao modo como podemos distinguir e fazer as coisas, e não a uma percepção sensorial (empírica) direta ou literal ou à aparência na página, e nem explicada através da noção de uma representação interpretada ou projetada (muito menos mental)[27]. Isto é testemunhado pela famosa gravura de Dürer *Melancholia*. Nesta gravura, o

[26] Existe uma variante deste jogo de combinação chamado "Killer Sudoku" em que se deve acrescentar, nas séries preenchidas de quadrados, um determinado montante.

quadrado que Dürer inclui no canto superior direito consiste em uma matriz de números cuja soma dos elementos das linhas e colunas é igual – um "quadrado mágico"[28]. A matriz é retratada a partir da representação de Dürer, e assim é uma imagem-matriz, em vez de apenas um objeto matemático ou uma matriz *tout court*. Ela pertence, por assim dizer, a um mundo ficcional. No entanto, mesmo assim, ela não perde, por isso, sua característica matemática, pois nós podemos muito bem "ver o que é matematicamente essencial na figura" (RFM I, § 36 ss). A concepção empirista tradicional da experiência como um domínio do dado sensorial que nos leva a construir a realidade não parece se aplicar aqui, onde encontramos o que Wittgenstein chamou, em alusão crítica a um artigo de Russell de mesmo nome, "os limites do empirismo".

Albrecht Dürer: *Melencolia*, Kupferstich, 1514

Podemos sempre perguntar: dado qualquer quadrado latino particular, há outros quadrados latinos da mesma ordem? É muito simples gerar um

---

[27] A idéia de que a distinção sinal/símbolo pode ser compreendida observando que ela envolve a maneira pela qual podemos "ler" um sinal é, em um sentido descritivo, demasiado vaga, convidando a posições psicológicas mentalistas ou transcendentais de como o significado emerge. Confira Potter (2000, p. 165) sobre o tipo de indeterminação descritiva que me preocupa.

[28] Segundo a Wikipedia – onde a figura pode ser vista – o quadrado mágico de ordem 4 de Dürer "é considerado ser o primeiro na arte européia. É muito semelhante ao quadrado de Yang Hui, criado na China cerca de 250 anos antes da época de Dürer. A soma 34 pode ser encontrada nas linhas, colunas, diagonais, em cada um dos quadrantes, nos quatro quadrados centrais, nos quadrados do canto, os quatro números externos no sentido horário a partir dos cantos (3 +8 +14 +9) e, da mesma forma, nos quatro no sentido anti-horário (...) os dois conjuntos de quatro números simétricos (2 +8 +9 +15 e 3 +5 +12 +14) e a soma do meio das duas entradas das colunas e linhas exteriores (por exemplo, 5 +9 + 8 + 12), bem como vários quartetos em forma de pipa, por exemplo, 3 +5 +11 +15; os dois números no meio da linha de fundo dão a data da gravação: 1514".

quadrado latino *n* x *n* para cada *n* (digo “gerar” deliberadamente, pois este verbo atravessa a aparente divisão entre “descobrir” e “inventar”: com ele, processo e resultado são equivalentes, isto é, nenhuma maneira de encarar o que nós fazemos é privilegiada). A regra para geração para formar quadrados latinos é a seguinte: começar com a linha superior de 1 a *n* e iniciar cada uma das linhas seguintes com o segundo elemento da linha anterior. Nosso primeiro exemplo acima é cíclico, como é este, para *n* = 4:

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

O que devemos dizer se alguém não é capaz de ver o padrão *nesses* exemplos? E se alguém não vê que eles são suficientes para corrigir, não apenas uma forma canônica do quadrado latino cíclico para *n* = 4, mas também o *conceito* de “quadrado latino cíclico n”? Compare a observação de Wittgenstein de que “a generalidade na matemática não têm a particularidade na matemática da mesma forma como o geral para o particular em qualquer outro lugar” (RFM V § 25): a generalidade e a necessidade aqui podem ser informais, mas não são epistemologicamente menos fortes para isso (na verdade, como veremos, uma vez que passamos para uma definição mais geral, perdemos nosso foco neste conceito).

Outra forma rápida de gerar quadrados latinos de uma dada ordem é tomar uma permutação dos símbolos 1, ..., n e, por conseguinte, mudar o nome do quadrado[29]. Por exemplo, uma permutação tomando de 1 a 4, 2 a 1, 3 a 3 e 4 a 2, respectivamente, quando aplicada ao exemplo anterior, induz o seguinte quadrado latino:

No entanto, este quadrado latino, em certo sentido, é “essencialmente o mesmo” que o anterior, pois esses quadrados são isomorfos no que diz

4	1	3	2
1	3	2	4
3	2	4	1
2	4	1	3

[29] Digo “outro” caminho, mas o leitor será capaz de ver que os quadrados latinos cíclicos também são produzidos por permutações sistemáticas.

respeito à suas reorganizações estruturais. Como é comum em matemática, e como já foi enfatizado, os sinais em si não importam, mas importa como podemos desenhar e aplicar as relações de um com o outro.

Agora podemos perguntar: eles são essencialmente quadrados latinos diferentes (isto é, não-isomorfos em um sentido relevante) para uma dada ordem n? Para responder a esta questão não é suficiente usar a força bruta, isto é, anotar cada quadrado latino diferente de ordem 4, pois temos primeiro que perceber o sentido do conceito de ser "não-isomorfo em um sentido relevante" (isto porque cada quadrado latino de uma ordem dada é, em outro sentido puramente cardinal, estritamente isomorfo para cada outro dessa ordem).

Para refletir matematicamente sobre esta questão nós codificamos o conceito de diferença máxima entre dois quadrados latinos de mesma ordem (eles devem ser tão diferentes um do outro quanto possível). Uma maneira de visualizar essa variedade é imaginar sobreposições de um quadrado sobre o outro. Se nunca vemos mais do que um lugar da matriz em que cada um dos dígitos sobrepostos de 1 até n se combinam, então os quadrados são tão diferentes quanto podem ser. Por exemplo, para qualquer par escolhido dentre os seguintes da família de quadrados latinos, os dois quadrados diferem um do outro desta forma:

3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1
1	2	3	4

4	3	2	1
2	1	4	3
1	2	3	4
3	4	1	2

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

Chamamos dois quadrados latinos de ordem n, L_1 e L_2, ortogonais se, para cada par ordenado de números $<k, k_2>$ há apenas uma posição (i, j) para as quais $L_1 (i,j) = \mathrm{k}$ e $L_2 (i,j) = \mathrm{k}_2$. O grupo de quadrados latino acima é uma família ortogonal em que cada par de dois é ortogonal, não importa quais duplas sejam escolhidas.

Em 1781 Euler, o matemático mais importante do século XVIII, colocou o seguinte problema[30]. Dado trinta e seis oficiais de seis fileiras de seis diferentes regimentos, eles podem ser dispostos em um quadrado de tal forma que cada linha e cada coluna contenham um oficial de cada fileira e um

[30] Wittgenstein alude a um diagrama de Euler em sua discussão de Gödel na RFM VII, § 19 (cf. n. 22).

oficial de cada regimento?

Esta pergunta é colocada de modo direto, sem rodeios: não é necessário determinar novos conceitos fantasiosos, não há classes infinitamente grandes de objetos. Mas apesar da aparente simplicidade do problema, Euler não estava em condições de resolvê-lo ("Quando parece que (...), então o cuidado deve ser tomado", *Observações sobre os fundamentos da Matemática* II § 241). Cerca de um ano mais tarde, ele conjecturou que não havia nenhum par de quadrados para todos os quadrados de ordem *n* onde *n* é da forma *4m + 2* para algum número *m* (ou seja, 6, 10, 14, 18 ...).

Sabemos agora que não há solução para o problema de como organizar os trinta e seis oficiais. Bem mais de um século depois de Euler ter considerado o problema, G. Tarry, em 1900, verificou a conjectura de Euler para n = 6, realizando uma enumeração exaustiva de todos os possíveis quadrados latinos de ordem 6. Com este precedente, durante muitos anos acreditava-se amplamente que não havia, similarmente, nenhum par de quadrados latinos ortogonais de ordem 10, sendo considerado um obstáculo assustador a intratabilidade da enumeração exaustiva para uma ordem superior.

No entanto, de modo inesperado, em 1960, Bose, Parker e Shrikhande mostraram, por uma construção muito articulada, que para n = 10 e, na verdade, para qualquer $n = 4m + 2$ para $m > 1$, *há* um par de quadrados latinos ortogonais de ordem n. Assim a conjectura de Euler sobre o problema original dos trinta e seis oficiais é refutada para todo n, exceto n = 6. Agora podemos perguntar: existem quantos quadrados ortogonais mútuos para estes n? Até hoje não se sabe se existem ou não três quadrados latinos ortogonais mútuos de ordem 10.

Os problemas computacionais assustadores para os quadrados latinos dessas ordens estão em contraste flagrante com o grande progresso relativo a outras ordens que dependiam diretamente de desenvolvimentos matemáticos centrais da teoria algébrica dos números no século XIX. Aqui está uma bela aplicação da Teoria dos Corpos, permitindo-nos ver os quadrados latinos de uma maneira nova, e um sistema matemático *em* outro. A chave para ver a ligação entre o trabalho de Gauss na álgebra, o problema dos 36 oficiais de Euler e a teoria dos quadrados latinos é entender que nós podemos ver um quadrado latino como uma tabela, por exemplo, a do corpo Z_3 com a adição módulo 3:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Após uma área ter sido isolada com base em características puramente algébricas dos números reais, Galois construiu corpos finitos de cardinalidade pk para cada primo p e inteiro positivo k. Em geral, é um teorema que se p é primo e i, j e t são elementos não nulos de Zp, então a regra

$$\mathrm{L}t\ (i, j) = ti + j$$

define um quadrado latino L_t, e os quadrados latinos L_t e L_u são ortogonais quando t ‘“ u. Do estudo dos corpos finitos de Gauss, se n é um inteiro positivo maior que 2, p é primo e $n = pt$ para algum inteiro positivo t, então existem n - 1 quadrados latinos de ordem n que são pares ortogonais.

Agora podemos perguntar: quais os primeiros números n não maiores que 2 que não são potências de um primo? A resposta é: 6 (= 2 . 3) e 10 (= 2 . 5), ou seja, apenas as ordens dos quadrados latinos determinados por Euler. Em contrapartida, para 9 (= 3^2) é simples usar o corpo de Galois com 9 elementos para gerar 8 quadrados latinos ortogonais mútuos de ordem 9 (estes servem, suponho eu, como uma base parcial para gerar muitos problemas diferentes de Sudoku)[31].

Quando alguém encontra um quebra-cabeça de Sukoku pela primeira vez pode ficar bastante surpreso com o fato de a ordem do quadrado importar tanto. Mas depois de ter encontrado o processo de geração de Sudoku usando corpos finitos vê-se a situação com mais refinamento, não mais com base na enumeração exaustiva das possibilidades, mas pela maneira de pensar e calcular oferecidas pela Teoria dos Corpos (ver, por exemplo, Grimaldi (2004)).

[31] Este é um eufemismo. Desde que escrevi este artigo pela primeira vez, a matemática do Sudoku tornou-se um campo emergente de pesquisa.

Quando trazemos para a interpretação algébrica do problema a Teoria dos Corpos, as dificuldades que Euler encontrou para o caso de ordem 6 parecem ser muito diferentes da simplicidade do caso da ordem do primo 7 e das ordens das potências de primos 8 e 9. Isto contrasta com o terreno desconhecido da ordem 10. As diferenças no tratamento de distintas ordens teriam surpreendido o próprio Euler.

Se a estrutura de corpo nos oferece uma nova maneira de olhar o Sudoku, considerar o Sudoku no contexto da Teoria dos Corpos nos oferece também uma nova maneira de ver uma grande variedade de problemas empíricos – de um ponto de vista wittgensteiniano[32]. Há um ramo da matemática conhecido como *desenho de experimentos*, desenvolvido inicialmente em aplicações agrícolas, em 1920 – e ainda hoje ensinado como parte de um próspero e importante ramo da matemática –, no qual se aplica a teoria dos quadrados latinos a problemas como o dos 36 oficiais[33].

Suponha, por exemplo, que você tem n tipos diferentes de medicação que se deseja testar sobre n pacientes diferentes em combinação dupla. Pode-se ver este problema como algo que proporciona uma oportunidade para a aplicação do que acabamos de ver sobre os quadrados latinos e a ortogonalidade: o que é necessário é um "projeto de blocos combinados", dois quadrados latinos ortogonais de ordem n. Sabemos, do nosso breve estudo do problema de Euler, que se $n = 6$, não podemos resolver o problema diretamente ("não faz sentido"[34] resolvê-lo desta forma), mas que ele pode ser resolvido se n for inferior a 6 ou se for primo. Para $n = 4$, isto é, para quatro medicamentos 1, 2, 3, 4, e quatro pacientes A, B, C, D, nós sobrepomos dois, da nossa ordem de 4 quadrados ortogonais (que foram listados acima), para obter o quadro abaixo, sendo que cada elemento par da matriz (i, j) representa uma dosagem específica para um paciente específico em um mês específico.

[32] Matemática deve aparecer em trajes civis, isto é, em aplicações (RFM V § 2). Esta observação não é tanto para afirmar que a física não pode existir sem a matemática, trata-se apenas de um eco da filosofia logicista da matemática que ocorre quando Wittgenstein nos oferece uma revisão ou reinterpretação da demanda logicista de que a semântica dos numerais faz o sentido geral da aplicabilidade do número. Sobre a matemática não aplicada ver RFM I, § 167.

[33] A teoria do desenho de experimentos é tratada em grande detalhe, com muitos exemplos ilustrativos de usos reais dos chamados "desenhos em blocos", em Roberts (1984).

[34] "Não faz sentido" não é apenas jargão do filósofo, mas, junto a outras terminologias tais como "adequado" e "bom" e "o que queremos", pode ser encontrado em toda a apresentação usual da teoria do desenho de experimentos. Cf. Roberts (1984), capítulo 9.

	Mês 1	Mês 2	Mês 3	Mês 4
A	(1,4)	(2,1)	(3,2)	(4,3)
B	(2,3)	(1,2)	(4,1)	(3,4)
C	(3,1)	(4,4)	(1,3)	(2,2)
D	(4,2)	(3,3)	(2,4)	(1,1)

Idiossincrasias destes quatro indivíduos e a ordem de dosagem são assumidas como irrelevantes neste delineamento de blocos. Cada combinação específica de drogas será administrada duas vezes, para dois indivíduos diferentes e, assim, controlam-se as idiossincrasias do indivíduo. Isso não significa que nós controlamos todos os fatores (possivelmente relevantes), ou que não se poderia projetar outro experimento que teria um melhor controle para esses mesmos fatores, se for o caso (talvez ao longo de centenas de ensaios). Isso mostra que a adequação de cada delineamento de bloco está sujeita a uma forma restrita de ver o problema que se pretende resolver. Ela também mostra que a ética – de valor e interesse – formatam a engenharia e os problemas experimentais.

O que filosoficamente importa aqui é nós podermos fazer e moldar o curso da nossa experiência – o teste dos efeitos da dose em si – optando por organizar as nossas experiências em termos da teoria dos quadrados latinos. Isto não é considerar que "calcular, se é para ser prático, deve ser fundamentado em fatos empíricos", mas é permitir que tabelas e cálculos determinem "o que os fatos empíricos *são*", para usar a frase de Wittgenstein (RFM VII, §§ 18-20)[35]. E, de fato, a teoria dos quadrados latinos tem sido usada para testar de fertilizantes a próteses, passando por pneus e freios.

[35] Nessa passagem, Wittgenstein discute um fenômeno bastante análogo de aplicação em conexão com um diagrama usado para representar o problema de encontrar o número de caminhos que alguém pode traçar em cada junta, em uma parede, de forma contínua e sem repetição. Esta é uma versão do famoso problema das sete pontes de Königsberg, que Euler também estudou. Ou seja, é possível encontrar uma via que atravesse todas as sete pontes de Königsberg, sem atravessar qualquer uma delas duas vezes? Este problema estimulou Euler a investigar o que agora é conhecido como sendo os grafos de Euler, objetos estudados até hoje como parte da teoria matemática dos grafos, um assunto vasto que começou com o problema das sete pontes (a idéia de Wittgenstein nas RFM é conectar este exemplo de mudança do aspecto de uma situação ao tipo de "auto-referência" no trabalho sobre a sentença indecidível de Gödel, tratando assim o Teorema de Gödel - reconhecidamente finitista - como uma peça de aritmética aplicada que muda nossa maneira de *ver* uma dada fórmula na linguagem dos *Principia Mathematica*). Wright (1980) associa a discussão de Wittgenstein sobre as juntas na parede a uma espécie de convencionalismo sobre a verdade matemática – que ele vincula ao ceticismo de seguir regras –, uma visão segundo a qual as únicas necessidades lógicas existentes são aquelas reconhecidas pelos humanos de forma explícita. Espero ter dito o suficiente para questionar se esta é a única perspectiva capaz de dar sentido à observação de Wittgenstein. Para uma discussão mais aprofundada ver Mühlholzer (1997).

O problema de Euler dos trinta e seis oficiais é um belo exemplo de um problema fácil de enunciar mas surpreendentemente difícil de resolver. Também é um belo exemplo de um tipo de solução surpreendentemente simples (por enumeração bruta) para um problema que parecia ser muito complicado de lidar precisamente porque foi incorporado no contexto da álgebra superior. É, enfim, um belo exemplo de um caso em que a existência ou inexistência de determinados objetos (em um sentido universalmente aplicável de objeto) nem o contexto semântico dos termos tem interesse primordial para nós. Em vez disso, o que nos interessa é que a nossa *maneira de olhar certas situações* – tanto empírica quanto matematicamente – *é alterada*, e torna-se mais interessante.

III

Eu quero, a seguir, analisar uma passagem do *A Apologia do Matemático*, do grande teórico do número G. H. Hardy, um livro que Wittgenstein conheceu[36]. Em sua *Apologia*, Hardy foi tão longe que considerou a distinção entre a "matemática real" e o xadrez residindo no fato de que na matemática "real" "há um elevado grau de imprevisibilidade, combinado com inevitabilidade e economia" (HARDY, 1940, p. 113). Hardy foi criticado por fazer esta observação sobre a surpresa (ROTA, 1997, p. 172), mas não por Wittgenstein[37]. Citarei, abaixo, a passagem na íntegra, pois ela constitui exatamente o tipo de "matéria prima" para a filosofia que interessava Wittgenstein (cf. PG: 396, PI § 254).

As questões que regem a *Apologia* de Hardy são, em suas palavras,

[36] Hardy (1940) é mencionado no MS 124, p. 35 – um rascunho da observação para PI § 254 – no qual Wittgenstein escreve: "as sentenças que Hardy apresenta como expressão de sua filosofia da matemática, em seu miserável livro *Apology of a Mathematician*, não é de modo algum filosofia, mas poderiam ser concebidas – como todos os desabafos do tipo – como matéria-prima do filosofar". Hardy tinha sido, com Moore, o examinador do *fellowship* de Wittgenstein no *Trinity* (MONK, 1990, p. 304); compare King (1984, p. 73) para o testemunho de que Wittgenstein se reuniria com Hardy.

[37] Wittgenstein fez observações críticas sobre o artigo "*Mathematical Proof*" de Hardy (ver AWL e LFM). Ele também escreveu muitas observações decorrentes de suas reações ao *Coursebook in Pure Mathematics* de Hardy (cf. WITTGENSTEIN, 2000), algumas retiradas de suas anotações de sua própria cópia (a edição de 1941) deste livro. Para fotografias de algumas das páginas, ver o volume de Introdução ao *Wiener Ausgabe*.

"Por que realmente vale a pena fazer um estudo sério da matemática?" E "Qual é propriamente a justificação da vida de um matemático?" (1940, p. 65). Assim, neste trabalho, ele visa dar conta do que dá, em última instância, vida à matemática e qual o significado de sua morte, não meramente como um assunto científico, mas como um exercício para o qual ele e outros dedicaram as melhores partes de suas vidas. O objetivo de Hardy (1940, p. 66) é "justificar" sua "existência" e a "existência" de outros matemáticos.

O importante é que ele sublinha, neste contexto, não a realidade dura, mas a beleza e o valor estético da matemática como sua característica interessante:

> Há ainda um ponto que continua ao longo do § 11, onde comecei a comparação entre a "matemática real" e o xadrez. Podemos tomar como certo agora que, em substância, a seriedade, o significado, a vantagem do teorema matemático real é esmagadora. É quase que igualmente óbvio, para uma inteligência treinada, que há também uma grande vantagem na beleza. Contudo, esta vantagem é muito mais difícil de definir ou localizar, uma vez que o *principal* defeito do problema do xadrez é claramente a sua "trivialidade", e o contraste a esse respeito mistura e perturba qualquer julgamento mais puramente estético. Quais qualidades "puramente estéticas" podemos distinguir em tais teoremas, como os de Euclides e Pitágoras? Eu não vou arriscar mais do que algumas observações desarticuladas.
>
> Em ambos os teoremas (e nos teoremas, claro, eu incluo as provas), há um elevado grau de imprevisibilidade, combinado com inevitabilidade e economia. Embora os argumentos tenham uma forma tão estranha e surpreendente; as armas usadas pareçam tão infantilmente simples quando comparadas com os resultados de grande alcance, não há como escapar das conclusões. Não há complicações de pormenor – uma linha de ataque é suficiente, em cada caso, e isso é verdade também para as provas de muitos teoremas muito mais difíceis, a apreciação plena do que exige um nível bastante elevado de competência técnica. Nós não queremos muitas "variações" na prova de um teorema matemático: "enumeração de casos", na verdade, é uma das formas mais maçantes de argumentação matemática. A prova matemática deve se parecer com uma constelação simples e de recorte claro, e

> não um conjunto disperso na Via Láctea.
> Um problema de xadrez também apresenta algo inesperado, certa economia, é essencial que os movimentos sejam surpreendentes e que cada peça no tabuleiro deva desempenhar o seu papel. Mas o efeito estético é cumulativo. É essencial também (a menos que o problema seja simples demais para ser realmente divertido) que o movimento chave deva ser seguido por um bom número de variações, cada uma exigindo sua resposta individual. “Se P-B5 então KT-R6; se ... então ...; se .... então ...” – O efeito seria fraco se não houvesse um bom número de respostas diferentes. Tudo isso é genuína matemática, e tem seus méritos; mas isso apenas “prova por enumeração de casos” (e de casos que não são, na realidade, profundamente diferentes de todos os outros) [nota: Acredito que, agora, isso é olhado como um mérito num problema e que deve haver muitas variações do mesmo tipo], o que um verdadeiro matemático tende a desprezar.
>
> Estou inclinado a pensar que eu poderia reforçar o meu argumento apelando para os sentimentos dos próprios jogadores de xadrez. Certamente, um mestre de xadrez, um jogador de grandes jogos e grandes partidas, no fundo, despreza uma arte puramente matemática para solucionar problemas. Ele tem habilidades consideráveis nesta área e pode mobilizá-las em caso de emergência: “Se ele tivesse feito tal e tal movimento, então eu teria feito tais e tais, uma combinação vencedora em mente”. Mas o “grande jogo” de xadrez é principalmente psicológico, um conflito entre duas inteligências treinadas, e não um mero conjunto de pequenos teoremas matemáticos (HARD, 1940, p. 112-113).

Nem a correspondência da matemática a uma “realidade” superior nem sua utilidade cognitiva são mencionadas aqui, ainda que Hardy as pressuponha. Ele está, afinal, tentando caracterizar não a lógica ou o conteúdo ou a utilidade da matemática como uma ciência, mas sua importância fundamental como um ideal humano, um modo de vida.

Nesse sentido, Hardy fala sobre a questão que distingue a teoria dos números (o “real”, o “sério” na matemática, como ele os perseguiu em sua vida como matemático) do xadrez. Ao chamar “o grande jogo” de xadrez algo "fundamentalmente psicológico", Hardy separa algo que ele considera ser de maior valor intelectual (e estético).

A atitude de Hardy reflete a cultura comum do matemático profissional, segundo a qual a computação básica e a enumeração de casos por força bruta não são consideradas as partes mais importantes da matemática, mas sim, na melhor das hipóteses, uma ocupação relativamente desinteressante. Ele menciona a tendência (bastante comum) do matemático para o hábito da visão panorâmica e a apresentação "clara" de uma constelação de provas que, normalmente, envolvem outras coisas que não a enumeração. Por outro lado, Hardy (1940, p. 86ss) não nega ao xadrez seu significado matemático: ele mesmo apela, em certas passagens da *Apologia*, à popularidade de enigmas matemáticos para defender a idéia da matemática como uma prática de reconhecido interesse e valor intelectual intrínsecos.

Indiretamente Hardy também está reagindo à influência do formalismo (de Hilbert) sobre a filosofia da matemática de sua época. O coração do programa de Hilbert foi muitas vezes apresentado em termos de uma analogia entre o xadrez e a aritmética. Em seus escritos pós-1929, Wittgenstein freqüentemente investiga essa comparação, embora sem tomar partido, como Hardy o faz[38].

As observações de Wittgenstein sobre a matemática têm sido freqüentemente explicadas, em grupo, como a primeira e principal crítica à Hardy, direcionadas contra as observações feitas por Hardy sobre a "realidade matemática" – como se o anti-realismo ou anti-platonismo nos dessem o impulso primário de suas observações sobre a matemática. Rejeitando a metafísica platônica acrítica, Wittgenstein teria proposto um "cálculo" de concepção, segundo o qual a matemática é constituída por "técnicas", em oposição às verdades (GERRARD, 1990, MONK, 1990, p. 339ss), ou talvez um tipo de anti-realismo voltado para o ceticismo sobre a real aplicabilidade da nossa noção de seguir uma regra (FOGELIN, 1987; WRIGHT, 1980; KRIPKE, 1981).

Espero ter demonstrado, até agora, que existe outra dimensão, completamente distinta, tanto para a matemática quanto para as observações

[38] Sobre as reações de Wittgenstein a Hilbert, Mühlhölzer (2006) observa que o aparecimento precoce da noção de Wittgenstein de "visão panorâmica" em conexão com a prova em matemática atribui a distinção entre o finito e o infinito, em BT p. 484.

de Wittgenstein sobre lógica e matemática que é importante salientar. Esta dimensão é enfatizada bastante explicitamente numa passagem da *Apologia* de Hardy (1940, p. 88). Ele aponta para o interesse intrínseco, a beleza da matemática, a sua capacidade de nos dar um distinto tipo de “pontapé” intelectual, de nos cativar, surpreender e interessar. *Isto*, diz ele, não é *meramente* psicológico, mas algo mais. E esse algo não é meramente instrumental ou prático (que se tem que fazer, por exemplo, como a utilidade das aplicações da matemática na física)[39]. Ao contrário, é “puramente estética”. Como Moore no *Principia Ethica*, e até certo ponto também como Wittgenstein (embora tenhamos mais a dizer sobre isso), Hardy está tratando o bem último da matemática como um bem em si mesmo, não sujeito à defesa naturalista ou instrumental, mas assunto mais próximo a uma apreciação estética[40].

Não é preciso concordar com o uso que Hardy faz das expressões “meramente psicológico” e “puramente estético” (ou mesmo com a sua avaliação comparativa entre o xadrez e a matemática “séria”) para encontrar essa dimensão de interesse. Temos apenas que comparar e contrastar a dependência de Hardy quanto aos fenômenos do inesperado na distinção entre a matemática e um jogo com, por exemplo, Frege, quando este enfrenta a questão sobre o que distingue os significados da “real” aritmética e do xadrez.

Em seu *Grundgesetze der Arithmetik* § 91 Frege escreveu:

> Por que nenhuma aplicação de uma configuração de peças de xadrez pode ser feita? Obviamente porque ela não expressa nenhum pensamento. Se ela assim o fizesse e cada movimento do xadrez, em conformidade com as regras, correspondesse a uma transição de um pensamento para outro, as aplicações do xadrez também seriam concebíveis. Por que as equações aritméticas podem ser aplicadas? Só porque elas expressam pensamentos. Como poderíamos aplicar uma equação que não expressa nada e que não é nada mais que um grupo de figuras, para ser transformado

[39] Na verdade, Hardy explicitamente se preocupa com os perigos dessas aplicações no domínio da tecnologia.

[40] No MS 119 p. 88 v, quando ele está discutindo uma observação de Hardy quanto às considerações de Wittgenstein sobre a “peculiar similaridade entre as investigações na filosofia (talvez especialmente na matemática) e as investigações estéticas, por exemplo, o que há de errado com este vestido, como ele era etc”.

> em outro grupo de figuras, de acordo com determinadas regras? É a aplicabilidade, apenas ela, que eleva a aritmética de um jogo ao nível de uma ciência. Assim a aplicabilidade necessariamente pertence à aritmética (FREGE, 1980, p. 167).

Para Frege, até os matemáticos terem filosoficamente claro o que está errado com a visão de que os números são apenas contadores em um jogo, como peças de xadrez, não pode haver verdadeira ciência da aritmética. O que faz a aritmética "séria" e de valor, para Frege, é sua "elevação à categoria de uma ciência", uma atividade cujo objetivo principal é a verdade. Isto pressupõe que a aritmética expressa pensamentos (*Gedanke*), o tipo de sentido (*Sinn*) que, para Frege, pode ser reconhecido ou negado em asserções. E a elevação da aritmética ao nível de uma ciência é garantida, na opinião de Frege, por sua compreensão da aplicabilidade universal da aritmética, sua análise logicista que sistematiza o papel dos números palavras de descrições de situações, isto é, nos chamados contextos "mistos" (contextos tais como "há cinco ameixas em cima da mesa") e também em declarações ordinárias da aritmética pura. Em ambos os contextos Frege vê os numerais funcionarem como nomes de objetos.

Na verdade, por meio de sua derivação dos axiomas da aritmética de Dedekind-Peano a partir das leis fundamentais da lógica, Frege considera ter provado que os números são objetos puramente lógicos. E assim Frege considera ter refutado o formalismo – o tipo de formalismo que vê na aritmética nada além de cálculos interpretados, nada a não ser um movimento de figuras análogas às do xadrez, demonstrando como a aplicabilidade universal "necessariamente pertence" à aritmética. O que os filósofos rotularam de "inevitabilidade" ou "necessidade" da verdade matemática está, portanto, alojado, de acordo com Frege, na generalidade máxima da lógica. Como Moore e Russell, Frege afirma que o sentido da "necessidade" ou "inevitabilidade" que nós experimentamos ao fazer aritmética (nossa falha, por exemplo, em sermos capazes de imaginar que dois grãos de feijão mais dois são cinco), é algo meramente psicológico, ou, se lógico, redutível à generalidade.

Desde muito cedo em sua vida, Wittgenstein entendeu que uma chave para a compreensão da natureza da lógica e da matemática exigiria necessariamente recorrer a uma concepção adequada de necessidade e possibilidade, que não pode nem ser julgada como psicológica nem reduzida aos termos da generalidade, como entendido pelos quantificadores. Ele considerava a rejeição logicista de Frege (e Russell) dos conceitos de possibilidade e necessidade (ou seja, a sua suposta redução do conteúdo lógico dessas noções para a rubrica de generalidade) como filosoficamente fatal. O problema que enfrentou foi como revitalizar as noções de necessidade e possibilidade em face de sua redução psicologista, mantendo a adesão à idéia (kantiana) de que o valor das modalidades reside apenas na sua relação com a nossa forma humana de julgamento, e não em sua realidade metafísica última na aplicação às coisas em si mesmas. Ele tentou encontrar uma maneira de ver e discutir o significado último – o interesse, a objetividade e a aplicabilidade – da lógica, da matemática e da filosofia que não retrocede a uma concepção da verdade alojada na generalidade da sua aplicação a objetos e conceitos.

A solução de Wittgenstein foi apelar para uma ampla variedade de fenômenos de percepção do aspecto a fim de repensar os conceitos de possibilidade e necessidade. Claro, ele estava totalmente consciente de que Frege teria recusado fenômenos de percepção do aspecto por compreendê-los como "meramente psicológicos", relegando-os ao contexto da descoberta, mais do que ao da justificação. E ele sabia que após a leitura do *Tractatus*, Russell e Ramsey tinham tentado psicologizar e empiricizar tais fenômenos, com o objetivo de absorver essas experiências em uma teoria causal da crença e do conhecimento. O que viria a se tornar cada vez mais central no pensamento de Wittgenstein, com o passar do tempo, seria a necessidade de examinar os requisitos e pressupostos filosóficos sobre os quais essas reformulações da percepção do aspecto dependiam.

IV

Voltando a Adam Smith, é necessário notar que há uma importante diferença conceitual entre o surpreendente (*das Überraschende*) e o espanto ou o incrível (*das Erstaunliche*). A primeira, nos escritos de Wittgenstein em seu melhor momento, é um índice de envolvimento com o local, com a rápida (*raschen*) absorção ou preocupação com a curiosidade e sua satisfação, com a perplexidade e seu desaparecimento. Compreender uma prova dedutiva é ver como a sua conclusão segue como necessidade de suas premissas, e compreendê-la é aceitá-la. Mas, surpresa e espanto nos envolvem numa reação a toda uma forma de vida, mundo, ou campo de significância. Apesar de o espanto e a perplexidade poderem ter o seu lugar respeitável na vida humana (o que se vê nas "*Lecture on Ethics*", de Wittgenstein), eles não se qualificam como verdadeiros autores ou geradores da filosofia, como se parece supor. Pois, separados da surpresa e da admiração, eles podem facilmente transbordar para estupefação, tom hiperbólico, silêncio misterioso, perplexidade ansiosa ou medo (*erstaunen*, "ser transformado em pedra"). A surpresa pode ser satisfeita, pode desaparecer ou acabar, transformar-se pela maravilha em admiração ou apreciação. O assombroso, o espantoso e o misterioso não podem.

Como Smith, penso que Wittgenstein considerou ser importante o papel da surpresa, do espanto e da admiração, a sua "influência é muito mais ampla do poderíamos imaginar de modo descuidado". Pois a filosofia, enquanto "uma arte da imaginação" gerada pela perplexidade, surpresa e maravilha, se

> (...) esforça para introduzir ordem neste caos de aparências dissonantes e discordantes, para atenuar este tumulto da imaginação, e restaurá-lo, quando se examinam as grandes revoluções do universo, para que o tom de tranqüilidade e serenidade, que é tanto mais agradável em si, seja mais adequado à sua natureza (SMITH, 1795, II.12)

O surpreendente é tendencioso e engajado, nos faz avançar em detalhamentos sobre o local e nossas reações a ele. O espantoso ou incrível, pelo contrário, pode nos levar a afundar num maravilhar mudo, ou ainda mais perigoso – para a mente de Wittgenstein –: uma celebração supersticiosa do mistério do universo em si[41]. Wittgenstein vincula o espanto e a perplexidade à maravilha: à maravilha da existência do mundo, à existência de objetos ou

[41] Relembramos o § 109 das *Investigações Filosóficas*. Compare-o com as observações de Wittgenstein sobre a falta de mistério do $5!_0$ nas *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics*, Cambridge (1939), bem como a sua observação criticando *The Mysterious Universe* de James Jeans em *Lectures and Conversations on Aesthetics* III §36.

números, de uma prova específica. A maravilha não é sempre criticada por Wittgenstein, podendo mesmo dizer-se que seus escritos são projetados para cultivar e gerar respeito por ela (Cf. PI § 524)[42]. Mas ele é forte crítico quanto ao uso dessas noções em determinados contextos – como se as forças legítimas da surpresa, e os interesses que ela reflete, pudessem encontrar-se, em qualquer momento, dominados pela filosofia.

Alguns dos exemplos mais importantes do contraste entre o impressionante e o surpreendente nos escritos de Wittgenstein dizem respeito às reações que matemáticos e filósofos têm manifestado em relação aos paradoxos da lógica. Investigaremos apenas alguns exemplos de como os matemáticos se expressaram sobre isso.

Quando em 22 de junho de 1902 Frege escreveu a Russell para acusar o recebimento de uma carta de Russell, informando-o dos paradoxos, ele escreveu: "Sua descoberta da contradição me causou a maior surpresa, e eu quase diria, consternação, já que abalou a base sobre a qual eu pretendia construir a aritmética." (VAN HEIJENOORT, 1967, p. 127-128)

Frege foi "surpreendido" (*überrascht*, *bestürzt*) pelos paradoxos de Russell (e de modo desagradável), porque ele estava em vias de terminar sua obra em dois volumes, o *Grundegesetze der Arithmetik*, quando lhe informaram que seu sistema de lógica era inconsistente. Mas ele deixa claro em sua resposta a Russell estar determinado a aprender com a situação e definir corretamente a aritmética novamente. Frege não estava professando estupefação ou espanto, mas uma surpresa que o impelia a continuar em suas pesquisas.

Isto pode ser contrastado com o que Wittgenstein chamou de "pavor supersticioso e veneração dos matemáticos em face da contradição"[43], a maneira de formular o significado dos paradoxos que foi expresso, por exemplo, por Gödel, em seu (popular) artigo "*Russell's Mathematical Logic*":

---

[42] Bearn (1997) torna central a importância do maravilhar para sua leitura de Wittgenstein.

[43] "Isto", Wittgenstein acrescenta, "é muito engraçado [ist sehr *komisch*]" (*Wittgenstein Nachlass*, item 118, p. 115v (MS Vol. XIV)). A frase final da observação de Wittgenstein, em itálico, foi retirada dos originais datilografados, portanto, também da versão publicada da observação que Gödel e outros viram nas *Observações sobre os Fundamentos da Matemática* I, Apêndice III, § 17. Para uma discussão sobre a atitude de Gödel sobre esta observação confira (FLOYD, 2001). O ponto de Wittgenstein parece ser não que esta superstição deva ser condenada, mas que deve ser investigada como um fenômeno em seu próprio direito.

> Ao analisar os paradoxos trazidos pela teoria dos conjuntos de Cantor, Russell a livrou de todos os detalhes técnicos matemáticos trazendo, assim, à luz o surpreendente (*amazing*) fato de que nossas intuições lógicas (isto é, intuições sobre noções tais como: verdade, conceito, ser, classe etc.) são auto-contraditórias. (GÖDEL, 1944, p. 124).

Segundo Wittgenstein, corremos o risco de cair na sedução barata ao invés de estimular o leitor ou a leitora a percorrerem um caminho adequado para criar suas próprias idéias e seguir em suas investigações. Não porque isso não seja uma experiência interessante, mas por haver o risco, nesse estilo de formulação, de estimularmos uma apreciação inadequada sobre os paradoxos, uma apreciação desvinculada da atividade matemática.

Em 1935 Schlick escreveu a Wittgenstein para perguntar o que ele achou de um resultado que se revelou muito surpreendente para muitas pessoas, o teorema de Gödel relativo à incompletude da aritmética de primeira ordem. Schlick manifestou "espanto" (*astonishment*) face ao teorema, e parece ter-se voltado para Wittgenstein, buscando conselhos sobre o que pensar (WITTGENSTEIN, 2004). A resposta de Wittgenstein volta-se sobre a distinção entre o surpreendente e o espantoso, como eu – seguindo Smith – os distingui:

> Quanto à aplicação do que eu disse para o caso que você cita, quero agora só dizer isto: se você ouvir dizer que alguém provou haver proposições indemonstráveis na matemática, não há, antes de tudo, nada espantoso nisto [*vorerst gar nichts Erstaunliches*, a ênfase é do próprio Wittgenstein], porque você ainda não tem idéia alguma do que esta afirmação, que parece ser totalmente clara, diz.
>
> Até você passar pela prova de A a Z e chegar ao último detalhe, você não pode ver o que foi provado. Para alguém que se admira com o fato de que duas sentenças opostas são demonstráveis, eu diria: olhe a [*schau an*] prova, e então você vai ver "em que sentido" uma e "em que sentido" a outra é provada. E antes que você tenha estudado a prova inteira em detalhes, você não tem nenhuma razão para maravilhar-se. Tudo o que você pode aprender dos "meus ensinamentos" é que sobre tal prova [com seu resultado] *nada* pode ser dito antes que você a tenha investigado de

> modo específico. Isto é: o filósofo está sempre errado se quer profetizar um quase-algo em matemática e dizer: "*isso* é impossível", "isso não pode ser provado". Por que não? O que é suposto ser provado não é senão uma expressão da palavra, e a prova lhe confere seu sentido particular; e com qual autoridade chamamos esta prova "a prova desta prosa/sentença"? É parcialmente uma questão de gosto, ou seja, é uma questão de nosso juízo [*Ermessens*] e é nossa inclinação se queremos aplicar a estrutura aqui expressa nesta prosa/sentença, ou não. É uma questão relativa à nossa inclinação querermos falar de *pontos* imaginários ou não, ou de luz invisível, ou não. A exata (*genau*) investigação de uma prova complicada é extraordinariamente difícil. Ou seja, é extremamente difícil organizar a estrutura [*gestalten*] da prova *de modo perspicaz* [*durchsichtig*] e obter uma clareza total sobre a sua relação com outras provas, a sua posição em determinados sistemas, e assim por diante. Você precisa tentar adequadamente investigar uma prova – como a da sentença de que "2 é irracional – e persuadir a si próprio disso. Isso não significa, contudo, que há algo místico nesta prova antes desta investigação, mas apenas que ainda não pesquisamos [*überschauen*] claramente nem a prova nem, principalmente, sua relação com outras provas. Você está no caminho errado se você diz que se sente, apesar de meus ensinamentos, completamente impotente diante de tal e tal prova[44].

Esta observação pode ser tomada para exprimir uma primeira versão do que tem sido recentemente chamado de "naturalismo" em matemática (isto é, a deferência dos filósofos para com o que os matemáticos dizem e fazem), e ela certamente aprofunda as primeiras observações de Wittgenstein de que em lógica, matemática e filosofia "não há surpresas" (ver nota 5). Mas em seu contexto original, ela não expressa simplesmente um tipo de atitude "espere e veja", ou um anti-*apriorismo* sobre o resultado de Gödel. Nela podemos ver algo mais.

Wittgenstein distancia-se nitidamente do que Schlick (o pai do positivismo de Viena enquanto movimento filosófico) parece pensar sobre a própria concepção da filosofia de Wittgenstein. Schlick parece pensar que

[1] Wittgenstein a Schlick, 31.7.1935, em Wittgenstein (2004).

Wittgenstein lhe oferecia um método filosófico, uma caracterização geral de noções como *prova*, *verdade* e *significação*, bem como uma filosofia orientada para tratar do método científico como um assunto[45]. Wittgenstein diz, em 1935, que ele não faz isso. É por isso que ele termina a carta dizendo: "você está nas garras de uma falsa concepção se acredita que precisa ´furar suas orelhas´ sempre que é informado sobre uma nova prova". Wittgenstein não está dizendo que a matemática em geral, e a prova de Gödel em particular, é, *a priori*, irrelevante para a filosofia. Ele também não está simplesmente dizendo que, se uma observação filosófica contradiz a prática matemática, a filosofia deve sempre prevalecer (compare com (MADDY, 1997)). Algo mais complexo se passa: ele está enfatizando o quanto é difícil (quanto a uma questão de gosto de juízo e contexto) realmente compreender o significado de um resultado matemático. E insiste que uma tal apreciação exige um tipo especial de atividade (o que ele chama de uma "investigação"), algo que requer tempo e paciência e é "muito difícil". Parte disso envolve o trabalho com os detalhes de uma prova e sua relação com outras provas a fim de separar a "prosa" enganosa da genuína, o núcleo interno do resultado. Isso requer o desenvolvimento de um faro para detectar, no contexto de um argumento, quais noções são rigorosas e quais não são, quais formas de "prosa" são "gás" (potencialmente enganosas) e quais não são, quais afetam nossas noções comuns extra-matemática e quais não[46].

No curso da sua resposta a Schlick, Wittgenstein sugere, como um

---

[45] Para ser justo, Schlick também pode ter tido em mente o que Wittgenstein tinha escrito no *Tractatus* de 4. 442: "Uma proposição não pode possivelmente asseverar dela mesma que ela é verdadeira". Ele pode ser perdoado por ter se perguntado como essa observação pode ser compatível com a prova de Gödel para o teorema da incompletude.

[46] Cf. item 118 (1937) pp. 113ss, sobre o tema das contradições "ocultas" e a prova como um fundamento "forçado": As pessoas apenas algumas vezes dizem [ou dizem ocasionalmente] que não poderiam julgar isto e aquilo, pois não estudaram filosofia. Isto é um absurdo irritante, (pois) pressupõe que a filosofia é uma ciência. E ninguém fala da filosofia como algo como a medicina. – Pode-se dizer, no entanto, que as pessoas que nunca fizeram uma investigação de natureza filosófica – como, por exemplo, a maioria dos matemáticos – não estão equipadas com o correto órgão de percepção para este [tipo de] investigação ou teste. Embora como aquele que mesmo não estando acostumado a caçar [flores, ursos ou ervas] na floresta irá encontrar algum, seus olhos não são treinados para essa investigação, e ele não sabe onde, em especial, deve procurá-los. Desta forma, alguém sem prática em filosofia passa por todos os lugares onde as dificuldades se escondem na grama, enquanto alguém que praticou a filosofia pára e ai fica, acha que aqui está uma dificuldade, apesar de não vê-la ainda. E não se sabe por quanto tempo ainda a pessoa com prática que percebe que uma dificuldade se detém aí, e por quanto tempo deve pesquisar para encontrá-la. É difícil encontrar algo quando esse algo está muito bem escondido.

exemplo a ser “investigado”, a prova da irracionalidade da raiz quadrada de dois. Sabemos hoje que ele escreveu muitos comentários sobre esta prova, alguns dos quais foram aparentemente rascunhados nas margens de seu exemplar do *A Course in Pure Mathematics*, de Hardy (1941)[47]. Esses aparentes rascunhos são realmente impressionantes, e notavelmente estranhos à primeira vista. São como comentários editoriais espalhados ao redor das bordas do livro, circulando, castigando, reformulando, riscando e substituindo algumas palavras, especialmente aquelas ligadas à generalidade. Parecem ser edições filosóficas da “prosa” do livro de Hardy: eles promulgam e realizam com precisão o que Wittgenstein dizia a Schlick, em 1935, para fazer a si mesmo. Em 1943, Wittgenstein transferiu algumas dessas observações para um manuscrito, e as conectou explicitamente com suas observações sobre o teorema de Gödel retomando – poderíamos dizer – os temas mais importantes desta carta de 1935 (MS 126 14, de dezembro de 1942). Em suas observações, ele comparou a “precisa prova de maquinaria” na demonstração de Hardy sobre a irracionalidade da raiz quadrada de dois com as observações de Gödel na introdução de seu artigo sobre a incompletude, de 1931, que lhe pareceu supostamente, de modo errado, pertencer a uma “forma de prova eternamente válida”, em vez de uma precisa prova de contexto (ou “maquinaria”)[48].

O que é importante, aqui, é que Wittgenstein não oferece uma orientação geral sobre as noções de *verdade*, de *sentido* e de *prova*. Sua idéia geral é tentar filosofar *sem* isso. E seus principais termos filosóficos de crítica envolvem o que são, em última análise, os termos úteis da arte, como “surpreendente” e “espantoso”.

---

[47] Cópias dessas anotações foram gentilmente cedidas a mim por Michael Nedo, do *Cambridge Wittgenstein Archives*.

[48] Em Floyd (2001) explorei a questão da atitude de Wittgenstein com relação às observações introdutórias do artigo de Gödel de 1931. Shanker (1988) fez uma útil reconstrução da provável atitude de Wittgenstein com relação ao mesmo artigo. Por volta de 1942, quando as observações sobre Gödel a que me refiro aqui foram escritas, eu acredito que Wittgenstein tinha lido todo o trabalho de Gödel (há referências de 1941 sobre a *ê*-probabilidade e a *ù* -consistência no MS 163 pp. 32, 41, respectivamente). Portanto, podemos supor, acredito, que em 1942 ele estava contrastando as observações introdutórias, quando Gödel discute os paradoxos, em geral, com a “precisa maquinaria de prova” envolvida na prova real. O leitor deve ver Rodych (2002) para uma discussão sobre as passagens do *Nachlass* envolvendo Gödel – embora Rodych adote, em geral, uma leitura muito diferente da minha quanto à filosofia da matemática de Wittgenstein.

Abreviações das referências sobre Wittgenstein

MN: *"Notes Dicated to G.E. Moore in Norway, April 1914", Appendix II in NB*
NB: *Notebooks 1914-16*
WL: *Wittgenstein's Lectures, Cambridge 1930-32*
AWL: *Cambridge Lectures: 1932-1935*
LA: *Lectures and Conversations on Aesthetics, Psychology, and Religious Belief*
LFM: *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics*, *Cambridge 1939*
LW I: *Last Writings on the Philosophy of Psychology, vol. I*
LW II: *Last Writings on the Philosophy of Psychology, vol. II*
PG: *Philosophical Grammar*
PI: *Philosophical Investigations*
RFM: *Remarks on the Foundations of Mathematics*
RPP I: *Remarks on the Philosophy of Psychology, Volume I*
RPP II: *Remarks on the Philosophy of Psychology, Volume II*
TLP: *Tractatus Logico-Philosophicus*
WA: *Wiener Ausgabe*
WVC: *Ludwig Wittgenstein and the Vienna Circle*
MS/TS: *Manuscript and typescript numbers according to von Wright's standard referencing*[49].

Referências

BARKER-PLUMMER, D. et. al. (Eds). **Words, Proofs, and Diagrams**. Stanford, CA: CSLI. 2002.

BEARN, G. C. F. **Waking to Wonder**: Wittgenstein's Existential Investigations. Albany, New York: State University of New York Press. 1997.

BROWN, R.W. **An Introduction to the World of Proofs and Pictures**. New York: Routledge. 1999.
BUDD, M. **Wittgenstein's Philosophy of Psychology**. New York: Routledge. 1989.

CAVELL, S. Aesthetic Problems of Modern Philosophy. **Must We Mean What We Say?** New York: Oxford University Press. 1976.

DIAMOND, C. **The Realistic Spirit**. Cambridge, MA: MIT Press. 1991.

DREBEN, B.; FLOYD, J. Tautology: How Not to Use a Word. **Synthese,** 87, 1, p. 23 – 50. 1991.

DUMMETT, M. The Justification of Deduction. **Truth and Other Enigmas**.

[49] Para detalhes, veja Wittgenstein (2000).

Cambridge, MA: Harvard University Press. 1978.

DUMMETT, M. Wittgenstein's Philosophy of Mathematics. **Philosophical Review**, 63, p. 324 – 348; reprinted in Truth and Other Enigmas, p. 166 – 185 . 1959.

EKMAN, P. **Emotions Revealed**. New York: Henry Holt. 2003.

FLOYD, J. Prose versus Proof: Wittgenstein on Gödel, Tarski and Truth. **Philosophia Mathematica** 3, 9, p. 901 – 928. 2001.

FLOYD, J. *Das Überraschende:* Wittgenstein on the Surprising in Mathematics. In: ELLIS, J; GUEVARA, D. (Eds.). **Wittgenstein and the Philosophy of Mind.** Oxford University Press. 2008.

FLOYD, J. On Being Surprised: Wittgenstein on Aspect Perception, Logic and Mathematics. In Krebs and W. Day, eds., **Seeing Wittgenstein Anew: New Essays on Aspect Seeing**. New York: Cambridge University Press, forthcoming. No prelo.

FOGELIN, R. **Wittgenstein**, 2nd ed. New York: Routledge & Kegan Paul. 1987.

FREGE, G. **Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege**, P. Geach and M. Black (Eds.). 3rd edition, Totowa, New York: Rowman and Littlefield. 1980.

GERRARD, S. Wittgenstein's Philosophies of Mathematics, **Synthese,** 87, 1, p. 125 – 142. 1991.

GLOCK, H. J. **A Wittgenstein Dictionary**. Cambridge, MA: Blackwell Publishing. 1996.

GÖDEL, K. Russell's Mathematical Logic. In: FEFERMAN, S. et.al. (Eds.). **Kurt Gödel Collected Works Volume II, Publications 1938-1974**. New York: Oxford University Press, p. 119 – 141 . 1944.

GÖDEL, K. **Kurt Gödel:** Collected Works Volume IV: Correspondence A-G. S. FEFERMAN, S. et.al. (Eds.). New York: Oxford University, Clarendon Press. 2003.

GRIALOU, P., LONGO, G., OKADA, M. (Eds.). **Images and Reasoning, Proceedings of an Interdisciplinary Conference Series on Reasoning Studies**. Tokyo: Keio University Centre for Integrated Research on the Mind. 2005.

GRIMALDI, R. P. **Discrete and Combinatorial Mathematics** 5th ed. Boston: Pearson/ Addison-Wesley. 2004.

HARDY, G. H. **A Mathematician's Apology**. Reprint edition, New York: Cambridge University Press, Canto, 1967. 1940.

HARDY, G. H. **A Coursebook in Pure Mathematics**, 8th edition. London: Cambridge University Press. 1941.

KANAMORI, A. **The Higher Infinite**. New York: Springer Verlag, 2nd ed. Kennedy, J. (manuscript), "On Reading Mathematical Constructions as Works of Art". 2005.

KING, J. Recollections of Wittgenstein. In: RHEES, R. (Ed.). **Recollections of Wittgenstein**. New York: Oxford University Press, 1984, p. 68 – 75. 1984

KRIPKE, S. **Wittgenstein on Rules and Private Language**. Cambridge, MA: Harvard University Press. 1981.

MADDY, P. **Naturalism in Mathematics**. Oxford: The Clarendon Press. 1997.

MANCOSU, P.; J∅ORGENSEN, K.; PEDERSEN, S. (Eds.). **Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics.** New York: Springer Verlag. 2005.

MONK, R. **Wittgenstein:** The Duty of Genius. New York: Free Press. 1990.

MOORE, A. W. **The Infinite**. New York: Routledge. 1990.

MÜHLHOLZER, F.Mathematik ohne Metaphysik. In: NIDA-RÜMELIN, J. (Hrsg.). **Rationalität, Realismus, Revision** (Vorträge des 3. internationalen Kongresses der Gesellschaft für Analytische Philosophie vom 15. bis zum 18. September 1997 in München). Berlin: Walter de Gruyter, 1999, p. 416 – 423. 1997.

MÜHLHOLZER, F. Wittgenstein and Surprises in Mathematics. In: WITTGENSTEIN UND DIE ZUKUNFT DER PHILOSOPHIE: EINE NEUBEWERTUNG NACH 50 JAHREN, **Proceedings of the 24th International Wittgensein Symposium**. Vienna: öbver hpt Verlag, p. 306 – 315. 2002.

MULHALL, S. **On Being in the World:** Wittgenstein and Heidegger on Seeing Aspects. New York: Routledge. 1990.

NORMAN, J. **After Euclid:** Visual Reasoning and the Epistemology of Diagrams. Stanford, CA: CSLI. 2006.

POTTER, M. **Reason's Nearest Kin:** Philosophies of Arithmetic from Kant to Carnap. New York, Oxford University Press. 2000.

PUTNAM, H. Philosophy of Mathematics: Why Nothing Works. **Words and Life**, Cambridge, MA: Harvard University Press, p. 499 – 512. 1994.

ROBERTS, F.S. **Applied Combinatorics**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall. 1984.

ROBINSON, J. Startle, **Journal of Philosophy,** 92, 2, p. 53 – 74. 1995.

ROTA, G. The Phenomenology of Mathematical Beauty, **Synthese,** 111, p. 171 – 182. 1997.

RUSSELL, B. The Limits of Empiricism, **Proceedings of the Aristotelian Society.** p. 131 – 150. 1936.

SHANKER, S. **Wittgenstein's Remarks on the Foundations of AI**. New York: Routledge. 1998.

SHANKER, S.; GREENSPAN, S. **The First Idea:** How Symbols, Language and Intelligence Evolved from Our Primate Ancestors to Modern Humans. Cambridge, MA: Da Capo Press. 2004.

SMITH, A. The History of Astronomy. In: WIGHTMAN, W. P. D.; BRYCE, J. C. (Eds.). **Essays on Philosophical Subjects**. Indianapolis: Liberty Classics 1980 reprint of the Glasgow Edition of the Works and Correspondence of Adam Smith, Vol. III. 1795.

STEINER, M. Rules, Wittgenstein: Mathematics, Regularities and Rules. In: MORTON, A., STICH, S. (Eds.). **Benacerraf and His Critics**. Cambridge, Mass.: Blackwell Publishing Company, p. 190 – 212. 1996.

STILLWELL, J. **Mathematics and Its History**. New York: Springer Verlag. 1989.

VAN HEIJENOORT, J. **From Frege to Gödel**. Cambridge, MA: Harvard University Press. 1967.

WITTGENSTEIN, L.Logische-Philosophische Abhandlung, final chapter, Ostwald's **Annalen der Naturphilosophie**; English trans. **Tractatus Logico-Philosophicus** by C.K. Ogden. New York: Routledge and Kegan Paul, 1922. 1921.

WITTGENSTEIN, L. A Lecture on Ethics. In: KLAGGE, J.; NORDMANN, A. (Eds.). **Ludwig Wittgenstein:** Philosophical Occasions 1912-1951. Indianapolis, Hackett Press, 1993. 1929.

WITTGENSTEIN, L. **Philosophical Investigations**, 3rd ed., G.E.M. Anscombe, R. Rhees, (trans). Oxford, Blackwell. 1958.

WITTGENSTEIN, L. **Lectures and Conversations on Aesthetics, Psychology, and Religious Belief**. Berkeley, CA: University of California Press. 1970.

WITTGENSTEIN, L. **Ludwig Wittgenstein and the Vienna Circle**. Shorthand notes recorded by F. Waismann, eds. B. McGuinness, J. Schulte, trans. B. McGuiness, Oxford: Blackwells. 1973.

WITTGENSTEIN, L. **Remarks on the Foundations of Mathematics**, revised ed., G.H. von Wright, R. Rhees G.E.M. Anscombe (eds). Oxford: Blackwells. 1978.

WITTGENSTEIN, L. **Cambridge Lectures: 1932-1935**, from the Notes of Alice Ambrose and Margaret Macdonald, A. Ambrose (Ed.), University of Chicago Press. 1979.

WITTGENSTEIN, L. **Wittgenstein's Lectures, Cambridge 1930-32, from the notes of John King and Desmond Lee**, D. Lee (ed). Oxford:Blackwells. 1980.

WITTGENSTEIN, L. **Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics, Cambridge 1939**, C. Diamond (ed). Chicago, IL: The University of Chicago Press. 1989.

WITTGENSTEIN, L. **Wiener Ausgabe.** Nedo, M. (ed). Vienna/New York: Springer-Verlag. 1993.

WITTGENSTEIN, L. **Wittgenstein's Nachlass, The Bergen Electronic Edition** (CDRom). Oxford University Press. 2000.

WITTGENSTEIN, L. **Ludwig Wittgenstein:** Briefwechsel. Innsbrucker elektronische Ausgabe (CD-Rom), M. Seekircher, B. McGuinness, A. Unterkircher, A. Janik and W. Methlagl eds., Intelex. 2004.

WRIGHT, C. **Wittgenstein on the Foundations of Mathematics**. Cambridge, MA: Harvard University Press. 1980.

WRIGHT, C. "Strict Finitism", in **Realism, Meaning and Truth**, 2nd ed. Oxford: Blackwell. 1993.

Submetido em Abril de 2010.
Aprovado em Julho de 2010.

ACTA SCIENTIAE

Revista de Ensino de Ciências e Matemática

A Revista *Acta Scientiae* teve sua origem em 1999, mediante publicação de artigos oriundos dos pesquisadores das áreas de Ciências Naturais e Exatas da Universidade Luterana do Brasil – ULBRA – Canoas (RS). Com sua indexação junto ao IBICT – *Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia* (ISSN no. 1517-4492), é reconhecida como um espaço de publicação tanto de Ciências e Matemática como de Ensino dessas áreas. Entretanto, a partir do Volume 7, Número 1, 2005, Jan-Jun, a revista passa a publicar artigos exclusivos da área de Ensino de Ciências e Matemática, sendo editada desde sua fundação em dois números anuais. Assim, constitui-se em mais uma opção para publicação de artigos científicos dessa região de inquérito.

Confira: **http://www.ulbra.br/actascientiae**

Você poderá realizar download dos exemplares da revista, encontrará informações para submissão e avaliação dos artigos.

Atenção!

A Revista Acta Scientiae é de fluxo contínuo para o recebimento de artigos. Além disso, ela é uma revista de divulgação impressa e online.

Informações:

mauriciomatematica@gmail.com

actascientiae@ulbra.br