ISSN 0103-636X

Análise Praxeológica dos *Passeios Aleatórios da Mônica*

Praxeological Analysis of the Random Walks of Monica

Camila Macedo Lima Nagamine*
Afonso Henriques**
Miriam Cardoso Utsumi***
Irene Mauricio Cazorla****

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo apresentar as possíveis contribuições da Teoria Antropológica da Didática, na análise *a priori* da sequência didática *Passeios Aleatórios da Mônica*. Tal sequência trabalha noções elementares da teoria de probabilidades para a Educação Básica, e vem sendo aperfeiçoada de acordo com as recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais, propiciando uma postura ativa dos sujeitos, que interagem constantemente com as tarefas, pois são desafiados a tomar decisões a cada resultado. A análise revelou que essa sequência permite destacar uma organização praxeológica completa (Tarefa/Técnica/Tecnologia/Teoria) e inverte a praxeologia usual, uma vez que parte de uma situação-problema, da qual emergem as concepções intuitivas de probabilidade, a probabilidade frequentista, decorrente da experimentação aleatória,

* Mestre em Estatística pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar). Professora Assistente da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), Ilhéus, BA, Brasil. Endereço para correspondência: Caminho 01, 27, Jardim Primavera, CEP: 45.608-470. Itabuna, BA, Brasil. *E-mail*: cmlnagamine@uesc.br.

** Doutor em Didática da Matemática pela Universidade Joseph Fourier de Grenoble, França. Professor Adjunto da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), Ilhéus, BA, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Carlos Eduardo Guimarães, 866, Apto. 202, Zildolândia, CEP: 45600-710. Itabuna, BA, Brasil. *E-mail*: henry@uesc.br.

*** Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Professora do Instituto de Ciências Matemáticas e Computação da Universidade Estadual de São Paulo(ICMC-USP), São Carlos, SP, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Trabalhador Sancarlense, 400, CP668, CEP: 13566-590. São Carlos, SP, Brasil. *E-mail*: mutsumi@icmc.usp.br.

**** Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Professora Titular da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), Ilhéus, BA, Brasil. Endereço para correspondência: Alameda Florença 137, apto. 703, Pituba. CEP: 41830-460. Salvador, BA, Brasil. *E-mail*: icazorla@uol.com.br.

e a probabilidade clássica ou Laplaciana, proveniente da modelagem matemática, por meio do diagrama de possibilidades.

Palavras-chave: Ensino de Probabilidade. Sequência didática. Teoria Antropológica da Didática. Educação Básica. Parâmetros Curriculares Nacionais.

Abstract

This paper aims to present the possible contributions of Anthropological Theory of Didactics in a priori analysis of the didactic sequence *The Random Walks of Monica*. This sequence addresses elementary concepts of probability theory for Basic Education, and has undergone improvements based on the recommendations of the National Curricular Parameters, favoring active participation of the subjects, who constantly interact with the tasks and are challenged to make decisions regarding each result. Analysis revealed that this sequence makes it possible to highlight a complete praxeological organization (Task/Technique/Technology/Theory) and reverses the usual praxeology, because it starts with a problem situation, from which emerge the intuitive conceptions of probabilit, the frequentist probability, resulting from random experimentation, and the theoretical probability (Laplace) calculated from the mathematical modeling, using the diagram of possibilities.

Keywords: Teaching of probability. Didactic sequence. Anthropological Theory of Didactics. Basic Education. National Curricular Parameters.

1 Introdução

A sequência didática (SD) *Passeios Aleatórios da Mônica (PAM)* foi proposta por Fernandez e Fernandez (1999), para o estudo da distribuição Binomial no Ensino Superior, posteriormente foi adaptada por Cazorla e Santana (2006), para o ensino de Probabilidade na Educação Básica, com base nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997, 1998, 2002, 2006).

Essa sequência permite avaliar/trabalhar as noções elementares da teoria de probabilidades: experimento determinístico e aleatório, eventos, espaço amostral, probabilidade de eventos simples e compostos; tabela de distribuição de frequência (TDF), gráfico de colunas; probabilidade frequentista (frequência relativa); probabilidade clássica a partir da árvore de possibilidades, padrões observados e esperados, dentre outros.

A PAM faz parte do *Ambiente Virtual de Apoio ao Letramento Estatístico – AVALE*, que é um projeto de pesquisa e desenvolvimento da Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC, financiado pela Fundação de

Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia – FAPESB. Os educadores estatísticos do AVALE estão construindo, avaliando e disponibilizando, nesse ambiente, diversas sequências didáticas (SD) para trabalhar tópicos de Probabilidade e Estatística, na Educação Básica, tanto no ambiente papel e lápis (físico-experimental), quanto no ambiente virtual (computacional).

O processo de validação da eficácia das SD, propostas no AVALE, está sendo realizado utilizando-se diversos arcabouços teórico-metodológicos, visando seu aperfeiçoamento, a fim de que os professores das escolas possam adotá-las com relativa autonomia. Um desses arcabouços é a Teoria Antropológica da Didática – TAD (CHEVALLARD, 1992).

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma análise *a priori* dessa sequência, fundamentada na TAD. Para isso, apresentamos a proposta dos PCN para o ensino de Probabilidade na Educação Básica; em seguida, o referencial teórico e, finalmente, a análise *a priori* dessa SD.

2 O ensino de Probabilidade na Educação Básica

Os conceitos e procedimentos de Probabilidade se encontram na disciplina de Matemática, no Bloco *Tratamento da Informação* no Ensino Fundamental (BRASIL, 1997, 1998) e no tema *Análise de Dados* no Ensino Médio (BRASIL, 2002, 2006). No caso das séries iniciais do Ensino Fundamental, o ensino de Probabilidade tem como principal finalidade que o aluno compreenda que grande parte dos acontecimentos do cotidiano é de natureza aleatória, sendo possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações nas quais o aluno realiza experimentos e observa eventos, em geral, em espaços equiprováveis.

> Além disso, ao ler e interpretar dados apresentados em tabelas e gráficos, os alunos devem perceber a possibilidade de estabelecer relações entre acontecimentos e, em alguns casos, fazer previsões. Da mesma forma, ao observarem a frequência de ocorrência de um acontecimento, ao longo de um grande número de experiências, os alunos podem desenvolver suas primeiras noções de probabilidade (BRASIL, 1997, p. 59).

Os PCN recomendam que a ideia de probabilidade seja explorada em situações-problema simples, identificando os sucessos possíveis, os sucessos seguros, as situações de *sorte,* salientando a importância da observação da frequência de ocorrência de alguns eventos a partir de um número razoável de experiências (BRASIL, 1997, p. 61).

No caso do Ensino Médio, os PCN (BRASIL, 2002) recomendam que se trabalhe com possibilidades e cálculo de probabilidades, a fim de:

> • Reconhecer o caráter aleatório de fenômenos e eventos naturais, científico-tecnológicos ou sociais, compreendendo o significado e a importância da probabilidade como meio de prever resultados.
> • Quantificar e fazer previsões em situações aplicadas a diferentes áreas do conhecimento e da vida cotidiana que envolvam o pensamento probabilístico.
> • Identificar em diferentes áreas científicas e outras atividades práticas modelos e problemas que fazem uso de estatísticas e probabilidades (p. 127-128).

Neste nível de ensino, os PCN reforçam o uso da simulação para que os alunos tenham oportunidade de ver modelos probabilísticos que descrevem os fenômenos que nos rodeiam em ação.

Nesse sentido, os PCN orientam para o estudo da Combinatória e da Probabilidade, a fim de que os alunos adquiram conhecimentos sobre o levantamento de possibilidades (recomenda, explicitamente, o uso do diagrama de possibilidades, conhecido também como diagrama da árvore, para visualizar a estrutura dos múltiplos passos do experimento) e a medida da chance de cada um deles. Isto porque as técnicas da combinatória auxiliam no cálculo de probabilidades e permitem relacionar a ideia de experimento composto a partir de um espaço amostral discreto e das operações combinatórias:

> Ao estudar probabilidade e chance, os alunos precisam entender conceitos e palavras relacionadas à chance, incerteza e probabilidade, que aparecem na nossa vida diariamente, particularmente na mídia. Outras idéias importantes incluem a compreensão de que a probabilidade é uma medida de incerteza, que os modelos são úteis para simular eventos, para estimar probabilidades, e que algumas vezes nossas intuições são incorretas e podem nos levar a uma conclusão equivocada no que se refere à probabilidade e à chance. [...] Nas situações e nas experiências aleatórias,

> os estudantes precisam aprender a descrevê-las em termos de eventualidades, associá-las a um conjunto de eventos elementares e representá-las de forma esquemática. Os alunos necessitam também dominar a linguagem de eventos, levantar hipóteses de equiprobabilidade, associar a estatística dos resultados observados e as frequências dos eventos correspondentes, e utilizar a estatística de tais frequências para estimar a probabilidade de um evento dado (BRASIL, 2006, p. 79-80).

A leitura cuidadosa dos PCN que orientam o currículo de Matemática, na Educação Básica, mostra que os cursos de formação de professores devem criar condições para que os futuros professores se apropriem dos conceitos e procedimentos básicos da teoria de probabilidades e, por outro lado, estejam aptos a formular problemas contextualizados em situações próximas dos alunos, a fim de que possam observar os fenômenos, recorrer à experimentação e simulação para descrever esses fenômenos, e ao recurso da modelagem probabilística a fim de compreender o mundo que os rodeia.

Assim, de acordo com essas considerações, parece desejável a construção de praxeologias que possam contemplar a aquisição de conhecimentos pelos alunos. Neste contexto, encontramos uma fundamentação na teoria a que nos referimos a seguir.

3 Referencial teórico

Para desenvolvermos a análise *a priori* da PAM, recorremos à Teoria Antropológica da Didática - TAD, proposta por Chevallard (1992), na sua abordagem praxeológica.

Essa abordagem é um modelo para análise da ação humana institucional, descrita em termos das quatro noções: Tarefa, Técnica, Tecnologia e Teoria, sendo que a *Tarefa* (T) contém, ao menos, uma tarefa t; a *Técnica* (τ), que é uma maneira de fazer ou realizar um tipo de tarefa T. A *Tecnologia* (θ), um discurso racional (o *logôs*) cujo objetivo é justificar e esclarecer o uso da *técnica* τ, garantindo que esta permita realizar as tarefas do tipo T. A quarta e última noção, denominada *Teoria* e representada por Θ, tem como função justificar e tornar compreensível uma *tecnologia* θ.

As quatro noções descrevem uma organização praxeológica completa [T/τ/θ/Θ], que pode ser decomposta em dois blocos [T/τ] e [θ/Θ], constituindo, respectivamente, o saber-fazer [praxe] e o ambiente tecnológico-teórico [logôs].

Dessa forma, podemos afirmar que *produzir, ensinar e aprender matemática* são ações humanas institucionais que podem descrever-se conforme o modelo *praxeológico.* Nesse sentido, a *organização praxeológica* relativa às atividades matemáticas é uma *organização matemática*. Se o objeto de estudo é um objeto estatístico, então podemos falar da *organização estatística.*

Com base nessa teoria, apresentamos a análise *a priori* da PAM, que é uma situação problema ou *tarefa*, que identificamos por (T), constituída de uma sequência de subtarefas (t), que podem ser realizadas utilizando diversas *técnicas* (τ) justificadas pela *tecnologia* (θ) que se utiliza da *teoria* (Θ) de *Probabilidade* como objeto de estudo.

4 Sequência didática *Passeios Aleatórios da Mônica – PAM*

Antes de começarmos a análise *a priori* da PAM, apresentamos o nosso entendimento sobre o que é uma sequência didática (SD). Para tal, baseamo-nos nas ideias de Henriques (2001), que se apoia nos pressupostos da Engenharia Didática.

Segundo o autor, uma SD é um esquema experimental, formada por situações-problemas ou tarefas realizadas com um determinado fim, desenvolvido por sessões[1] de aplicação a partir de um estudo preliminar (análise institucional) em torno do objeto do saber e de uma análise matemática/didática caracterizando os objetivos específicos de cada problema/tarefa.

Uma SD é, portanto, um objeto de estudo do pesquisador, e passa necessariamente por três etapas: análise *a priori,* fundamentada na análise institucional; aplicação (etapa em que se observam as práticas dos sujeitos da instituição de aplicação, que, eventualmente, pode ser a mesma instituição de referência) e análise *a posteriori*.

[1] Na didática francesa, o termo utilizado é sessão de ensino, conforme Almouloud (2007, p. 171): “A engenharia didática, vista como metodologia de pesquisa, é caracterizada, em primeiro lugar, por um esquema experimental com base em ‘realizações didáticas’ em sala de aula, isto é, na construção, realização, observação e análise de sessões de ensino”.

Nesse sentido, o objetivo de uma SD não é ensinar, e sim estudar as práticas institucionais e o desenvolvimento dos alunos na aprendizagem do objeto visado, bem como analisar o papel da instituição (no caso, Educação Básica e PCN) responsável na formação desses indivíduos.

Com efeito, uma SD relaciona-se fortemente com uma *análise institucional* em torno dos objetos de estudo nela envolvidos. Neste caso, o professor assume o papel de pesquisador, ao observar a sua própria prática pedagógica e organizar a sequência de ensino, a partir das referências produzidas pela análise *a priori* da SD e pela análise da sua prática.

A PAM é composta de quatro sessões, conforme Figura 1. A primeira sessão compreende a leitura da história e, a partir dela, a percepção das concepções intuitivas de probabilidade dos alunos. A segunda sessão subdivide-se em duas partes, a primeira relativa à experimentação, e a segunda, à organização dos resultados em tabelas e gráficos. A terceira sessão recorre à modelagem matemática, utilizando a árvore de possibilidades. A quarta sessão compara as formas de atribuir probabilidade, bem como busca analisar as reflexões dos sujeitos em torno da sequência como um todo.

Organização da SD *Os Passeios Aleatórios da Mônica*

Sessão I: Contexto	Sessão II: Experimentação aleatória e a probabilidade frequentista	Sessão III: Modelagem matemática e a probabilidade clássica ou Laplaciana	Sessão IV: Decisão
História e concepções prévias de probabilidade	II.1 Experimentação aleatória II.2 Organização dos resultados e a probabilidade frequentista	III.1 Modelagem matemática a partir da árvore de possibilidades III.2 Organização dos resultados e a probabilidade clássica ou Laplaciana	Comparação entre as diversas formas de atribuir probabilidade. Tecer reflexões

Todos os amigos têm a mesma chance de ser visitados? (T)

Figura 1 – Esquema da sequência didática *Os passeios aleatórios da Mônica*.

A *tarefa* (T) central da SD consiste em verificar o impacto da experimentação aleatória e da modelagem matemática no desenvolvimento do conceito de probabilidade, desde a sua versão intuitiva até a sua formulação teórica, acompanhando as respostas dos alunos à questão: “todos os amigos têm a mesma chance de ser visitados?”.

Essa SD foi planejada de modo que sua aplicação permita as seguintes considerações: a) cada sessão deve ser trabalhada separadamente; b) no final de cada sessão, devem ser recolhidos os trabalhos realizados pelos sujeitos, a fim de evitar a 'contaminação' da realização das tarefas das sessões posteriores; c) que seja desenvolvida em duplas, pela amplitude da tarefa.

Detalhamos a seguir uma análise *a priori* da organização das sessões, dos tipos de tarefa e subtarefas da SD.

4.1 Sessão I: a história e as concepções prévias de probabilidade

Essa sessão compreende a leitura da história (T_1) e é constituída por cinco subtarefas (t) que têm por objetivo analisar as concepções intuitivas de probabilidade.

> *A história da PAM*A Mônica e seus amigos moram no mesmo bairro. A distância da casa da Mônica para a casa de Horácio, Cebolinha, Magali, Cascão e Bidu é de quatro quarteirões, conforme ilustra a Figura 2. A Mônica costumava visitar seus amigos durante os dias da semana em uma ordem pré-estabelecida: segunda-feira, Horácio; terça-feira, Cebolinha; quarta-feira, Magali; quinta-feira, Cascão e sexta-feira, Bidu. Para tornar mais emocionantes os encontros, a turma combinou que o acaso escolhesse o amigo a ser visitado pela Mônica. Para isso, na saída de sua casa e a cada cruzamento, Mônica deve jogar uma moeda; se sair cara (C), andará um quarteirão para o Norte, se sair coroa (X), um quarteirão para o Leste. Cada jogada representa um quarteirão de percurso. Mônica deve jogar a moeda quatro vezes para poder chegar à casa dos amigos (CAZORLA; SANTANA, 2006, p. 44).

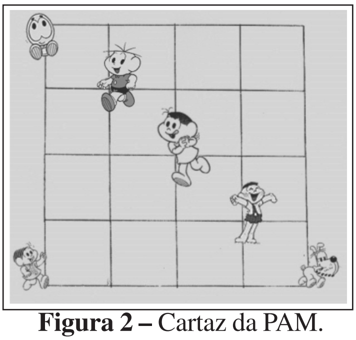

Figura 2 – Cartaz da PAM.

Subtarefa (t_1): *revelar a diferença entre a forma antiga de Mônica* *visitar seus amigos e a nova forma*. É uma tarefa puramente teórica, cuja realização da *técnica* (τ) depende essencialmente dos conhecimentos prévios (conceito de aleatoriedade) e competência de interpretação de textos por parte dos sujeitos. A partir da história, os sujeitos devem mobilizar competências para distinguir experimentos (θ) determinísticos (forma antiga) e aleatórios (nova forma).

Subtarefa (t_2): *apresentar os possíveis resultados ao lançar uma moeda.* A *técnica* (τ) depende das características da moeda, que gera o espaço amostral cara ou coroa, $\Omega = \{C, X\}$.

Subtarefa (t_3): *revelar a chance de sair cara ou de sair coroa.* A *técnica* (τ) consiste na divisão do número de casos favoráveis (1) pelo número de casos possíveis (2), resultando um meio (½). Com efeito, na maior parte dos casos, os sujeitos desenvolvem competências em torno de espaços equiprováveis, pois assumem que a moeda é *honesta*. Consequentemente, os sujeitos atribuem ½ para a chance de cara e ½ para a chance de coroa. Ao assumir essa postura, os sujeitos mobilizam, *inconscientemente*, uma série de propriedades e axiomas (θ)[2], tais como: C e X são eventos mutuamente excludentes e sua união compõe o espaço amostral, isto é, trata-se de uma partição do espaço amostral. Logo, se a probabilidade de cara é ½, então, como coroa é o evento complementar de cara, a sua probabilidade será 1 – ½. Também, a probabilidade da união de dois eventos mutuamente excludentes é igual à soma de suas probabilidades. Observamos ser muito raro que algum sujeito atribua outro valor, diferente de ½, ou questione a 'honestidade' da moeda. Isto porque a maioria dos exemplos trabalhados na Educação Básica se refere a experimentos equiprováveis, gerados por situações tais como lançamento da moeda, de dados, escolha de carta de um baralho etc. Nesse nível escolar, os sujeitos não são desafiados, por exemplo, a pensar na chance de uma semente germinar ou de um ovo de tartaruga vingar, chegar a completar um ano de vida, ou ainda chegar à idade adulta.

Subtarefa (t_4): *decidir se todos os amigos têm a mesma chance de ser visitados ou não.* Essa tarefa tem por objetivo verificar o quanto os sujeitos estão impregnados pela concepção de equiprobabilidade (θ), isto é, se são cinco amigos, então, para encontrar a chance, os sujeitos dividem (τ) o número de

[2] Segundo Bayer et al. (2005), as bases da teoria axiomática de probabilidade moderna se devem ao russo Andrei Kolmogorov, para quem a probabilidade é uma função definida em uma classe de eventos do espaço amostral (Ω) que satisfaz três axiomas: Axioma 1: $P(A) \geq 0$, para todo $A \in \Omega$; Axioma 2: $P(\Omega) = 1$; Axioma 3: Se $A \cap B = \phi$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, para todo A e $B \in \Omega$. Observamos que, embora essa formalização não seja recomendada para a Educação Básica, o professor deve ter conhecimentos básicos desses axiomas que alicerçam a teoria de probabilidades e que podem ser trabalhados de forma intuitiva nesse nível de ensino.

casos favoráveis (1) pelo número de casos possíveis (5), resultando um quinto (1/5). Se for esta a resposta, significa que os sujeitos não percebem que os caminhos são igualmente equiprováveis, mas os amigos não, pois eles têm um número diferente de caminhos que levam a Mônica para visitá-los. Ou seja, apesar da *técnica* (τ) ser a mesma utilizada na t_3, a *tecnologia* (θ) muda, pois o espaço amostral não é formado pelos amigos, e sim, pelos possíveis caminhos, decorrentes do lançamento da moeda quatro vezes, significando que se trata de um evento composto por quatro eventos independentes. Nesse caso, ficaria evidenciada a ausência de competência para a interpretação do problema ou desconhecimento da Combinatória, pois esta *técnica* auxilia no cálculo de probabilidades e permite relacionar a ideia de experimento composto a partir de um espaço amostral discreto e das operações combinatórias, conforme orientação dos PCN.

Subtarefa (t_5): *imaginar o lançamento de uma moeda 4 vezes e anotar os resultados.* É uma tarefa elementar, que requer identificar a maneira (τ) como os sujeitos representam uma sucessão de eventos aleatórios. Nesse caso, é possível observar os seguintes registros: XXCC; (X, X, C, C); (coroa, coroa, cara, cara); duas caras e duas coroas. Os dois primeiros são registros institucionais, isto é, são representações escolares. O terceiro registro é mais intuitivo e o quarto registro não explicita a ordem da ocorrência dos eventos, que, neste caso, é essencial para examinar os caminhos possíveis.

4.2 Sessão II: a experimentação aleatória e a probabilidade frequentista

Esta sessão tem por finalidade verificar o impacto dos resultados da experimentação aleatória nas concepções prévias de probabilidade. Ela é composta de duas subsessões: a primeira compreende a realização do processo experimental e, a segunda, a organização dos resultados em dois tipos de registros semióticos: tabelas e gráficos de colunas.

4.2.1 Realização do processo experimental

Subtarefa (t_1): *executar 30 vezes o experimento utilizando uma moeda e anotar o resultado no Quadro 1.*

Para Mônica visitar um amigo, os sujeitos devem lançar uma moeda quatro vezes. Se sair cara (C), Mônica andará um quarteirão para o Norte, se sair coroa (X), um quarteirão para o Leste. Por exemplo, se sair a sequência *cara, cara, coroa, cara*, anotar na coluna a sequência *CCXC,* e na coluna do amigo visitado: Cebolinha.

Repetição	Sequência	Amigo visitado
1	CCXC	Cebolinha
2		
...		
30		

Quadro 1 – Resultados da experimentação

A realização dessa tarefa consiste no lançamento da moeda, o registro dos respectivos resultados dos eventos, assim como a identificação do amigo a ser visitado, tudo isso constitui a *técnica* (τ), que é determinada pela coordenação entre o resultado do lançamento da moeda e o caminho percorrido. Esta tarefa não demanda nenhuma competência cognitiva, apenas coordenação de resultados e registros. Crianças pequenas podem apresentar dificuldades na identificação do resultado e o caminho a ser percorrido.

Subtarefa (t_2): *selecionar um resultado obtido em t_1 e desenhar no cartaz o caminho percorrido pela Mônica.* A *técnica* (τ) consiste na representação gráfica do caminho percorrido pela Mônica para visitar um dos amigos. O interesse é observar a coordenação entre o registro simbólico e o gráfico.

Subtarefa (t_3): *identificar quem tem mais chance de ser visitado, se a Magali ou o Horácio.* A observação-comparação é uma das *técnicas* (τ) que permite realizar essa tarefa, justificada pelas frequências absolutas (θ). Assim, observando os resultados obtidos em t_1, espera-se que a Magali seja identificada como a mais visitada, e o Horácio, o menos visitado, ou até aquele que não será visitado. Naturalmente, o sujeito tenderá a formar sua opinião de acordo com os resultados da experimentação; contudo, se a despeito da frequência observada os sujeitos insistirem que os personagens têm a mesma chance, significa que não conseguiram relacionar os caminhos possíveis que levam a Mônica aos amigos. Isto é esperado para sujeitos que nunca tiveram contato com as técnicas da Combinatória.

Subtarefa (t_4): *identificar quem tem mais chance de ser visitado*, *se o Horácio ou o Bidu.* Tanto a *técnica* (τ) quanto a *tecnologia* (θ) são a mesma da tarefa anterior. Nessa tarefa, o sujeito é confrontado com a situação em que os dois personagens têm a mesma probabilidade de ser visitados, que é a menor de todas. Como a amostra (nº de repetições do experimento) é pequena (trinta, 30), corre-se o risco de que nenhum dos dois seja visitado ou um seja mais visitado que o outro. Espera-se que os sujeitos percebam que, para visitar Horácio, têm de sair quatro caras e, para visitar Bidu, quatro coroas. Se os sujeitos persistem em basear suas respostas pela frequência observada, depreende-se que ainda não conseguiram associar as combinações possíveis que levam aos amigos.

Subtarefa (t_5): *revelar se existe a chance de Mônica não visitar algum amigo.* Aqui, a *técnica* (τ) consiste na *observação-identificação* de ausência de algum amigo no resultado obtido na subtarefa 1, caso isso ocorra na experimentação, poderá induzir o sujeito desatento a concluir que sim. Contudo, essa técnica é errada, pois, para resolver esta tarefa, o sujeito tem de pensar em termos de possibilidades e não calcar sua opinião pelo resultado da experimentação aleatória.

Subtarefa (t_6): *verificar o impacto dos resultados da experimentação na resposta da Subtarefa (t_4) da Sessão I: todos os amigos têm a mesma chance de ser visitados?* A *técnica* (τ) para realizar essa tarefa consiste na comparação de concepção de probabilidades obtidas em t_4 da Sessão I, com a formada após a experimentação, a partir das frequências (θ) observadas no Quadro 1. Espera-se que os sujeitos reflitam sobre suas concepções de equiprobabilidade (θ) e mudem-nas, caso achem necessário.

4.2.2 Organização dos resultados e a probabilidade frequentista

Subtarefa (t_7): *sistematizar os resultados da experimentação na Tabela de Distribuição de Frequência fornecida* (Tabela 1). A realização desta tarefa requer mais de uma técnica. A primeira consiste na identificação-contagem (τ_1) das repetições de cada personagem no experimento (Quadro 1), permitindo registrar a frequência absoluta (f_i). A segunda (τ_2) consiste no cálculo da frequência relativa (fr_i), obtida pela expressão f_i/n, onde n é o total de repetições do experimento (n = 30). Essa técnica é fornecida junto com a tabela. Cada fr_i é obtida recorrendo-se aos resultados originados com τ_1 aplicados em f_i/n, cuja soma deve ser 1, que corresponde à probabilidade do espaço amostral.

Observa-se que a frequência relativa (fr_i) é denominada probabilidade frequentista, pois é utilizada como uma estimativa da probabilidade teórica, quando o tamanho da amostra tende ao infinito. A terceira (τ_3) consiste na transformação da frequência relativa em porcentagem.

Tabela 1 – Número de visitas que cada amigo recebeu da Mônica e frequência relativa

Amigo	Nº de vezes que foi visitado (f_i)	Frequência relativa (fr_i)	Frequência relativa (%)
Horácio			
Cebolinha			
Magali			
Cascão			
Bidu			
Total	30	1,00	100,00

Onde $fr_i = f_i/30$, que representa uma estimativa da probabilidade frequentista.

Subtarefa (t_8): *verificar o impacto da organização dos resultados na TDF, na questão: Todos os amigos têm a mesma chance de ser visitados?* Observar que, na tarefa anterior, os sujeitos formam sua opinião examinando os dados *desorganizados* presentes no Quadro 1; enquanto, que nesta subtarefa, os dados estão organizados na TDF, o que facilita a percepção de padrões resultantes da experimentação. Aqui, a *técnica* (τ) também consiste na comparação de dois tipos de registros dos resultados, sendo que, no Quadro 1, a percepção de padrões será muito difícil, ao contrário da TDF, que já explicita a probabilidade frequentista (fr_i) (θ). Dessa forma, espera-se que os sujeitos que ainda afirmavam que todos os amigos têm a mesma chance de ser visitados comecem a desconfiar dessa concepção, revendo sua opinião a partir da evidência dos resultados.

Subtarefa (t_9): *construir um gráfico de colunas para representar a frequência relativa (*fr_i*) e comparar com os gráficos dos colegas. Responder se os gráficos são iguais e explicar o que pensam sobre isso.*

Para realizar essa tarefa, recomenda-se o uso de grades (τ) (malhas, como mostra a Figura 3) com a mesma escala, em papel de transparência, que permite a sobreposição dos gráficos, bem como o uso de canetas de transparência.

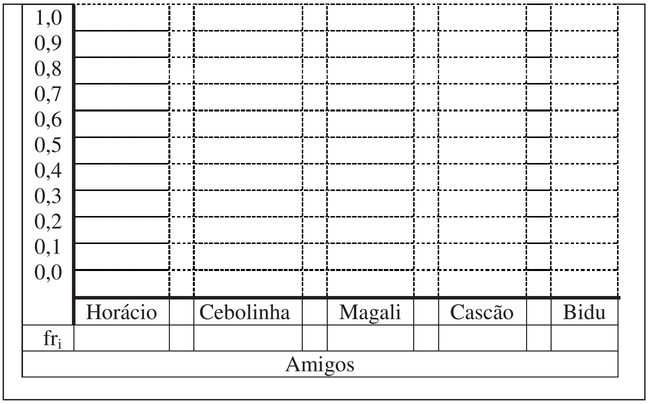

Figura 3 – Grade para desenhar o gráfico de colunas.

A realização desta tarefa requer três técnicas. A primeira *técnica* (τ_1) é a construção do gráfico de colunas a partir da conversão da frequência relativa (fr_i), da terceira coluna da TDF (representação simbólica), na altura da coluna correspondente a cada amigo (representação gráfica). Acredita-se que esta tarefa seja simples para os sujeitos, uma vez que a grade já traz todas as especificações do gráfico (escolha dos eixos, calibração de escala etc.). A segunda *técnica* (τ_2) refere-se à comparação dos gráficos realizados entre as duplas, e dependerá da capacidade de percepção de padrões (θ) subjacentes aos gráficos. A terceira *técnica* (τ_3) consiste na leitura *globalizada* dos gráficos, essa comparação dependerá da percepção *relativizada* da variabilidade dos resultados devido ao processo de experimentação aleatória (θ). Observa-se que, provavelmente, todos os resultados serão diferentes, mas, apesar disso, os sujeitos devem perceber que existe um padrão subjacente. Espera-se que os formatos tendam a ser simétricos, com a coluna mais alta no centro (Magali) diminuindo a altura à medida que os amigos se afastam para os extremos, um possível resultado é mostrado no gráfico da esquerda da Figura 6.

4.3 Sessão III: a modelagem matemática e a probabilidade clássica ou Laplaciana.

Esta sessão tem por finalidade verificar o impacto dos resultados da modelagem matemática no desenvolvimento do conceito de probabilidade. Ela é composta de duas subsessões: a primeira compreende a realização do processo de modelagem e, a segunda, a organização dos resultados em dois tipos de registros semióticos: tabelas e gráfico de colunas.

4.3.1 Realização da modelagem matemática

Esta subsessão tem por finalidade construir a noção de espaço amostral utilizando a árvore de possibilidades, e calcular a probabilidade clássica ou Laplaciana, em contexto de equiprobabilidade.

Para isso, a SD apresenta tarefas que exploram três tipos de representação: na primeira, do tipo figural, os sujeitos devem desenhar os caminhos sobre o croqui; na segunda, do tipo simbólico, os sujeitos devem utilizar os símbolos C e X para descrever os caminhos; na terceira, o diagrama de possibilidades, que também é uma representação figural, na qual os sujeitos constroem os caminhos, porém acompanhando cada lançamento da moeda, como explicitado a seguir.

Subtarefa (t_1): *desenhar no croqui todos os caminhos possíveis que levam a Mônica até a Magali, utilizando lápis de cor ou linhas diferentes.* Nessa tarefa, a *técnica* (τ) radica na identificação/no traço dos caminhos percorridos. É esperado que esta tarefa seja confusa, pelo fato de a *técnica* (τ) utilizar linhas traçadas no croqui, que, necessariamente, se sobrepõem, conforme a representação na Figura 4, o que pode acarretar no esquecimento de algum caminho. Esse fato é observável também na tarefa seguinte.

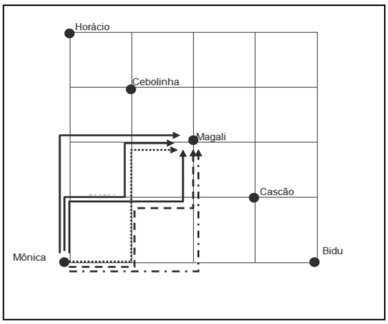

Figura 4 – Croqui com desenho dos caminhos

Subtarefa (t_2): *escrever o número (quantidade de caminhos) e as sequências que levam a Mônica à Magali. Identificar o que esses caminhos têm em comum.* Neste caso, a *técnica* (τ) consiste na leitura e contagem dos caminhos percorridos, que são seis, relacionando cada caminho com o símbolo correspondente C ou X, que deve ser utilizado para o registro dos referidos caminhos, a saber: XCXC; CCXX; CXCX; XXCC; CXXC; XCCX. Contudo, estas duas formas (numérica e simbólica) de representar os caminhos não garantem que os sujeitos encontrem todos os caminhos possíveis, a menos que eles conheçam os conceitos de análise combinatória (θ). É esperado que os sujeitos percebam que, para que a Mônica visite a Magali, devem sair duas caras, independentemente da ordem.

Subtarefa (t_3): *indicar o número total de caminhos possíveis*. Com essa tarefa, pretende-se verificar se os sujeitos, a partir das duas tarefas anteriores, conseguem generalizar o número total de caminhos possíveis para todos os amigos, utilizando a leitura e contagem (τ) dos caminhos. Essa generalização pode ser justificada pela mobilização dos conceitos da análise combinatória (θ).

Subtarefa (t_4): *completar a árvore de possibilidades, anotar a sequência sorteada, o número de caras e o amigo visitado.* Nessa tarefa, se fornece aos sujeitos uma representação da árvore de possibilidades incompleta. A Figura 5 ilustra a tarefa completa. A representação de todos os caminhos pela árvore de possibilidades é uma *técnica* (τ_1) justificada pela análise combinatória (θ), que permite representar todos os caminhos possíveis, além de explicitar o espaço amostral (Ω) associado ao experimento *lançar a moeda quatro vezes*. Sua utilização passa pela mobilização do bloco *logôs*, pois não é uma técnica intuitiva.

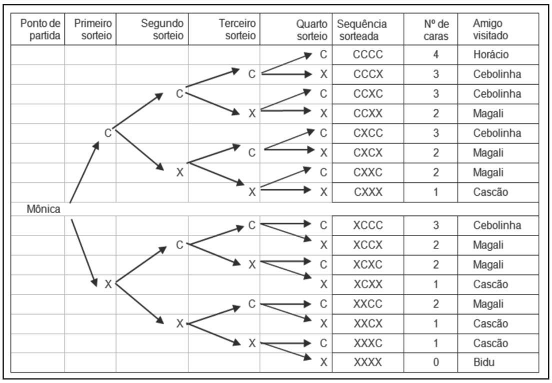

Figura 5 – Diagrama de possibilidades.

Para representar a árvore, os sujeitos têm de saber que cada lançamento da moeda possibilita a representação de dois ramos (C ou X), e que cada ramo vai bifurcando-se em outros dois ramos a cada novo lançamento da moeda. Em seguida, os sujeitos devem anotar (τ_2) o resultado do ramo completo, obtendo a sequência sorteada, por exemplo, CCCC; identificar/ler/contar (τ_3) o número de caras, no exemplo, quatro (4) e, por fim, identificar (τ_4) o amigo visitado, podendo recorrer à tarefa anterior que ilustra os personagens em questão. A construção da árvore deve levar os sujeitos a perceber que se trata de eventos compostos, a partir do lançamento da moeda quatro vezes; que o resultado de um lançamento da moeda não afeta o resultado de outro lançamento; que é importante a ordem da sequência, pois essa determina o caminho a ser percorrido; porém, se o objetivo é o amigo a ser visitado, não importa a sequência e sim apenas o número de caras. Também deve propiciar a emergência do espaço amostral, que é composto por Ω = {CCCC, CCCX, CCXC,..., XXXX}, como ilustra a Figura 5.

Subtarefa (t_5): *escrever o número de caminhos que existem ao todo.* A *técnica* (τ) compreende a contagem/o registro da cardinalidade do espaço amostral na tarefa anterior. Se os sujeitos têm conhecimento dos conceitos de análise combinatória (θ), poderão perceber que a cardinalidade do espaço amostral é 16, ou seja, 2 x 2 x 2 x 2 ou 2^4.

Subtarefa (t_6): *revelar se existe uma relação comum a todos os caminhos que levam a cada um dos amigos: Horácio, Cebolinha, Magali, Cascão e Bidu*. Esta tarefa tem como objetivo verificar se os sujeitos relacionam o número de caras ao amigo visitado. A *técnica* (τ) consiste na leitura e associação da representação simbólica (CCXX), representação numérica e linguagem natural (nome do amigo).

4.3.2. Organização dos resultados e a probabilidade clássica ou Laplaciana

Subtarefa (t_7): *sistematizar os resultados da árvore de possibilidades na Tabela de Distribuição de Frequência fornecida (Tabela 2), registrando o número de caminhos para cada amigo, a probabilidade clássica (Laplaciana) expressa em fração e em decimal (p_i).*

Esta tarefa envolve as mesmas técnicas para construir a TDF, da subtarefa t_7 em 4.2.2. A primeira *técnica* (τ_1) consiste na identificação/contagem/

no registro do número de caminhos na árvore de possibilidades (Figura 5) que levam a Mônica a visitar cada amigo e registrar na segunda coluna da Tabela 2. Espera-se que todos os sujeitos cheguem ao mesmo resultado, a menos que errem na contagem ou na construção do diagrama de possibilidades.

Novamente, trata-se de uma conversão de registros, de uma representação figural/simbólica/numérica para uma representação em tabela. A segunda *técnica* (τ_2) consiste no registro da probabilidade clássica (número de eventos favoráveis sobre o número de eventos possíveis), em forma de fração, na terceira coluna da Tabela 2. E a terceira *técnica* (τ_3) radica no tratamento do resultado obtido com a técnica anterior, converter a fração para representação em número decimal (p_i), utilizando uma calculadora, e registrar na quarta coluna da Tabela 2. A Tabela 3 mostra o resultado esperado, a ser encontrado por todas as duplas.

Tabela 2 – Arcabouço da TDF fornecida

Amigo	Nº de caminhos	Probabilidade clássica[1] (p_i)	
		Fração	Decimal[2]
Horácio			
Cebolinha			
Magali			
Cascão			
Bidu			
Total	16	1	1,0000

[1] Nº de caminhos/total de caminhos.
[2] Efetuar a divisão para expressar na forma decimal.

Tabela 3 – Número de caminhos e probabilidade clássica

Amigo	Nº de caminhos	Probabilidade clássica[1] (p_i)	
		Fração	Decimal[2]
Horácio	1	1/16	0,0625
Cebolinha	4	4/16	0,2500
Magali	6	6/16	0,3750
Cascão	4	4/16	0,2500
Bidu	1	1/16	0,0625
Total	16	1	1,0000

Subtarefa (t_8): construir um gráfico de colunas para representar a probabilidade clássica (p_i) com base nos dados da Tabela 3. Comparar os resultados com os dos colegas. Escrever uma conclusão. Para esta tarefa, da mesma forma que na tarefa t_9 em 4.2.2, os sujeitos recebem uma malha idêntica, assim como canetas de transparência. Aliás, as duas grades se encontram em uma mesma página, pois o intuito é tanto a comparação entre colegas, bem como entre os dois gráficos.

A realização desta tarefa requer três técnicas. A primeira *técnica* (τ_1) consiste na construção do gráfico de colunas a partir da conversão da probabilidade clássica (p_i), da quarta coluna da Tabela 3. A segunda *técnica* (τ_2) compreende a leitura e comparação dos gráficos, essa comparação possibilitará constatar que, ao contrário do que aconteceu na t_9 (em 4.2.2), com o gráfico de colunas da frequência relativa (probabilidade frequentista: fr_i), nesta tarefa, todas as duplas apresentarão o mesmo gráfico e que esses resultados serão sempre iguais porque se referem a resultados teóricos previstos, configurando-se um gráfico simétrico, pois a coluna da Magali terá a maior probabilidade/altura (0,3750), a coluna do Cascão e Cebolinha, as segundas maiores probabilidades/alturas e iguais (0,2500) e a coluna do Horácio e Bidu, as menores probabilidades/alturas e iguais (0,0625), como pode ser observado no gráfico da direita da Figura 6.

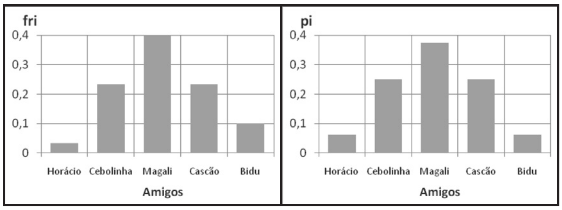

Figura 6 – Exemplo de uma possível configuração para a probabilidade frequentista e a probabilidade clássica.

4.4 Sessão IV: comparar as duas formas de atribuir probabilidades

Esta sessão tem como objetivo verificar se os sujeitos, após a realização de todas as tarefas, conseguem perceber que a frequência relativa (fr_i) é apenas uma estimativa do valor da probabilidade teórica, cujo resultado varia de amostra para amostra. Entretanto, todas as amostras apresentam uma tendência, muito próxima da probabilidade clássica, calculada a partir da árvore de possibilidades, pela modelagem matemática.

Subtarefa (t_1): *registrar e comparar a probabilidade frequentista, a partir da estimativa da probabilidade, pela frequência relativa* (fr_i), *e a probabilidade clássica (p_i) para cada amigo a ser visitado numa tabela comparativa (Tabela 4).* A *técnica* (τ) consiste na transcrição da frequência relativa (fr_i) da terceira coluna da Tabela 1 e a probabilidade clássica (p_i), da quarta coluna da Tabela 3, para a Tabela 4, o que não deve apresentar dificuldade.

Tabela 4 – Quadro comparativo da atribuição de probabilidades

Amigo	Frequência relativa (fr_i)	Probabilidade clássica (p_i)
Horácio		
Cebolinha		
Magali		
Cascão		
Bidu		
TOTAL		

Subtarefa (t_2): *relatar a diferença entre essas duas formas de atribuir probabilidades*.

Essa tarefa tem como objetivo verificar se os sujeitos conseguem perceber a diferença entre a probabilidade frequentista (fr_i) e a probabilidade clássica (p_i). A *técnica* (τ) consiste na comparação das duas probabilidades (fr_i) e (p_i). Essa *técnica* é justificada pela percepção/pelo conhecimento (θ) de que a probabilidade dada pela frequência relativa depende do número de realizações do experimento, ou seja, é uma estimativa da probabilidade teórica, que varia de amostra para amostra. Já a probabilidade clássica envolve todo o espaço amostral e independe da experimentação.

Subtarefa (t_3): *escolher qual dessas duas formas de atribuir probabilidades é a mais adequada e justificar essa escolha.*

A *técnica* (τ) radica na *percepção/comparação* das diferenças entre essas duas formas de atribuir probabilidades. Os sujeitos devem sintetizar todas as conclusões, o que implica a capacidade de síntese. Devem perceber que, se optarem pelas frequências relativas, ficarão vulneráveis aos resultados da amostra e que, nesse caso, seria mais razoável optar pela probabilidade clássica, que modela adequadamente esta situação. Igualmente, devem perceber que, se não existisse um modelo teórico, a experimentação aleatória seria uma forma de estimar essas probabilidades desconhecidas.

Subtarefa (t_4): *refletir sobre a coerência da nova forma de Mônica visitar seus amigos.*

A *técnica* (τ) consiste na comparação das formas que a Mônica usa para visitar seus amigos. Aqui, os sujeitos deverão lembrar a forma determinística com a qual a Mônica visitava seus amigos, em que todos os amigos eram igualmente visitados. Já na nova forma, o amigo que estiver na posição central (θ) do croqui (bairro) terá uma chance maior (0,3675), os amigos vizinhos ao centro terão chance de 0,25 e os dos extremos, 0,0625, isto é, para os amigos mais longe do *centro*, é menor a chance de ser visitados.

Subtarefa (t_5): *se não for coerente, indicar outra forma de sortear o amigo a ser visitado pela Mônica.* Esta tarefa tem como objetivo verificar se os sujeitos pensam em outras formas aleatórias de Mônica visitar seus amigos. Uma solução possível é utilizar a *distribuição uniforme* (θ) para justificar o sorteio (τ) do amigo visitado, colocando o nome dos cinco amigos em uma urna e sorteá-los.

5 Considerações finais

Em geral, observando-se os livros didáticos, pode-se perceber que estes apresentam a *praxeologia* que parte da apresentação teórica dos conteúdos, do bloco *logôs* [θ/Θ] para o bloco *praxe* [T/τ], que designamos de praxeologia usual.

Incentivar a participação ativa dos alunos na realização de tarefas pode propiciar a inversão do sentido citado. Tal *inversão* na construção dos conceitos se faz necessária no processo contínuo de formação de professores e alunos.

Essa discussão vem ao encontro das preocupações levantadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais, relativas ao ensino de Probabilidade e Estatística na Educação Básica, que, como já visto, recomenda a metodologia da *Resolução de Problemas* como um dos caminhos para se fazer Matemática na sala de aula.

Nesse sentido, podemos constatar que a PAM inverte o sentido da praxeologia usual da instituição, pois parte de uma situação-problema, a partir da qual emergem as concepções intuitivas de probabilidade, a probabilidade frequentista e a probabilidade clássica. Além disso, propicia uma constante interação das tarefas com o sujeito, o qual sempre está sendo desafiado a tomar decisões a cada resultado, invertendo, assim, o sentido da praxeologia usual.

A análise *a priori* das tarefas que constituem a sequência PAM, segundo a TAD, reveste–se de maior importância, pois fornece uma análise mais fina e aprofundada de cada atividade, permitindo verificar a adequação das tarefas aos objetivos propostos na SD. Ao explicitar a técnica e a tecnologia, a TAD permite encontrar possíveis conflitos na solicitação das tarefas, como, por exemplo, na solicitação da mudança ou não de opinião sobre a questão *Todos os amigos têm a mesma chance de ser visitados?*, não fica explícito para o sujeito se essa mudança é em relação à opinião na primeira tarefa (Sessão I, subtarefa t_4) ou se é em relação à tarefa anterior (Sessão II, subtarefa t_6).

Esses resultados nos permitem fazer correções e aprimoramento da SD, uma vez que, sendo disponibilizada no AVALE, pressupõe-se que qualquer sujeito seja capaz de ler as tarefas e respondê-las sem qualquer ambiguidade, dispensando-se, assim, a presença de um instrutor, ou alguém que tire dúvidas. Além disso, espera-se que a análise apresentada aqui venha contribuir não só no desenvolvimento de pesquisas, mas também no processo de ensino e aprendizagem de Probabilidade.

Referências

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da Matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

BAYER, A.; BITTENCOURT, H.; ROCHA, J.; ECHEVESTE, S. Probabilidade na escola. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA, 3. 2005, Canoas. **Anais...,** Canoas: ULBRA, 2005. Disponível em: <http://www.exatas.net/artigo_ciem2.pdf>. Acesso em: 05 nov. 2010.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Fundamental, 1997.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Fundamental, 1998.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN Ensino Médio:** Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2002.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações curriculares nacionais para o Ensino Médio –** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2006.

CAZORLA, I. M.; SANTANA, E. R. S. **Tratamento da Informação para o Ensino Fundamental e Médio**. Itabuna, BA: Via Litterarum, 2006.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. **Recherches en Didactique des Mathématiques,** Grenoble., v. 12, n. 1, p. 73-112, 1992.

FERNANDEZ, D.; FERNANDEZ, D. X. O prazer de aprender probabilidade através de jogos: descobrindo a distribuição Binomial. In: CONFERÊNCIA INTERNACIONAL "EXPERIÊNCIAS E EXPECTATIVAS DO ENSINO DE ESTATÍSTICA – DESAFIOS PARA O SÉCULO XXI", 1999, Florianópolis. **Anais...,** Florianópolis, SC: UFSC, 1999. p. 104-111.

HENRIQUES, A. **Dinâmica dos Elementos da Geometria Plana em Ambiente Computacional Cabri-Géomètre II.** Ilhéus, BA: Editus, 2001.

Submetido em Junho de 2010.
Aprovado em Novembro de 2010.