



# Linguagem, Estratégia e Nível de Raciocínio de Variação dos Alunos do Ensino Fundamental II

## Language, Strategy and Reasoning's Level of Variation of Secondary Students

Cláudia Borim da Silva\*  
Verônica Yumi Kataoka\*\*  
Irene Maurício Cazorla\*\*\*

### Resumo

Este trabalho objetivou investigar a linguagem, a estratégia e o nível de raciocínio de variação de 25 alunos de oitavo e nono anos do Ensino Fundamental na solução de três tarefas, utilizando suas medidas antropométricas. As respostas dos alunos foram categorizadas usando análise de conteúdo e a taxonomia SOLO. Houve aumento na quantidade e qualidade do uso dos termos de variação no decorrer do desenvolvimento das tarefas. A estratégia que apresentou aumento foi o intervalo central de valores que contém a maior quantidade de observações, importante noção intuitiva da densidade da distribuição. Níveis mais altos de variação foram observados durante as atividades, indicando que os alunos foram se apropriando das ferramentas estatísticas para analisar variação. Devido às contribuições observadas do uso gráfico de pontos e diagrama da caixa no desenvolvimento do raciocínio de variação, outras atividades precisam ser desenvolvidas para verificar sua efetividade na construção do conceito de intervalo interquartil.

---

\* Doutora em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica (PUC). Professora da Universidade São Judas Tadeu (USJT), São Paulo, SP, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Taquari, 546, Mooca, CEP: 03166-000. São Paulo, SP, Brasil. *E-mail*: dasilvm@uol.com.br.

\*\* Doutora em Estatística e Experimentação Agropecuária pela Universidade Federal de Lavras (UFLA). Professora da Universidade Bandeirante de São Paulo (UNIBAN), no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, São Paulo, SP, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Braz Leme, 3029, Santana, CEP: 02022-011. São Paulo, SP, Brasil. *E-mail*: veronicayumi@terra.com.br.

\*\*\* Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Professora Titular da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), Ilhéus, BA, Brasil. Endereço para correspondência: Alameda Florença 137, apto. 703, Pituba, CEP: 41830-460. Salvador, BA, Brasil. *E-mail*: icazorla@uol.com.br.

**Palavras-chave:** Linguagem informal de variação. Estratégia de variação. Nível de raciocínio de variação. Taxonomia SOLO.

### Abstract

This study explored language, strategy and level of reasoning regarding variation with twenty-five eighth and ninth graders while they solved three tasks, using their anthropometric measures. Students' answers were categorized using content analysis and SOLO taxonomy. There was an increase in the quantity and quality of variation terms during the development of the tasks. The strategy that increased in frequency during the tasks was modal clump, an important strategy to promote intuitive notions of distribution density. Higher levels of reasoning about variation were observed, indicating that students appropriated new tools for analyzing variation. In light of the contributions observed from using dot plots and box plot for developing variation reasoning, additional activities should be developed with these tools to evaluate their effectiveness for building the interquartile range concept.

**Keywords:** Non-conventional language of Variation. Variation's Strategy. Variation's Reasoning Levels. SOLO Taxonomy.

## 1 Introdução

Wild e Pfannkuch (1999) consideram variação como um dos componentes do pensamento estatístico; Watson e Kelly (2002) salientam que, sem variação, não seria necessário haver Estatística, e Reid e Reading (2008) descrevem Estatística como a “ciência da variação”. A associação do conceito de variação com a própria Estatística tem motivado pesquisadores a investigar o processo ensino-aprendizagem de variação, sob diferentes óticas.

O conceito de variação faz parte do currículo de Matemática do Ensino Médio na maioria dos países e também no Brasil, como mostra explicitamente o PCN+ (BRASIL, 2002) e os resultados de pesquisas têm apontado para a possibilidade e necessidade de desenvolver, intuitiva e precocemente, este conceito com as crianças.

No entanto, trabalhar variação com crianças e adolescentes requer reflexão sobre atividades, formas de avaliação e recursos diferenciados dos utilizados na graduação, de maneira que possa contribuir efetivamente para promover níveis mais avançados de raciocínio e letramento estatísticos.

Visando contribuir com essa linha de investigação, o objetivo desse trabalho foi explorar a terminologia, a estratégia e o nível de raciocínio de variação, de forma intuitiva, com alunos de oitavo e nono anos do Ensino Fundamental,

por meio do desenvolvimento da sequência de ensino denominada *Homem Vitruviano*.

Este trabalho adotou o termo variação para expressar tanto variabilidade, que é uma característica inerente aos fenômenos, como as medidas estatísticas que descrevem essa variabilidade, tais como a amplitude, o intervalo interquartil e o desvio padrão, entendidos como aspecto formal do conceito por Garfield e Ben-Zvi (2008).

## 2 Método

### 2.1 Participantes

Participaram desta pesquisa 25 alunos, sendo onze do 8º ano e catorze do 9º ano, matriculados em escola pública do interior do estado da Bahia. A amostra foi por conveniência, escolhida devido ao fato da professora de Matemática ter sido aluna de graduação de uma das autoras e ter apresentado interesse em pesquisar sobre o ensino de Estatística.

É importante observar que só participaram da pesquisa os alunos cujos pais assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido<sup>1</sup>, o que representou cerca de 50% de cada turma. Esse índice de participação culminou no desenvolvimento da pesquisa em horário diferenciado do curso, sem proporcionar qualquer benefício especial em relação à nota de Matemática do semestre. A pesquisa foi desenvolvida com os alunos de 8º e 9º anos ao mesmo tempo, estimulando-os a fazer parcerias para a solução das tarefas.

### 2.2 Procedimentos

A sequência do ensino do *Homem Vitruviano* vem sendo desenvolvida no Projeto AVALE (Ambiente Virtual de Apoio ao Letramento Estatístico). Uma das metas desse projeto é auxiliar professores a ensinar Estatística na Escola Básica, tanto no ambiente papel e lápis como no ambiente computacional.

A partir da leitura e discussão de textos sobre o Homem Vitruviano e as proporções matemáticas do corpo humano estabelecidas por Leonardo Da Vinci, os estudantes escolheram algumas medidas antropométricas para verificar, empiricamente, se essas relações se confirmavam com eles. Usando fita métrica, mediu-se: a altura, a envergadura dos braços, o comprimento do cotovelo, da

---

<sup>1</sup> Aprovado pelo comitê de ética da Universidade Estadual de Santa Cruz em 22 de Outubro de 2008, protocolo número 205/08.

palma e palmo da mão, o braço e o perímetro cefálico dos alunos (Anexo 1).

Duas relações apresentaram mais curiosidade por parte dos alunos: a medida da envergadura dos braços é igual à altura, e o tamanho do pé é igual à medida do antebraço. Para a verificação da segunda relação, foram questionados sobre o número do calçado, evitando desconfortos aos alunos em relação à medida do pé, permitindo trabalhar com uma variável discreta.

A discussão dos textos e a coleta de dados foram necessárias para o desenvolvimento da atividade, em duas diferentes perspectivas. A primeira envolveu o estabelecimento de confiança entre pesquisadoras e alunos, por meio do respeito, da ética e da descontração. A segunda perspectiva foi permitir o surgimento natural de hipóteses, informalmente colocadas à prova durante o trabalho.

A atividade foi realizada em dois dias de Julho de 2009, totalizando dezesseis horas; no primeiro dia, desenvolveu-se na escola dos alunos, e, no segundo dia, na Universidade Estadual de Santa Cruz. Os trabalhos contaram com uma entrevista inicial, realizada individualmente por uma das pesquisadoras, leitura dos textos, realização da coleta de dados, solução de várias tarefas desenvolvidas em duas fases e duas intervenções didáticas. A primeira fase objetivou desenvolver o raciocínio de variação, e as três tarefas propostas estão descritas de forma resumida no Quadro 1. A segunda fase teve como meta desenvolver o raciocínio de covariação e, por não ser o escopo deste trabalho, não será apresentada.

Tarefa proposta	Intervenção didática	Material de apoio
Tarefa 1 Observe o banco de dados e explique com suas palavras como é a altura dos alunos dessa turma, ou seja, interprete a altura dos alunos. Faça o mesmo para o número do calçado.	Nenhuma	Banco de Dados (Anexo 1)
Tarefa 2 Construam o gráfico de pontos ( <i>dotplot</i> ) na transparência que estamos fornecendo a vocês (que já tinha a escala construída), sendo um gráfico para a altura dos meninos e um para a altura das meninas. Escrevam uma frase para comparar a altura dos meninos e das meninas.	Após a realização do <i>dotplot humano</i> <sup>5</sup>	Gráfico de pontos
Tarefa 3 Imaginem que nós fizemos a atividade do Homem Vitruviano em três turmas diferentes e o gráfico de pontos (entregue aos alunos) representa o perímetro cefálico de cada turma. Escrevam uma frase para comparar o perímetro cefálico dessas 3 turmas.	Após a primeira intervenção didática	Gráfico de pontos

**Quadro 1** – Descrição das três tarefas

<sup>2</sup> *Dotplot humano* é um gráfico de pontos unidimensional (gráfico de dispersão unidimensional) construído com o próprio corpo dos alunos, os quais são alinhados em frente a uma escala métrica *gigante*, criada com dimensão que permite a cada aluno posicionar-se em um ponto da escala. O objetivo da utilização deste gráfico está apresentado mais adiante neste texto e está exemplificado na Figura 1.

Ao término das atividades, os alunos utilizaram o AVALE para observar a simulação do gráfico de pontos com o diagrama da caixa (*boxplot*) e a segunda intervenção de ensino foi realizada. Ressalta-se que essa fase será apresentada, mas os resultados não serão discutidos neste trabalho.

As tarefas foram solucionadas pelos alunos, em duplas ou trios. Os conceitos estatísticos (média, moda, mediana, amplitude total e amplitude interquartílica) foram discutidos a partir do gráfico de dispersão unidimensional, também denominado gráfico de pontos (*dotplot*). Toda a atividade foi gravada em vídeo e áudio, sendo que os responsáveis pelos alunos assinaram o Termo de Direito de Uso de Imagem.

### 2.3 Análise de Dados

A análise dos dados foi feita a partir das produções escritas e verbais dos alunos. Algumas produções foram utilizadas para exemplificar a categorização realizada, sendo transcritas sem qualquer modificação de linguagem e citadas pelas siglas dos nomes dos alunos.

Para definir as categorias de estratégias de variação foi feita análise de conteúdo (BARDIN, 1995) a partir das respostas dos sujeitos e de acordo com a revisão bibliográfica. A terminologia e as estratégias de variação empregadas colaboraram na classificação das respostas dos alunos em níveis de raciocínio de variação por meio da taxonomia SOLO (*Structure of the Observed Learning Outcome*) de Biggs e Collis (1991, p. 65).

O modelo hierárquico SOLO permite categorizar as respostas do aluno de acordo com a complexidade estrutural e o número de conceitos exigidos nas mesmas, avaliando unicamente o desempenho do aluno, em vez de avaliar a estrutura cognitiva desse indivíduo (BIGGS; COLLIS, 1982).

Segundo Panizzon, Pegg e Mcgee (2004), o SOLO tem duas características importantes, sendo a primeira o foco na natureza ou na abstração das respostas e é referida como modo de pensamento, que é o tipo de funcionamento intelectual requerido para direcionar adequadamente um estímulo particular. A segunda característica depende de uma competência individual para manipular, com sofisticação crescente, exemplos relevantes. Esta característica refere-se aos níveis de resposta, que ocorrem dentro dos modos de aprendizagem, fornecendo uma descrição hierárquica da natureza da estrutura das respostas.

Biggs e Collis (1991) definiram cinco modos de pensamento: sensomotor, icônico, concreto simbólico, formal e pós-formal. Quanto aos níveis de resposta,

esses mesmos autores definiram cinco estágios: Pré-estrutural; Uniestrutural; Multiestrutural; Relacional e Abstrato. Considerando que os alunos deste estudo estejam no modo de pensamento concreto simbólico, o nível Abstrato não foi utilizado na categorização, uma vez que o mesmo indica a transição para um modo de pensamento subsequente.

No nível Pré-estrutural o aluno comete erros de entendimento fundamental, apresentando respostas não significativas. No nível Uniestrutural o aluno apresenta diversas conclusões, que podem ser corretas, mas que não são coerentes entre si, focando apenas um aspecto relevante do raciocínio de variação. No nível Multiestrutural o aluno mostra entendimento, discute o conteúdo de forma significativa, tem conhecimento de uma quantidade razoável de conteúdos com várias respostas relevantes, mas não coordenadas, podendo apresentar algumas inconsistências. No Relacional o aluno integra as partes dentro de um todo de forma coerente, isto é, apresenta uma conclusão capaz de relacionar todos os aspectos relevantes, evidenciando uma coerência global. Contudo, a conclusão final pode não servir para todos os contextos.

As duas primeiras autoras fizeram a classificação das respostas de maneira independente, sendo que o índice mínimo de concordância foi de 83%. Após a análise, as respostas foram discutidas e encontrou-se um consenso.

### **3 Resultados**

#### **3.1 A entrevista**

A entrevista inicial tinha como objetivo identificar características dos alunos em relação à própria escola e à disciplina Matemática. Perguntou-se aos alunos se eles já haviam estudado ou já tinham ouvido falar de média, moda, mediana, gráficos e variação, com o intuito de verificar se eles tinham conhecimento desses conceitos estatísticos. Foram questionados sobre o gosto pela Matemática, para verificar uma possível influência de aspectos afetivos na trajetória escolar desta disciplina e, também, se já tinham sido reprovados na mesma.

A média da idade dos alunos foi de 15,4 anos (desvio padrão de um ano), sendo que o aluno mais jovem tinha 13 anos e o mais velho 17 anos. Esta

idade está acima da regular para a série e é explicada pelo número de reprovações que estes alunos já tiveram. Vinte e um alunos já haviam sido reprovados em algum ano escolar e, destes, quatro reprovaram na disciplina Matemática.

Dois alunos disseram não gostar de Matemática, sendo que um deles foi reprovado nesta disciplina. No que diz respeito ao conhecimento estatístico, vinte alunos disseram conhecer gráficos; nove, a média, dois a mediana e um aluno disse que já fez curso de Excel e sabia fazer os gráficos usando esse software. Nenhum aluno fez referência a qualquer assunto relacionado ao conceito de variação.

Este perfil dos alunos sugere pouca familiaridade com conceitos estatísticos importantes da distribuição como a média e a mediana, podendo dificultar o surgimento de respostas com nível mais avançado de raciocínio de variação. Segundo Reading e Reid (2006), as medidas de tendência central e de dispersão são dois (dentre cinco) componentes de uma distribuição e, conforme explicam Lehrer e Schauble (2002), a distribuição oferece uma organização conceitual para pensar sobre variação.

### 3.2 Raciocínio de variação identificado durante a realização das tarefas

A primeira tarefa solicitada aos alunos requereu a explicação da altura e do número do calçado dos alunos da sala; sugeriu-se que precisavam descrever essas características para uma pessoa que faria novos uniformes para a escola. Cada dupla utilizou diferentes estratégias para resolver a tarefa, conforme Tabela 1.

**Tabela 1** – Estratégias usadas pelos alunos para resolver a Tarefa 1.

Estratégia relacionada com variação	Estratégia usada pelos alunos para resolver a Tarefa 1	Número de duplas n = 12
Sim	Usa valores máximos ou mínimos	3
	Usa intervalo entre os valores máximos e mínimos	5
	Usa intervalo entre valores centrais	2
Não	Usa valor mais freqüente	2
	Usa alguns valores, que não são os mais freqüentes	2
	Soma os valores	1
	Calcula a média dos valores	2
	Observa a freqüência de cada valor da amostra	3

Para realizar a tarefa, foi entregue aos alunos uma cópia impressa do banco de dados (Anexo 1). Três duplas de alunos utilizaram a contagem do número de pessoas em cada valor diferente da amostra, mas nenhuma dupla fez qualquer representação gráfica ou tabular, a despeito da maioria dos alunos ter relatado conhecer gráficos. A não realização de uma representação da distribuição (gráfico ou tabela) pode dificultar a identificação de variação, pois “a distribuição se torna uma representação visual da variação dos dados” (MAKAR; CONFREY, 2005, p. 28).

No entanto, é interessante observar que cinco duplas de alunos usaram o intervalo entre os valores máximos e mínimos, também usado pelos participantes das pesquisas de Ben-Zvi (2004), e duas duplas usaram intervalos centrais que concentram a maioria das observações, estratégia também observada nos estudos de Makar e Confrey (2005), Silva e Coutinho (2008) e denominado por Konold et al. (2002) como *modal clump*.

A percepção desses intervalos é uma das estratégias mais importantes para construir o conceito de variação, porém atividades posteriores precisam ser desenvolvidas para que esses intervalos sejam construídos a partir de um ponto de referência, por exemplo, a média aritmética, evitando o surgimento de obstáculos para a aprendizagem do desvio padrão, uma das mais importantes medidas de variação. Esse obstáculo foi observado no estudo de Silva (2007) e foi um elemento que dificultou a compreensão do significado do desvio padrão.

Outra estratégia de raciocínio de variação é a percepção de diferenças na amostra (e não em relação a um ponto de referência) denominada por Loosen, Lioen e Lacante (1985) de *unlikeability*. Segundo esses autores, esforços didáticos precisam ser feitos para despertar diferentes estratégias de raciocínio sobre variação, de maneira a preparar o aluno para ampliar seu conhecimento acerca desse conceito.

O uso de valores máximos e/ou mínimos para descrever as variáveis é considerado uma estratégia mais elementar de raciocínio sobre variação, mas não menos importante. Esse tipo de raciocínio é inerente ao ser humano e foi uma das primeiras estratégias utilizadas pelos alunos de Ben-Zvi (2004) na comparação do número de letras de nomes israelenses e americanos.

A classificação das respostas em níveis de raciocínio de variação por meio da taxonomia SOLO foi feita pela análise de toda a solução da tarefa,



incluindo as diferentes estratégias e a linguagem utilizadas, como pode ser observado na Tabela 2.

**Tabela 2** – Número de respostas em cada nível de raciocínio de variação na Tarefa 1

Nível	Descrição do nível	Número de respostas (n = 12)
Pré-estrutural	Resposta não contempla nenhum aspecto de variação	2
Uniestrutural	Resposta apresenta uma estratégia de raciocínio de variação	6
Multiestrutural	Resposta apresenta duas estratégias de raciocínio de variação, sem relacioná-las	3
Relacional	Resposta relaciona pelo menos duas estratégias de raciocínio de variação	1

Uma das respostas no nível Pré-estrutural usava a média, sem nenhuma consideração de variação, tal como a apresentada pelos alunos TH, GB e RD: “os alunos da minha escola estadual eduardo catalão tem em média de altura de 1,75 e calçam 37”.

A maioria das respostas foi classificada no nível Uniestrutural, como pode ser observado na Tabela 2, pois contemplava apenas uma das estratégias de variação (Tabela 1), tal como a resposta de MN e AM, que utilizaram o intervalo entre o valor máximo e valor mínimo: “Os alunos da serie 7a e 8a da escola Eduardo Catalão tem uma altura entre 1,61 e 1,84, calçando um tamanho que varia entre 35 e 43 centímetros”.

Duas ou mais estratégias empregadas sem relacionamento entre si foram classificadas no nível Multidimensional, como a resposta de MC e TH: “O número do calçado é variado entre os alunos, o número vai de 35 a 42, os números mais usado entre ele são os números 37 e 38”. Esses alunos utilizaram a percepção de diferenças na amostra, quando usaram o termo *variado* e também utilizaram um intervalo com valores centrais da distribuição, mas sem relacioná-los. A única resposta classificada no nível Relacional foi das alunas TM e AP, que apresentou uma relação entre as mesmas duas estratégias usadas pelos alunos MC e TH.

Os alunos da Escola Catalão, da 7a e 8a série tem alturas e números de calçado, alguns são diferenciados e outros são iguais. A altura das alunas é de 1,57 a 1,73 e os números dos calçados é de 35 a 39. A altura dos meninos é de 1,61 a 1,80 e os números dos calçados é de 38 a 43. A maioria dos números dos calçados é 37 com 7 unidades, 38 com 3, 41 com 3, 40 com 2, 35 com 2, 42 com 2, 39 com 2 e 43 com 1 (TM e AP).

A análise da altura e do número de calçado nessa faixa etária sofre a influência do gênero, mas apenas duas duplas de alunos compararam os grupos na solução da Tarefa 1. Tarefas que visam comparação de grupos têm sido uma efetiva estratégia para o desenvolvimento do raciocínio de variação com alunos do Ensino Fundamental II e Médio (BEN-ZVI, 2004; WATSON et. al., 2003) e graduandos (MELETIOU; LEE, 2002). Entretanto, comparar grupos de tamanhos diferentes requer o uso de um raciocínio mais sofisticado, envolvendo proporcionalidade. Watson, Callingham e Kelly (2007) explicam que apenas um aluno (entre 73) alcançaram níveis mais altos de variação quando foi proposta a comparação de dois grupos com diferentes números de elementos.

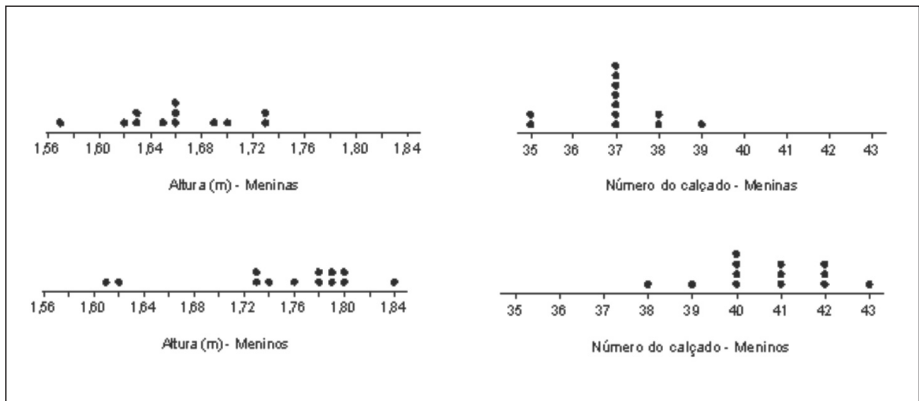
Para despertar a percepção para a diferença dessas medidas por gênero, as pesquisadoras construíram o *dotplot humano*, gráfico de pontos, no qual cada ponto é representado pelo próprio corpo do aluno. Para isso, no pátio do colégio, os alunos foram organizados em uma fila em ordem crescente de altura, em frente a uma escala métrica *gigante*, com seis metros de comprimento, sendo que 20 centímetros representavam um ponto na escala métrica da altura (Figura 1).



**Figura 1** - *Dotplot humano* da altura dos alunos

A configuração do *dotplot* humano permitiu aos alunos perceber que a maioria dos meninos ficou no extremo superior da escala e a maioria das meninas no extremo inferior, com poucas exceções.

Diante dessa vivência do gráfico de pontos, foi solicitada a segunda tarefa para os alunos, que deveriam fazer o gráfico de pontos da altura e do calçado de meninos e meninas e elaborar uma frase, comparando essas medidas por gênero (Figura 2). A construção dos gráficos foi considerada uma tarefa simples para os alunos, mas é importante ressaltar que uma das dificuldades frequentes refere-se à construção da escala, por essa razão optou-se por entregar aos alunos uma malha quadriculada com escalas prontas.



**Figura 2** - Distribuição da altura e do número do calçado de meninas e meninos.

Os termos usados pelos alunos nas frases da Tarefa 2 estão descritos na Tabela 3. Segundo Makar e Confrey (2005), o conceito de variação começa a ser compreendido à medida que deixa de ser entendido como um predicativo, tal como a expressão *é muito espalhado*, e passa a ser compreendido como um substantivo, tal como *a variação é grande*.

Os termos foram agrupados em: frases que apenas comparavam os grupos sem justificativa (alunos são mais altos que alunas), frases que refletiam aspectos de tendência central e variação e frases que apenas refletiam aspectos de variação.

**Tabela 3** – Descrição dos termos usados pelos alunos para resolver a Tarefa 2.

Frases que utilizavam	Descrição dos termos	Número de vezes que foram citados	%
Comparação entre os grupos	<i>mais altos,</i> <i>calçados maiores</i>	23	54,76
Tendência central e variação (26,20% dos termos)	<i>maioria</i>	5	11,90
	<i>concentrados</i>	3	7,15
	<i>em média*</i>	3	7,15
Variação (19,04% dos termos)	<i>varia</i> (verbo)	2	4,76
	<i>variados</i>	2	4,76
	<i>separados</i>	1	2,38
	<i>espalhados</i>	1	2,38
	<i>diferenciados</i>	2	4,76
Total		42	100,0

\*O termo *em média* não foi utilizado em referência à média aritmética, mas no sentido informal com significado *em torno de*.

O número de termos empregados na Tarefa 2 foi muito maior que na Tarefa 1, em que foram usados apenas os termos *variados* (três vezes), *diferenciados* (duas vezes) e *diversificado* (uma vez).

Esta tarefa tinha como objetivo estimular a tomada de decisão em favor de um grupo, a partir da observação de alguma medida de tendência central, o que justifica o grande número de termos *mais altos* e *calçados maiores*. No entanto, nem sempre essas frases apresentavam justificativas que refletissem qualquer raciocínio sobre variação, como foi observado em duas duplas de alunos e por esse motivo não foram consideradas como estratégia de variação e não foram computadas na Tabela 4.

**Tabela 4** – Estratégias de variação usadas pelos alunos para resolver a Tarefa 2.

Classificação da estratégia	Estratégias de variação usadas pelos alunos	Número de duplas (n=10)
Qualitativa	Termos que refletem tendência central e variação	4
	Termos que refletem variação	5
Quantitativa	Intervalo entre o valor mínimo e máximo	2
	Intervalo central	4
	Uso de alguns valores centrais	3
	Uso de valores extremos	1

Essas estratégias (Tabela 4) foram consideradas qualitativas, quando houve justificativa sem apresentação numérica, tal como a resposta de TM e AP: “*Os números dos calçados das meninas é mais baixo do que os meninos. A altura das meninas é mais espalhadas do que os meninos. A altura dos meninos são mais iguais*”. As respostas cujas estratégias foram consideradas quantitativas apresentavam valores para justificar a tomada de decisão, como feita pelos alunos ED e JN: “*Os meninos são mais altos que as meninas. Eles tem em torno de 1,71 a 1,84*”. Embora as respostas dessas duas duplas tenham usado estratégias diferentes de variação, eles tratavam apenas um aspecto de variação e foram classificadas no nível Uniestructural de raciocínio de variação, como pode ser visto na Tabela 5.

A classificação das respostas de acordo com a taxonomia SOLO está apresentada na Tabela 5. Apesar dos alunos identificarem naturalmente os valores extremos da distribuição, enquanto divertiam-se com o fato de alguns meninos serem mais baixos que algumas meninas, três duplas apresentaram respostas determinísticas, sem nenhum aspecto de variação, como observado por Ben-Zvi (2004), e foram classificadas no nível pré-estrutural de variação, como a resposta dos alunos SG e GL: “*comparando o gráfico de homens e mulheres, comprovou-se que os homens são mais altos que as mulheres e também que os homens tem o pé maior do que os das mulheres*”.

A resposta das alunas AS e IB foi classificada no nível multiestrutural pelo fato de utilizar um intervalo de variação e termos que refletem a variação, como maioria, mais altos:

Eu acho que a diferença é pouca porque as meninas calçam menor do que eles, os homens tem um calçado maior, como 40 até 44. Já as meninas calçam como 35 a 38. A diferença é que a maioria dos homens são bem mais altos que as mulheres. A base real da maioria dos homens é 1,78 e 1,80(AS e IB).

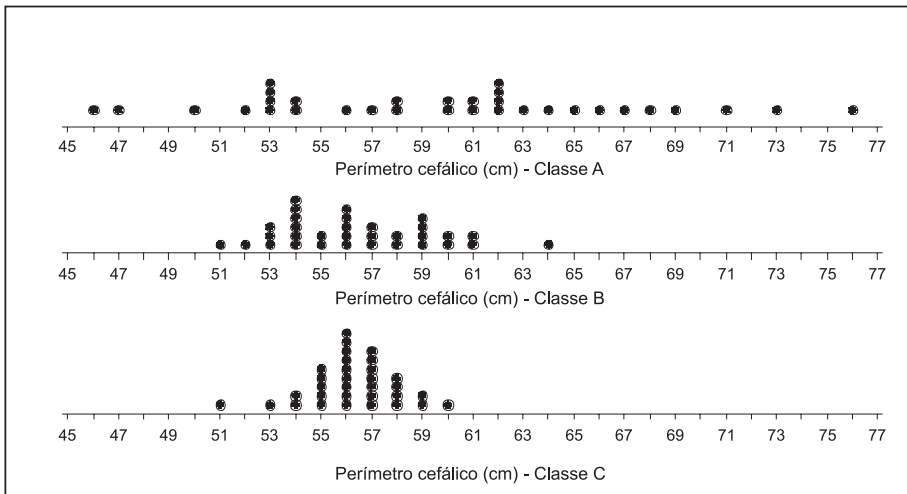
Nenhum aluno apresentou resposta classificada no nível relacional, no qual se esperava que fosse feita a comparação entre os grupos, usando qualquer valor representativo de cada grupo, com algum intervalo ou expressão de variação e a percepção de valores muito diferentes dos demais.

**Tabela 5** – Número de respostas em cada nível de raciocínio de variação na Tarefa 2

Nível	Descrição do nível	Número de duplas (n=12)
Pré-estrutural	Comparação dos grupos sem justificativa, com justificativa vaga ou com justificativa que não apresenta aspecto de variação.	2
Uniestrutural	Respostas com uma das estratégias para descrever a variação	7
Multiestrutural	Respostas com duas ou mais estratégias(qualitativa ou quantitativa) para descrever variação, sem relacioná-las completamente.	3
Relacional	Resposta com argumentos que relacionam diferentes estratégias de variação.	0

As produções dos alunos foram discutidas no início do segundo dia, em intervenção de ensino realizada pelas pesquisadoras, solucionando as tarefas solicitadas no dia anterior. O objetivo era institucionalizar os conceitos de média, moda e mediana, além de fomentar a percepção global de uma distribuição, no sentido de Ben-Zvi (2002), a partir da análise da amplitude total, verificando a necessidade de informações complementares (medidas de variação) à medida de tendência central para descrever uma variável. Os alunos puderam compreender a função da média, da mediana e da moda como medida para descrever uma distribuição e gostaram muito de aprender a calculá-las. Perceberam que só a medida de tendência central não permite a tomada de decisão, como por exemplo, decidir para quais tamanhos seriam feitos novos uniformes para os alunos.

Após a sessão de ensino, foi proposta a terceira tarefa para os alunos, que deveriam descrever o perímetro cefálico de três classes hipotéticas a partir da análise do gráfico de pontos (Figura 3).



**Figura 3** - Perímetro cefálico de três grupos de alunos (distribuições hipotéticas).

As três classes tinham o mesmo número de observações ( $n=32$ ), para excluir a necessidade de utilização de raciocínio proporcional, mais sofisticado. A variação era decrescente do grupo A para o grupo C, independente da medida de variação que pudesse ser usada (amplitude total, intervalo interquartil e coeficiente de variação), estimulando a comparação da variação e não da tendência.

Devido ao apelo da tarefa em comparar a variação aumentou a quantidade de vezes que os alunos usaram termos de variação (de 19% a 44% dos termos) quando comparado com os termos utilizados na Tarefa 2. Foi possível observar, também, um aumento na qualidade dos termos, uma vez que duas duplas de alunos utilizaram a variação como um substantivo da frase.

Além do apelo pela comparação da variação, esse aumento qualitativo e quantitativo também pode ser explicado pela familiaridade dos alunos com o tipo de tarefa proposto, pois no início da primeira atividade alguns alunos relataram não entender o que estava sendo solicitado. Tarefas estatísticas que solicitam comparação e análise ainda são raras em livros didáticos (SILVA, 2007), que priorizam a apresentação dos procedimentos em vez dos conceitos.

Os termos usados pelos alunos nas frases foram classificados nas mesmas categorias de termos usados na Tarefa 2 (Tabela 6). É importante ressaltar que todas as duplas de alunos apresentaram justificativa para a comparação feita.

**Tabela 6** – Classificação dos termos usados pelos alunos para resolver a Tarefa 3.

Categoria de termos	Descrição dos termos	Número de vezes que foram citados	%
Para comparação entre os grupos	<i>maior do que, menor do que</i>	8	23,5
Tendência central e variação (32,3% dos termos)	<i>muitos iguais</i>	2	5,9
	<i>maioria</i>	3	8,8
	<i>concentrados, agrupados</i>	6	17,6
	<i>em média</i>	--	--
Variação (44,0% dos termos)	<i>grande variação, pequena variação</i>	3	8,8
	<i>variados</i>	3	8,8
	<i>separados</i>	2	5,9
	<i>espalhados</i>	1	2,9
	<i>diferenciados</i>	5	14,7
	<i>distanciados</i>	1	2,9
Total		34	100

As respostas das duplas de alunos foram classificadas em estratégias qualitativas e quantitativas de variação (tal como na Tarefa 2) e em medidas de tendência central, pois alguns alunos usaram a média, moda e a mediana para resolver a tarefa (Tabela 7).

**Tabela 7** – Estratégias usadas pelos alunos para resolver a Tarefa 3.

Classificação da estratégia	Estratégias usadas pelos alunos	Número de duplas (n=11)
Qualitativa	Termos que refletem tendência central e variação	8
	Termos que refletem variação	6
Quantitativa	Intervalo entre o valor mínimo e máximo	4
	Intervalo central	6
	Uso de alguns valores centrais	--
	Uso de valores ou termos discrepantes	2
Medidas de tendência central	Moda	5
	Média	4
	Mediana	2

Embora a tarefa tivesse sido elaborada para proporcionar o desenvolvimento do raciocínio de variação, algumas duplas de alunos utilizaram as medidas de tendência central para resolvê-la, que pode ser explicado pela motivação dos alunos em trabalhar com os conceitos que tinham aprendido naquele momento. No entanto, é importante ressaltar que, dessas duplas, três utilizaram algum intervalo de variação para analisar o perímetro cefálico, demonstrando uma sofisticação no raciocínio de variação.

A classificação das respostas de acordo com a taxonomia SOLO está apresentada na Tabela 8. Três duplas usaram a calculadora para obter o valor da média aritmética, restringindo sua análise à apresentação desses valores, sem considerar nenhum aspecto de variação. Este tipo de raciocínio foi classificado no nível Pré-estrutural de raciocínio de variação.

**Tabela 8** – Número de respostas em cada nível de raciocínio de variação na Tarefa 3

Nível	Descrição do nível	Número de duplas
Pré-estrutural	Comparação dos grupos sem justificativa, com justificativa vaga ou com justificativa que não apresenta aspecto de variação.	2
Uniestrutural	Respostas com uma das estratégias para descrever a variação	2
Multiestrutural	Respostas com duas ou mais estratégias (qualitativa ou quantitativa) para descrever variação, sem relacioná-las completamente.	6
Relacional	Resposta com argumentos que relacionam diferentes estratégias de variação.	1

É possível observar que o número de respostas no nível Multiestrutural aumentou, quando comparado com a Tarefa 2. Este aumento pode ser explicado pelas ferramentas de variação que foram apreendendo durante as atividades, ainda sem relacioná-las completamente. Neste nível, as alunas MC e DN observaram a concentração das observações, os valores extremos e foram capazes de apresentar uma resposta com uma noção intuitiva de densidade central.

A primeira turma tem um cefálico bastante diferenciado, tem bastante diferença pois poucas pessoas tem o cefálico iguais. A segunda turma, essa turma tem bastante cefálico iguais o único bastante diferentes são os números 51, 52 e 64. A terceira turma, já é bem mais agrupado pois os números 55, 56, 57 e 58 já tem mais pessoas e é pouquissimo diferenciado (MC e DN).

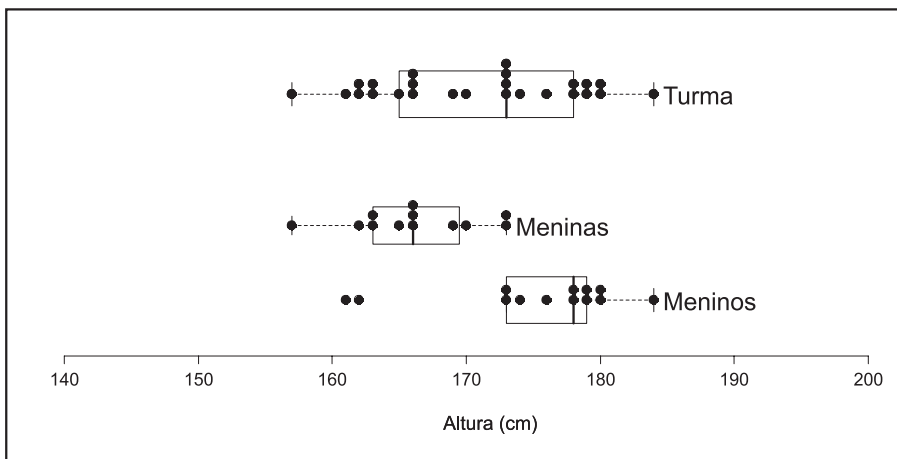
No nível relacional desta tarefa era esperada resposta que contemplasse a percepção da amplitude total associada com a análise de concentração e dispersão dos grupos. A única resposta classificada neste nível foi apresentada pelo trio de alunos MN, AM e LC:

O perímetro cefálico da turma A ocorre grande variação entre as medidas 46 a 76, na turma B ocorre uma pequena variação [...] que varia entre 61 a 64. Já na turma C o perímetro cefálico [...] que varia entre 51 a 60. Na turma A maioria dos alunos tem o perímetro cefálico que mede 62 cm, na turma B o perímetro cefálico varia de 54 a 56 e já na turma C a maioria dos alunos tem o perímetro cefálico de 56 a 57 cm. Comparando as 3 turmas deu para perceber que a turma A tem uma grande diferença entre as demais turmas, porque é nela que ocorre uma variação mais diversificada, nas demais turmas a uma grande concentração de pessoas que tem o perímetro cefálico que mede mais ou menos na mesma medida (MN, AM e LC).



Uma segunda intervenção de ensino foi realizada imediatamente após a finalização da Tarefa 3. Foi solicitado aos alunos imaginar que seriam contratados para fazer bonés para os alunos das três turmas, mas que eles não tinham dinheiro suficiente para produzir para todos os tamanhos de cabeças (conforme perímetro cefálico da Figura 3), portanto, precisariam escolher para quais tamanhos fariam os bonés de maneira que se ajustassem à cabeça da maioria dos alunos. A discussão permitiu aos alunos compreender a importância e a restrição do papel da amplitude total, fazendo-os refletir sobre a necessidade de outras medidas de variação para tomar essa decisão. Os alunos fizeram contagens de pessoas em diferentes intervalos centrais, para verificar qual intervalo poderia ser mais adequado.

No período da tarde, os alunos foram levados para o laboratório de informática e utilizaram o AVALE, onde puderam ver a animação da transformação de um gráfico de pontos em um diagrama da caixa (*boxplot*) para algumas medidas antropométricas, como por exemplo, a altura dos meninos e das meninas que está apresentada na Figura 4. Os quartis e o intervalo interquartil foram discutidos a partir da contagem do número de pontos dentro da caixa, que permitiram o cálculo da porcentagem de ponto. Os estudantes perceberam que 50% ou mais dos pontos estavam dentro da caixa, e esta estratégia era mais fácil para solucionar tarefas, visando escolher a maioria para quem seriam feitas as camisetas do uniforme, como proposto na Tarefa 1.



**Figura 4** - Distribuição da altura de meninos, meninas e da turma toda.

Durante a atividade do Homem Vitruviano o desenvolvimento do raciocínio sobre variação, demonstrado pela maioria dos estudantes, assemelhou-

se ao observado no estudo de Ben-Zvi (2004), em que os alunos começaram por observar os extremos da distribuição; em seguida, compararam valores mais centrais e, finalmente, progrediram para a moda ou um intervalo modal, indicando “os primeiros passos para o entendimento de densidade de uma distribuição” (p. 52).

O uso da mediana e da porcentagem de observações dentro da caixa (ideia intuitiva de intervalo interquartil) foi possível pela animação gráfica no ambiente virtual. No entanto, precisam ser elaboradas atividades, a ser desenvolvidas no ambiente virtual, para verificar a estabilidade dessa estratégia de raciocínio sobre variação, mais sofisticada, e que prepara o aluno para compreender a necessidade de diferentes medidas de variação.

#### 4 Considerações finais

As atividades desenvolvidas neste trabalho objetivaram explorar a terminologia, a estratégia e o nível de raciocínio de variação de forma intuitiva com alunos de oitavo e nono anos do Ensino Fundamental. Observou-se um aumento na quantidade e qualidade do uso dos termos de variação no decorrer do desenvolvimento das tarefas. A familiaridade dos alunos com termos informais de variação possibilitou o desenvolvimento de níveis mais sofisticados de raciocínio de variação e a facilidade na apropriação das ferramentas estatísticas para explicar essa variação.

O intervalo central de valores (*modal clump*) passou a ser mais utilizado pelos alunos do que simplesmente a observação dos valores máximos e mínimos. Essa estratégia de raciocínio pode colaborar no desenvolvimento da noção intuitiva da densidade da distribuição.

Níveis mais altos de raciocínio de variação foram observados durante as atividades, aumentando a quantidade de respostas classificadas no nível Multiestrutural, indicando que os alunos foram utilizando mais de uma estratégia de variação para solucionar as tarefas. Essas estratégias são intuitivas e, quando incentivadas ainda no Ensino Fundamental, podem favorecer a compreensão de conceitos mais complexos de variação, como o desvio padrão, bem como facilitar o entendimento do motivo pelo qual existem diversas medidas de variação.

Devido às contribuições observadas do uso do gráfico de pontos e do diagrama da caixa no desenvolvimento do raciocínio de variação, outras atividades precisam ser desenvolvidas para verificar sua efetividade na construção do conceito de intervalo interquartil, principalmente no ambiente computacional.

Os resultados apresentados precisam ser analisados cuidadosamente, devido ao tamanho da amostra. No entanto, os resultados sugerem que é possível

trabalhar as medidas de variação em uma perspectiva intuitiva ainda no Ensino Fundamental.

É importante ressaltar que a atividade do Homem Vitruviano favorece primordialmente o desenvolvimento do raciocínio de covariação, pelo fato da verificação empírica das relações antropométricas como, por exemplo, comprovar (ou não) a igualdade da envergadura dos braços e a altura do homem. Por esse motivo, a utilização dessa atividade para o desenvolvimento do raciocínio de variação requer o estímulo para a comparação de grupos, como por exemplo, verificar a hipótese de que meninos são mais altos que meninas.

## Referências

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1995.

BEN-ZVI, D. Reasoning about variability in comparing distributions. **Statistics Education Research Journal**, Auckland, v. 3, n. 2, p. 42-63, Nov. 2004. Disponível em: <<http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj>>. Acesso em: 10 jun. 2010.

BEN-ZVI, D. Seventh grade students' sense making of data and data representations. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON TEACHING STATISTICS, 6th, 2002, Cape Town. **Proceedings...** Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute, 2002. (PHILLIPS, B. (Ed.)).

BIGGS, J.; COLLIS, K. **Evaluating the Quality of Learning: the SOLO Taxonomy**. New York: Academic Press, 1982.

BIGGS, J.; COLLIS, K. Multimodal learning and the quality of intelligent behavior. In: ROWE, H. (Ed.). **Intelligence, Reconceptualization and Measurement**. New Jersey: Laurence Erlbaum Assoc, 1991. p. 57-76.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília, 2002.

GARFIELD, J.B.; BEN-ZVI, D. **Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice**. USA: Springer, 2008.

KONOLD, C et. al.. Students' use of modal clumps to summarize data. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON TEACHING STATISTICS, 6th, 2002, Cape Town. **Proceedings...** Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute, 2002, p. 1-6. (PHILLIPS, B. (Ed.)).

LEHRER, R.; KIM, M.; SCHAUBLE, L. Supporting the development of conceptions of statistics by engaging students in measuring and modeling variability. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, New York, v. 12, p. 195-216, Dec. 2002.

LOOSEN, F.; LIOEN, M.; LACANTE, M. The Standard Deviation: some Drawbacks of an Intuitive Approach. **Teaching Statistics**, Rapid City, South Dakota, v. 7, n. 1, p. 2-5, Jan. 1985.

MAKAR, K.; CONFREY, J. "Variation-talk": Articulating meaning in statistics. **Statistics Education Research Journal**, Auckland, v. 4, n. 1, p. 27-54, May 2005. Disponível em: <<http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj>>. Acesso em: 10 jun. 2010.

MELETIOU, M.; LEE, C. Student understanding of histograms: A stumbling stone to the development of intuitions about variation. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON TEACHING STATISTICS, 6th, 2002, Cape Town. **Proceedings...** Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute, 2002, p. 1-4. (PHILLIPS, B. (Ed.)).

PANIZZON, D.; PEGG, J.; MCGEE, S. Incorporating Different Assessment tasks to gauge student understandings of planetary processes. In: AARE INTERNATIONAL EDUCATION RESEARCH CONFERENCE, 2004, Melbourne. **Proceedings...** Melbourne: Australian Association for Research in Education, 2005, p 1-18. (JEFFERY, P.L. (Ed.)). Disponível em: <<http://www.aare.edu.au/04pap/pan04654.pdf>>. Acesso em: 10 jun. 2010.

READING, C.; REID, J. An emerging hierarchy of reasoning about distribution: from a variation perspective. **Statistical Education Research Journal**, Auckland, v.5, n.2, p.46-68, Nov. 2006. Disponível em: <<http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj>>. Acesso em: 10 jun. 2010.

REID, J.; READING, C. Measuring the Development of students' consideration of variation. **Statistics Education Research Journal**, Auckland, v.7, n.1, p. 40-59, May 2008. Disponível em: <<http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj>>. Acesso em: 10 jun. 2010.

SILVA, C. B. da. **Pensamento estatístico e raciocínio sobre variação: um estudo com professores de Matemática**. 2007. 354 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2007.

SILVA, C. B. da; COUTINHO, C. Q. S. Reasoning about variation of a univariate distribution: a study with secondary mathematics teachers. In: BATANERO, C.; BURRIL, G.; READING, C.; ROSSMAN, A. (Eds.). **Proceedings of the ICMI Study and IASE Round Table Conference**. Monterrey, México, 2008.

WATSON, J. M., CALLINGHAM, R. A.; KELLY, B. A. Students' appreciation of expectation and variation as a foundation for statistical understanding. **Mathematical Thinking and Learning, Philadelphia**, v. 9, n. 2, p. 83-130. 2007.

WATSON, J. et. a l. The measurement of school students' understanding of statistical variation. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, Philadelphia, v. 34, n. 1, p. 1-29. 2003.

WATSON, J.; KELLY, B. Can grade 3 students learn about variation? In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON TEACHING STATISTICS, 6th, 2002, Cape Town. **Proceedings...** Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute, 2002, (PHILLIPS, B. (Ed.)).

WILD, C.; PFANNKUCH, M. Statistical Thinking in Empirical Enquiry. **International Statistical Review**, Malden, Massachusetts, v. 67, n. 3, p. 223-265, Dec. 1999.

**Submetido em Junho de 2010.**  
**Aprovado em Outubro de 2010.**

**Anexo 1 – Banco de Dados fornecido aos alunos**

Nome	Gênero	Altura	número do calçado	Envergadura do braço	Cotovelo (1)	braço (2)	palma (3)	palmo aberto (4)	perímetro cefálico
ANA PAULA	1	163	35	162	41	33	9	20	57
TAYSLANE	1	169	38	170	44	35	10	22	58
CARLOS	2	173	40	172	46	37	10	22	53
CAIQUE A.	2	180	42	174	48	36	11	23	55
EDSON	2	161	39	164	45	32	9	20	56
LUCAS A.	2	179	42	176	48	37	10	21	57
DENISE	1	166	38	164	44	32	9	19	54
FELIPE	2	162	38	167	45	35	9	21	55
MAIANNA	1	173	39	171	43	34	9	20	53
AMANDA	1	163	37	161	44	31	9	21	54
CAIQUE N.	2	178	43	182	49	37	10	23	57
GLEYDSON	2	174	40	174	46	34	9	21	57
SERGIO	2	176	41	170	48	33	11	24	55
KELLIANE	1	166	37	159	43	31	9	18	57
JÔNATAS	2	184	41	181	49	36	9	20	58
ANGÉLICA	1	157	35	155	41	31	8	17	53
IRLA	1	165	37	170	47	34	9	20	56
CARLA	1	166	37	167	44	35	9	20	54
MARIA CAROLINA	1	162	37	162	43	32	8	20	56
SHEILON	2	178	41	177	50	35	10	22	58
FERNANDA	1	170	37	178	49	35	9	19	53
THAINARA	1	173	37	168	46	34	9	21	58
GABRIEL	2	173	40	172	47	35	10	22	53
RODRIGO	2	179	40	187	51	37	10	24	55
THIAGO	2	180	42	178	46	37	10	23	57

1 – Cotovelo é a (medida do comprimento do antebraço mais o comprimento da mão, isto é, a medida do cotovelo até a ponta do dedo médio)

2 - Braços é a medida de comprimento entre cotovelo e o ombro

3 – Palma é a medida de comprimento entre o pulso e a ponta do dedo médio, que se obtém com a mão estendida.

4 - Palmo aberto é uma medida de comprimento entre a ponta do dedo polegar e a ponta do dedo mínimo, que se obtém com a mão toda aberta.