ISSN 0103-636X

Validação de uma Sequência Didática de Probabilidade a partir da Análise da Prática de Professores, sob a Ótica do Enfoque Ontossemiótico

Validation of a Probability Didactic Sequence based on Teachers' Practice and under the Onto-semiotic Approach

Irene Mauricio Cazorla*
Tânia Cristina Gusmão**
Verônica Yumi Kataoka***

Resumo

Este trabalho tem como objetivo analisar a validade da sequência didática "Os passeios aleatórios da Mônica", para ensinar conceitos de Probabilidade, na Educação Básica, a partir da prática de professores, avaliando sua pertinência quando implementada em sala de aula. Foi utilizado o enfoque Ontossemiótico, que permite estudar os tipos de objetos matemáticos (linguagem, situações, conceitos, procedimentos, propriedades e argumentos) e possíveis conflitos semióticos que podem comprometer a compreensão e o significado dos conceitos envolvidos na sequência. O delineamento metodológico foi o da pesquisa-ação, tendo como sujeitos 28 professores. Os resultados mostraram a viabilidade da sequência, pois a experimentação aleatória permitiu aos sujeitos observar que a frequência relativa é uma estimativa da probabilidade teórica. A comparação dos

* Doutora em Educação Matemática, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Professora Titular da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), Ilhéus, BA, Brasil. Endereço para correspondência: Alameda Florença 137, apto. 703, Pituba. Salvador, BA. CEP: 41830-460. *E-mail:* icazorla@uol.com.br.

** Doutora em Didática da Matemática, Universidade de Santiago de Compostela. Professora Adjunta da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB), Vitória da Conquista, BA, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Braulino Santos, 1125, apto 303, Candeias, Vitória da Conquista, BA. *E-mail:* professorataniagusmao@gmail.com.

*** Doutorado em Estatística e Experimentação Agropecuária, Universidade Federal de Lavras (UFLA). Professora da Universidade Bandeirante de São Paulo (UNIBAN), Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, São Paulo, SP, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Braz Leme, 3029, Santana, CEP: 02022-011, São Paulo, SP; *E-mail:* veronicayumi@terra.com.br.

gráficos, no papel transparência, permitiu aos sujeitos observar a existência de um padrão comum que se aproxima da probabilidade teórica, permitindo uma evolução e apropriação do conceito de probabilidade. Assim, a técnica de análise semiótica vislumbra resultados consideráveis para a proposta, uma vez que permite um olhar mais atento e detalhado sobre os objetos implicados na atividade matemática, dando lugar a uma avaliação da sequência com vistas a um melhor planejamento, delineamento e eficácia no seu uso.

Palavras-chave: Ensino de Probabilidade. Sequência didática. Enfoque Ontossemiótico. Educação Básica.

Abstract

This study analyses the validity of the didactic sequence “Monica’s random walks” designed to teach the concepts of probability at the elementary education level, based on teachers’ practice, evaluating its relevance when implemented in the classroom. The Onto-semiotic approach was used, which allows the study of types of mathematical objects (language, situations, concepts, procedures, properties and arguments) and possible semiotic conflicts that may affect the understanding and meaning of the concepts involved in the sequence. The methodological approach used was action research with the participation of 28 teachers. Lessons were observed and written protocols collected. Analysis of the results revealed the feasibility of the sequence, as the subjects were able to observe, through random experimentation, that the relative frequency is an estimate of the theoretical probability. Comparison of the graphs, on transparencies, allowed the teachers to note the existence of a common pattern that approximates the theoretical probability, allowing an evolution and appropriation of the probability concept. The use of the onto-semiotic technique reveals considerable results for the proposal, as it provides a more careful and detailed look at the object involved in the mathematic activity, leading to an evaluation of the sequence aiming at improved planning, design and efficiency in its use.

Keywords: Probability teaching. Didactic sequence. Onto-semiotic Approach. Basic Education.

1 Introdução

O conhecimento básico de probabilidade é importante para a formação do cidadão, pois possibilita a compreensão dos acontecimentos de natureza aleatória do seu cotidiano, bem como, se utilizado em conjunto com a Estatística no contexto inferencial, pode auxiliá-lo nas tomadas de decisões. De acordo com Coutinho (2001), Batanero e Godino (2002), para o desenvolvimento do raciocínio probabilístico é necessário que o aluno vivencie atividades que possibilitem: a percepção do acaso; a ideia de experiência aleatória e a noção de probabilidade.

Em consonância com essas necessidades, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática recomendam que o ensino de Probabilidade seja oferecido desde os anos escolares iniciais, e tem como uma das metas para os anos iniciais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1997) fazer com que o aluno compreenda que as noções de acaso e incerteza se manifestam intuitivamente em situações nas quais o aluno realize experimentos e observe eventos (em espaços equiprováveis). Nos anos finais do Ensino Fundamental, uma das metas é fazer com que o aluno represente (tabelas, árvore de possibilidades) e conte os casos possíveis em situações combinatórias; construa o espaço amostral em várias situações, indicando a possibilidade de sucesso de um evento pelo uso de uma razão (BRASIL, 1998). Já o aluno do Ensino Médio deve compreender que a probabilidade é uma medida de incerteza, que os modelos são úteis para simular eventos, para estimar probabilidades, e que algumas intuições são incorretas e podem levar a uma conclusão equivocada no que se refere à probabilidade e à chance (BRASIL, 2002).

Apesar dessas orientações curriculares, pesquisadores internacionais, como Batanero, Godino e Roa (2004), Peck e Gould (2005), Serradó, Azcárate e Cardeñoso (2006), Ainley e Monteiro (2008), afirmam que os educadores provenientes das Licenciaturas em Matemática, às vezes, têm alguma formação básica em Probabilidade e Estatística, mas geralmente não têm formação nas questões relacionadas ao ensino destes conteúdos.

No Brasil, essa realidade não é diferente, já que os cursos de Licenciatura em Pedagogia (GONÇALVES, 2003) ou em Matemática (VIALI, 2008) geralmente oferecem uma única disciplina, com carga horária de 60 ou 75 horas, que aborda superficialmente alguns temas, tais como Estatística Descritiva e Probabilidade. Essas disciplinas raramente abordam aspectos da Didática da Estatística, isto é, não trabalham os conceitos e procedimentos enquanto objetos a serem ensinados.

Além disso, a falta de materiais didáticos, validados nos diversos níveis de ensino e adequados à realidade das escolas, dificulta, ainda mais, a inserção efetiva do ensino de Probabilidade e Estatística na Educação Básica.

Ao refletir sobre esses problemas, um grupo de educadores estatísticos vem desenvolvendo um projeto junto à Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), Ilhéus-BA, financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia (FAPESB), denominado "Ambiente Virtual de Apoio ao Letramento Estatístico" (AVALE). Este projeto disponibiliza, na *web*, gratuitamente, suporte teórico para diversos tópicos de Probabilidade e de Estatística, bem como atividades para trabalhar esses temas em dois ambientes de aprendizagem: papel e lápis, e virtual.

Essas atividades estão sendo desenvolvidas nos moldes da Engenharia Didática (HENRIQUES, 2001), propondo situações que são previamente analisadas com o objetivo de desenvolver o raciocínio do aluno acerca de um conteúdo específico.

Atualmente, a equipe do AVALE, em caráter experimental, vem aplicando essas atividades tanto com alunos, como com professores, tendo como objetivos avaliar sua validade e verificar se as mesmas podem auxiliar o professor na institucionalização[1] dos conceitos e procedimentos de Probabilidade e de Estatística.

Nesse contexto, este artigo tem como objetivo avaliar a atividade "Os passeios aleatórios da Mônica" (PAM), desenhada para trabalhar conceitos básicos de Probabilidade, a partir da análise da prática de professores que estavam cursando a especialização em Ensino de Ciências e Matemática da UESC, sob a ótica do Enfoque Ontossemiótico da Cognição e Instrução Matemática.

Este artigo apresenta um recorte das pesquisas em andamento do AVALE, que tem entre seus arcabouços teóricos, também, a Teoria Antropológica da Didática, uma vez que é necessário verificar quais são as contribuições dessas teorias para a análise e compreensão dos fenômenos didáticos envolvidos na construção de atividades para o ensino de Probabilidade e de Estatística.

2 Perspectiva teórica

O Enfoque Ontossemiótico da Cognição e Instrução Matemática (EOS) vem sendo desenvolvido há mais de uma década por Godino e colaboradores (GUSMÃO, 2006). Tem como propósito estudar os fenômenos derivados da transposição didática escolar, tratando de integrar aproximações teóricas a partir de pressupostos pragmáticos, antropológicos e semióticos, possibilitando uma melhor compreensão do processo de ensino-aprendizagem da Matemática (GUSMÃO; FONT; CAJARAVILLE, 2009).

Pode-se dizer que é pragmático, uma vez que propõe uma formulação do significado dos objetos matemáticos, assumindo-se os pressupostos da epistemologia pragmática: "As categorias opostas de sujeito e objeto passam a um segundo plano, ao atribuir-lhes um estatuto derivado, e cede seu lugar privilegiado à categoria de ação". É antropológico, já que seu principal objeto de estudo é o homem aprendendo em instituições escolares, e a Matemática é o

[1] No sentido dado por Brousseau (1986 apud HENRIQUES, 2001), institucionalização é a fase na qual o professor fixa convenientemente e explicita o estudo cognitivo do saber. Essa fase é precedida de três tipos de interação do aluno com o saber em jogo: *ação, formulação* e *validação*.

resultado de uma construção social realizada em diferentes instituições. E é semiótico porque atribui um papel central aos recursos expressivos utilizados na atividade matemática (CAZORLA; GUSMÃO, 2009, p. 19).

O EOS faz uma abordagem da natureza dos objetos matemáticos, interessando-se pela problemática do significado, tanto em nível pessoal (por exemplo, manifestado pelo estudante), como institucional (por exemplo, manifestado pelo professor), destes objetos em termos de sistema de práticas.

A partir da noção de situação-problema são definidos, entre outros, os conceitos de prática matemática, objeto e significado. A prática matemática é o cenário básico onde se situam as experiências dos indivíduos e a emergência dos objetos. Os objetos são entidades intervenientes e emergentes das práticas matemáticas (GODINO; BATANERO; FONT, 2007, 2008; GODINO et al., 2009).

Neste artigo, dirigimos nossa atenção aos objetos que emergem da atividade matemática chamados pelo EOS de entidades primárias e que podem ser observadas em um texto matemático, a saber:

> • *linguagem* (termos, expressões, notações, gráficos): em um texto, a linguagem pode vir apresentada na forma de escrita ou gráfica, porém no trabalho matemático podem ser usados outros registros (oral, gestual etc.). Mediante a linguagem (comum e específica da matemática) descrevem-se outros objetos não linguísticos;
> • *situações* (problemas mais ou menos abertos, aplicações extramatemáticas ou intramatemáticas, exercícios, ...): são as tarefas que induzem à atividade matemática;
> • *procedimentos*: são utilizados pelo sujeito diante das tarefas matemáticas (operações, algoritmos, técnicas de cálculo, ...);
> • *conceitos*[2]: dados mediante definições ou descrições (número, ponto, reta, função, …);
> • *proposições* (propriedades, teoremas, corolários, lemas etc.);
> • *argumentos* que se usam para validar e explicar as proposições, sejam dedutivas ou de outro tipo (GODINO, 2002, p. 245).

[2] Os *conceitos* ou propriedades são interpretados como regras gramaticais sobre o uso de símbolos e expressões. Essas regras mudam segundo a fenomenologia, os jogos de linguagem, as formas de vida, as instituições. Outro uso comum de *conceitos* é como um sistema diversificado de objetos (situações, invariantes operatórios, representações), que pode ser substituído, com vantagem, pela noção de praxeologia (GODINO, 2002), tradução nossa.

Essas entidades ampliam a tradicional distinção de entidades conceituais e procedimentais. Cada tipo de entidade ou categoria de objetos desempenha uma função e inclui nela outros objetos, e todos eles participam da análise que se pretende fazer de uma prática matemática. Nesse sentido, o EOS apresenta a *Técnica de Análise Semiótica,* ressaltando essa tipologia de objetos, caracterizando seus significados do ponto de vista institucional e pessoal, e analisando minuciosamente os conflitos semióticos derivados da resolução de problemas matemáticos concretos. A comparação entre esses significados permitirá identificar *conflitos semióticos*, que:

> [...] se referem a toda disparidade ou desajuste entre os significados atribuídos a uma mesma expressão por dois sujeitos (pessoas ou instituições) em interação comunicativa e podem explicar as dificuldades e limitações do ensino e aprendizagem implementadas (GODINO, 2002, p. 246).

De modo geral, de acordo com este enfoque, para a realização e avaliação de uma prática matemática, faz-se necessário ativar alguns (ou todos) elementos citados anteriormente: situações-problema, linguagem, conceitos, proposições, procedimentos e argumentos. Estes seis tipos de objetos articulam-se formando *configurações* definidas como as redes de objetos intervenientes e emergentes dos sistemas de práticas e que podem ser *cognitivas* (rede de objetos pessoais) ou *sócio-epistêmicas* (rede de objetos institucionais), de acordo com a forma como se considere a prática, desde a perspectiva pessoal ou institucional (CAZORLA; GUSMÃO, 2009; GUSMÃO; FONT; CAJARAVILLE, 2009).

Nesse contexto, escolhemos a *Técnica de Análise Semiótica* para avaliar as modificações implementadas na sequência didática "Os passeios aleatórios da Mônica" e identificar se ainda persistem possíveis conflitos semióticos que podem comprometer a compreensão e o significado desses conceitos, tendo como referência sua aplicação a um grupo de professores em um curso de especialização.

Antes de iniciarmos a aplicação dessa técnica na análise da PAM, precisamos explicitar o nosso entendimento de sequência didática, para o qual nos apoiamos nas ideias de Henriques (2001) que, com base na Engenharia Didática, define:

> Uma *sequência didática* é um esquema experimental de situações-problemas desenvolvido por sessões de ensino

> a partir de um estudo preliminar, caracterizando os objetivos específicos de cada problema, análise matemática e análise didática relativas às atividades proposta (p. 61).

As análises matemáticas/didáticas destacam as resoluções possíveis, a forma de controle e os resultados esperados, bem como as variáveis didáticas de situações, pré-requisitos e competências. As variáveis didáticas são elementos ou noções próprias do objeto de estudo que estão à disposição do professor e que permitem a análise de situações didáticas/tarefas durante uma investigação.

Para Henriques, uma sequência didática é um objeto de estudo do pesquisador e passa necessariamente por três etapas: análise *a priori* fundamentada na análise institucional; aplicação; e análise *a posteriori*. Tem como objetivo estudar as práticas institucionais/desenvolvimento dos alunos na aprendizagem do objeto visado, bem como analisar o papel da instituição responsável pela formação desses indivíduos.

Esta modalidade é adequada quando queremos avaliar ou diagnosticar o quanto uma instituição de ensino formalizou os conceitos e o quanto os sujeitos se apropriaram de tais conceitos.

3 Antecedentes

A sequência didática *Os passeios aleatórios da Mônica* está sendo disponibilizada no AVALE para trabalhar os conceitos básicos de Probabilidade, tanto no ambiente papel e lápis, quanto no virtual. Isso implica que, lendo o tutorial (CAZORLA; KATAOKA; NAGAMINE, 2010) e o roteiro disponibilizado no site, os professores que ensinam Matemática devem poder implementar essa sequência nas suas aulas de forma autônoma.

O delineamento da PAM foi fundamentado nas recomendações dos PCN e permite trabalhar, de forma lúdica, as noções elementares da teoria de probabilidades: experimento determinístico e aleatório, espaço amostral, eventos simples e compostos, probabilidade de eventos simples e compostos; tabela de distribuição de frequência, gráficos de barras; probabilidade frequentista (frequência relativa); probabilidade teórica a partir da árvore de possibilidades, padrões observados e esperados, dentre outros.

Cazorla e Gusmão (2009) analisaram a primeira versão da PAM, utilizando a técnica de análise semiótica, quando foi trabalhada com 29 professores que cursavam a Licenciatura em Matemática, em um Programa de Formação de Professores em Serviço.

Os resultados da análise semiótica apontaram que essa atividade é envolvente e que os sujeitos participaram ativamente, dando sentido a muitos dos conceitos trabalhados. Contudo, essa análise apontou alguns conflitos semióticos, mostrando, também, que muitos dos entraves vinculavam-se à falta de conhecimentos prévios dos sujeitos.

Diante desses resultados e após outras aplicações, esta sequência didática foi reestruturada. Dentre as mudanças, destacam-se a colocação da legenda para os personagens, a separação das atividades em quatro sessões e a introdução de uma pergunta norteadora: *Todos os amigos têm a mesma chance de ser visitados?,* que se repete, ao longo das sessões, com o intuito de analisar a influência da atividade (experimentação aleatória e modelagem matemática) na formação e no desenvolvimento do pensamento probabilístico.

4 Os passeios aleatórios da Mônica

Na versão final, após análise e adaptações, a PAM ficou composta de quatro sessões, conforme Figura 1.

Organização da sequência didática *Os passeios aleatórios da Mônica*

Sessão I: Contexto	Sessão II: Experimentação aleatória e a probabilidade frequentista	Sessão III: Modelagem matemática e a probabilidade teórica ou lapaciana	Sessão IV: Decisão
História e concepções prévias de probabilidade	II.1 Experimentação aleatória II.2 Organização dos resultados e a probabilidade frequentista	III.1 Modelagem matemática a partir da árvore de possibilidades III.2 Organização dos resultados e a probabilidade teórica ou *laplaciana*	Comparação entre as diversas formas de atribuir probabilidade. Reflexões

Todos os amigos têm a mesma chance de ser visitados?

Figura 1 – Esquema da sequência didática “Os passeios aleatórios da Mônica”.

Na primeira sessão, os sujeitos leem a história e, sem lançar a moeda, devem responder a perguntas relativas à probabilidade. Na segunda, os sujeitos replicam 30 vezes o experimento aleatório, estimam probabilidades utilizando a frequência relativa e sistematizam os resultados em tabelas e gráficos. Na terceira, os sujeitos constroem a árvore de possibilidades, calculam as probabilidades teóricas e representam-nas em tabelas e gráficos. Na quarta sessão, comparam as estimativas com as probabilidades teóricas e tecem reflexões sobre essas formas de atribuir probabilidades.

5 Percurso metodológico

A modalidade adotada na condução da investigação foi a pesquisa-ação, pois possibilita ao pesquisador mergulhar no ambiente a ser estudado para mudá-lo em direções que permitam a melhoria das práticas e maior liberdade de ação e de aprendizagem dos participantes (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p. 112).

Para esses autores, a pesquisa-ação é um processo investigativo de intervenção em que a prática investigativa, a reflexiva e a educativa caminham juntas, uma vez que, ao investigar a prática educativa, produzem-se compreensões e orientações que são imediatamente utilizadas em sua transformação, gerando novas situações de investigação. Portanto, trata-se de uma modalidade de pesquisa que torna o participante da ação um pesquisador de sua própria prática, e o pesquisador, um participante que intervém nos rumos da ação, orientado pela pesquisa em ação.

Participaram da investigação 28 alunos de um curso de especialização em Ensino de Ciências e Matemática. Todos eram formados em cursos de licenciatura, seja em Matemática, Física, Química ou Biologia; haviam cursado pelo menos uma disciplina de Estatística na graduação e a maioria era constituída de docentes da Educação Básica, sendo que alguns já estavam ensinando Estatística nas suas escolas.

A aplicação da PAM, sem intervenção do pesquisador, tinha como objetivo investigar o quanto os cursos de graduação haviam conseguido institucionalizar os conceitos e procedimentos atrelados à Probabilidade e à Estatística, bem como investigar a atividade desenvolvida por estes professores de forma autônoma.

Os sujeitos foram informados de que se tratava de uma investigação e lhes foi perguntado se concordavam em participar dela. Todos os alunos concordaram e assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.

As folhas contendo as atividades foram entregues por sessões. Os alunos foram orientados para trabalhar em duplas e para registrar todas as suas impressões, dúvidas etc. Os protocolos foram recolhidos. As aulas foram observadas por duas pesquisadoras da área de Educação Matemática e duas bolsistas de iniciação científica, as quais foram orientadas e seguiram um roteiro de observação previamente detalhado.

6 A aplicação da técnica de análise semiótica à PAM

Conforme Godino e Batanero (1994) e Godino (2002), entendemos a *situação-problema* "Os passeios aleatórios da Mônica" como provocadora da atividade matemática e motivadora do desenvolvimento dos objetos matemáticos (conceitos, definições, proposições, procedimentos e propriedades), associados ao conteúdo de probabilidade, na expectativa de lhes conferir significado.

Para iniciar uma análise semiótica do texto, decompomos as instruções da PAM (texto) em unidades semióticas. A *análise semiótica* de um texto matemático será "a indagação sistemática dos significados manifestados (conteúdo das funções semióticas) a partir da transcrição do processo, e de cada uma das partes, nas quais um texto pode ser decomposto" (GODINO, 2002, p. 246).

Para efetuar uma atividade/tarefa matemática, contida numa situação, os sujeitos[3] necessitam de uma série de conhecimentos que são fundamentais para alcançar êxito nessa realização. Inicialmente, os sujeitos têm que utilizar uma determinada *linguagem* verbal (lançamento de uma moeda, aleatório etc.) e simbólica ("C para cara", "X para coroa", CCCX etc.). Essa linguagem é a parte ostensiva de uma série de *conceitos* (espaço amostral, eventos, probabilidade etc.), *proposições* (eventos equiprováveis que têm a mesma probabilidade etc.) e *procedimentos* (lançar moedas repetidamente e anotar resultados etc.) que se utilizarão na elaboração de *argumentos* para decidir se as ações que compõem a prática são satisfatórias.

Assim, essa sequência didática foi analisada nos aspectos relativos à linguagem e às representações, bem como nos relativos aos conceitos, procedimentos, propriedades e argumentos subjacentes na sequência.

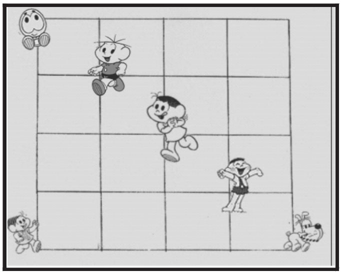
6.1 Análise dos aspectos relativos à linguagem

Na sessão I, os alunos tomaram conhecimento da história:

> A Mônica e seus amigos moram no mesmo bairro. A distância da casa da Mônica para a casa de Horácio, Cebolinha, Magali, Cascão e Bidu é de quatro quarteirões, conforme ilustra a Figura 2. A Mônica costumava visitar seus amigos durante os dias da semana em uma ordem pré-estabelecida: segunda-feira, Horácio; terça-feira, Cebolinha; quarta-feira, Magali; quinta-feira, Cascão e sexta-feira, Bidu. Para tornar

[3] Neste trabalho, os agentes solucionadores da tarefa (instituição ou pessoas) serão denominados, simplesmente, sujeitos, pois trabalharam em duplas.

> mais emocionantes os encontros, a turma combinou que o acaso escolhesse o amigo a ser visitado pela Mônica. Para isso, na saída de sua casa e a cada cruzamento, Mônica deve jogar uma moeda; se sair cara (C), andará um quarteirão para o Norte, se sair coroa (X), um quarteirão para o Leste. Cada jogada representa um quarteirão de percurso. Mônica deve jogar a moeda quatro vezes para poder chegar à casa dos amigos (CAZORLA; SANTANA, 2006, p. 44).



Legenda:
Horácio (dinossauro)
Cebolinha (careca que tem 3 fios de cabelo)
Magali (a menina que está no centro)
Cascão (o menino de macacão)
Bidu (o cachorrinho)
Mônica (a menina do canto inferior esquerdo)

Norte: Leste:

Figura 2 – Cartaz da PAM

A linguagem utilizada na descrição da situação tenta esclarecer, aos sujeitos, as condições que devem levar em consideração para planejar a resolução da tarefa. Essa linguagem inclui *termos* como: ordem, sorte, quarteirões percorridos, sequência. Também inclui *expressões* como: ordem preestabelecida (experimentos determinísticos), percursos ao Norte e ao Leste sobre quadrículas. Esses *termos* e essas *expressões* eram conhecidos pelos sujeitos e não ocasionaram conflitos semióticos de *expressão/conteúdo* (o que emite o emissor e o que interpreta o receptor da informação).

Contudo, a linguagem ligada aos conceitos probabilísticos, da mesma forma como encontrado em Cazorla e Gusmão (2009), apresentou alguns conflitos, como, por exemplo, o significado de palavras tais como: aleatoriedade, chance, probabilidade, como sinônimo de possibilidade, e como termo matemático, função definida numa classe de eventos do espaço amostral tal que satisfaz os três Axiomas de Kolmogorov.

Do ponto de vista da linguagem simbólica, encontramos diversas representações utilizadas para expressar os resultados de quatro lançamentos consecutivos de uma moeda não viciada (Figura 3).

<table>
<tr><th>Representação</th><th>Análise</th></tr>
<tr><td>1°) X; 2°) C; 3°) X; 4°) C</td><td>Sente a necessidade de explicitar a ordem.</td></tr>
<tr><td>N/L/L/N</td><td>Assume a ordem, porém utiliza o símbolo “/” para separar os lançamentos. Representa Norte com N e não com C, como indicado nas instruções.</td></tr>
<tr><td>C/X/X/C</td><td>Similar ao caso anterior, porém utiliza C para representar o Norte.</td></tr>
<tr><td>XCCX</td><td>Faz uma representação sintética, assumindo a intersecção de eventos $X \cap C \cap C \cap X$ = XCCX. É uma notação aprendida na escola.</td></tr>
<tr><td>C^4 e X^4</td><td>É uma notação sintética para representar 4 caras, porém é incorreta, a menos que se pressuponha C^4X^0.</td></tr>
<tr><td>1/2.1/2.1/2.1/2= 1/16</td><td>Ca cula a probabilidade ao invés de registrar o resultado.</td></tr>
<tr><td><table><tr><th>o a a</th><th>Cara</th><th>Coroa</th></tr><tr><td>1ª</td><td>X</td><td></td></tr><tr><td>2ª</td><td>X</td><td></td></tr><tr><td>3ª</td><td></td><td>X</td></tr><tr><td>4ª</td><td></td><td>X</td></tr></table></td><td>Esta representação é muito confusa, pois além de utilizar uma representação tabular, utiliza o mesmo símbolo para registrar Cara e Coroa.</td></tr>
</table>

Figura 3 – Representações utilizadas pelos sujeitos.

As notações utilizadas na construção das tabelas para sintetizar os resultados da experimentação e da modelagem não trouxeram conflitos, tendo em vista que os sujeitos já estavam familiarizados com esses conceitos, bem como com as diversas representações da probabilidade (frações, decimal e porcentagem). O mesmo aconteceu com a construção do gráfico de barras, uma vez que os sujeitos já haviam trabalhado os diversos componentes de um gráfico.

6.2 Análise dos aspectos relativos às representações

Embora, em Matemática, o termo *representação* se refira a qualquer sistema de signos (textual, oral, gestual, gráfico) que expressa os objetos e as relações matemáticas, aqui, quando falamos de representações, referimo-nos a sistemas de signos baseados em imagens: icônica, figural, gráfico-geométrica etc.

As *representações* utilizadas na sequência incluem o cartaz (Figura 2); o Quadro 1 para registro dos resultados da experimentação aleatória (Figura 4); o croqui com o desenho dos caminhos que levam a Mônica à Magali (Figura 5); a Tabela 1, que é uma Tabela de Distribuição de Frequência (TDF), que organiza os dados do Quadro 1 (Figura 6); a árvore de possibilidades (Figura 7); a Tabela 2, que resume os resultados encontrados na modelagem matemática (Figura 8); a Tabela 3 que compara a frequência relativa com a probabilidade teórica (Figura 9), e os gráficos de barras, para representar a frequência relativa e a probabilidade, construídos na grade superior e inferior, respectivamente, no papel transparência disponibilizado (Figura 10).

Realizar os experimentos e preencher o Quadro 1 (Figura 4) foi uma tarefa fácil, sendo que apenas duas duplas, entre as 14, se confundiram ao registrar o amigo visitado.

Repetição	Sequência	Amigo visitado
1.	CCCX	Cebolinha
2.	CXXX	Cascão
3.	XCXC	Magali
4.	XCCC	Cebolinha
5.	CCCC	Horácio
6.	CCXX	Magali
7.	CXCX	Magali
8.	CXCC	Cebolinha
9.	CCXX	Magali
10.	CXCC	Cebolinha
11.	XXCX	Cascão
12.	XXCC	Magali
13.	XXXC	Cascão
14.	XXCX	Cascão
15.	CCXC	Cebolinha

Repetição	Sequência	Amigo visitado
16.	XXXC	Cascão
17.	XXXC	Cascão
18.	XXCX	Cascão
19.	CCXC	Cebolinha
20.	XCCC	Cebolinha
21.	CXCX	Magali
22.	CXXC	Magali
23.	CXCC	Cebolinha
24.	CCXC	Cebolinha
25.	CCXX	Magali
26.	XXCC	Magali
27.	XXXC	Cascão
28.	XXXX	Bidu
29.	XXCX	Cascão
30.	XCCX	Magali

Quadro 1 - Resultados da experimentação

Figura 4 – Exemplo do Quadro 1 preenchido pela dupla 1.

O cartaz utiliza uma notação gráfica do tipo sistemas de coordenadas retangulares, em que se especificam a origem e os pontos de chegada mediante ícones colocados no lugar das personagens que ilustram a situação. Assim, as duplas, no momento da experimentação, devem associar o resultado da moeda com o trecho a ser percorrido nas quadrículas e, após os quatro lançamentos, indicar o amigo visitado.

Para verificar a clareza dessas representações para os participantes, solicitou-se aos sujeitos que escolhessem um resultado arbitrário e desenhassem o percurso em cima do cartaz, o que realizaram sem nenhuma dificuldade. Além disso, solicitou-se que desenhassem no croqui o percurso de todas as maneiras possíveis que a Mônica poderia utilizar para chegar à casa de Magali (Figura 5), utilizando linhas diferentes ou lápis de cor. Esta tarefa pode ser confusa, pois implica no desenho de segmentos de linhas que se sobrepõem. Das 14 duplas, uma esqueceu um caminho e outra encontrou apenas dois caminhos (XCCX e XXCC).

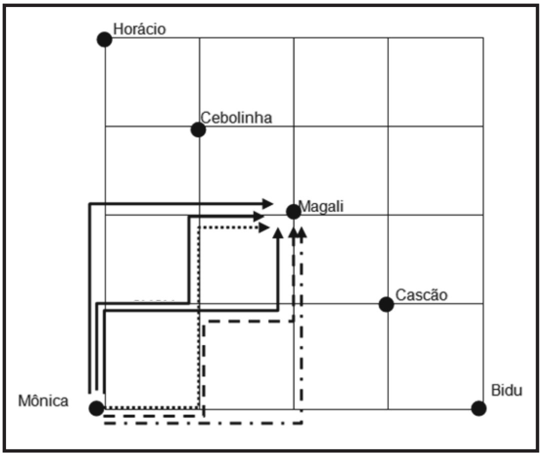


Figura 5 – Croqui com desenho dos caminhos construído pela dupla 1.

Com relação à construção da Tabela de Distribuição de Frequência, todas as duplas conseguiram realizar a tarefa (Figura 6). Isso pode relacionar-se ao fato de que o desenho da tabela foi entregue pronto, requerendo apenas a transposição dos dados do Quadro 1 para a Tabela 1.

Tabela 1 - Distribuição do número de visitas que cada amigo recebeu da Mônica.

Amigo	Nº de vezes que foi visitado	Frequência relativa (hi)	Porcentagem 100hi
Horácio	1	0,03	3,3
Cebolinha	9	0,30	30,0
Magali	10	0,33	33,3
Cascão	9	0,30	30,0
Bidu	1	0,03	3,3
Total	30	1,00	100,0

Figura 6 – Tabela 1 (TDF) construída pela dupla 1.

Com relação à árvore de possibilidades, todas as duplas a construíram sem maior dificuldade (Figura 7), com exceção de uma dupla que teve muita dificuldade, necessitando refazer completamente a árvore, pois não haviam bifurcado os ramos.

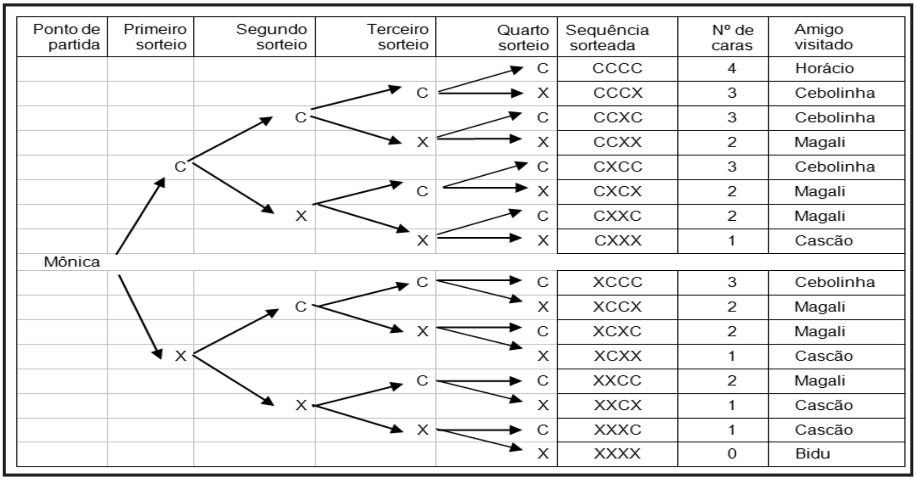


Figura 7 – Arvore de possibilidades construído pela dupla 1.

Após a construção da árvore, requereu-se dos participantes que sistematizassem os resultados na Tabela 2 (Figura 8), para descobrir se havia relação entre o número de caras da sequência sorteada e o amigo visitado. Esta percepção de regularidade foi imediata.

A seguir, para comparar as duas formas de atribuir probabilidades, os sujeitos deviam preencher a Tabela 3 com os dados da Tabela 1 e 2. Esta tarefa também foi fácil e imediata (Figura 9).

Tabela 2 - Distribuição de probabilidade da visita da Mônica aos seus amigos

Amigo	Nº de caminhos	Nº de caminhos/total de caminhos (fração)	Probabilidade (pi)
Horácio	1	1/16	0,0625
Cebolinha	4	4/16	0,2500
Magali	6	6/16	0,3750
Cascão	4	4/16	0,2500
Bidu	1	1/16	0,0625
Total	16	1	1,0000

Figura 8 – Tabela 2 resumo da modelagem matemática preenchida pela dupla 1.

Tabela 3 - Quadro comparativo da atribuição de probabilidades

Amigo	Frequência relativa (hi)	Probabilidade (pi)
Horácio	0,03	0,0625
Cebolinha	0,30	0,2500
Magali	0,33	0,3750
Cascão	0,30	0,2500
Bidu	0,03	0,0625
TOTAL	1,00	1,0000

Figura 9 – Tabela 3 comparativa construída pela dupla 1.

Outra representação utilizada na sequência para tratar as informações foi o gráfico de barras (Figura 10). A construção do gráfico de barras não apresentou nenhum problema, uma vez que foram fornecidas duas grades prontas, em papel transparência, uma embaixo da outra (com os eixos escolhidos e as escalas predeterminadas).

Na grade superior, os sujeitos, depois da experimentação e sistematização dos dados na Tabela 1, deviam construir um gráfico de barras com a frequência relativa. Em seguida, comparar seus gráficos com os de outros colegas.

Do mesmo modo, depois da modelagem matemática, a partir da árvore de possibilidades e da Tabela 2, os sujeitos deviam construir um gráfico de barras na grade inferior e comparar com seus colegas. A Figura 10 ilustra o resultado da dupla 1.

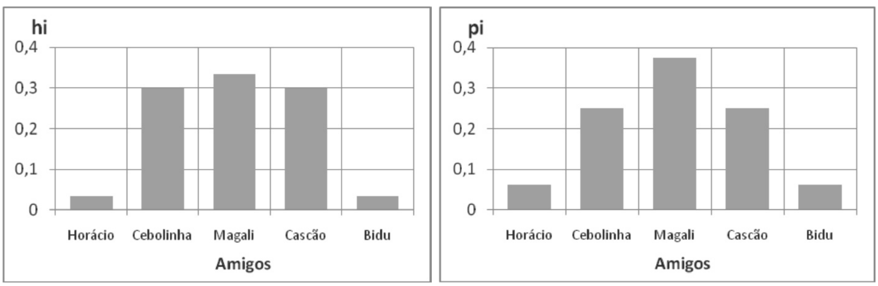


Figura 10 – Exemplo de gráficos construídos pela dupla 1

A comparação dos gráficos, pela superposição do papel transparência permitiu aos sujeitos perceber que, no caso da experimentação, nenhuma dupla teve resultados iguais, contudo havia uma tendência: a Magali, em geral, recebeu a maior quantidade de visitas, os meninos, menos, e as mascotes quase não foram visitadas, como mostram os resultados da Tabela 4.

Tabela 4 – Resultados das estimativas de probabilidade e a probabilidade teórica

Amigo a ser visitado	Nº de caras	Estimativa por duplas (h_i)														Estima-tiva total (h_i)	Proba-bi-lidade (pi)
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14		
Horácio	4	0,03	0,03	0,03	0,07	0,03	0,10	0,07	0,03	0,07	0,10	0,17	0,03	0,07	0,00	0,06	0,0625
Cebolinha	3	0,30	0,23	0,43	0,37	0,20	0,17	0,17	0,27	0,17	0,20	0,37	0,10	0,20	0,23	0,24	0,2500
Magali	2	0,33	0,40	0,27	0,27	0,33	0,43	0,40	0,50	0,53	0,40	0,23	0,50	0,37	0,53	0,39	0,3750
Cascão	1	0,30	0,23	0,23	0,23	0,40	0,20	0,37	0,13	0,23	0,27	0,20	0,33	0,30	0,17	0,26	0,2500
Bidu	0	0,03	0,10	0,03	0,07	0,03	0,10	0,00	0,07	0,00	0,03	0,03	0,03	0,07	0,07	0,05	0,0625
Total		1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,0000

Em contraste, quando os sujeitos compararam os gráficos da probabilidade teórica (p_i) puderam constatar que todos tinham encontrado exatamente os mesmos resultados: Magali com maior probabilidade (0,375), os meninos (Cebolinha e Cascão) com igual probabilidade entre eles, porém menor (0,250), e as mascotes (Horácio e Bidu) também com igual probabilidade, porém muito menor ainda (0,0625), verificando-se a perfeita simetria. Além disso, os sujeitos constataram que essas probabilidades estavam relacionadas ao número de caras (0, 1, 2, 3 e 4).

Assim, os sujeitos puderam perceber que o padrão dos gráficos resultantes da experimentação tinha a mesma tendência do gráfico da probabilidade teórica. Essa percepção foi reforçada com a ajuda da construção da Tabela 3, que compara os dois resultados: o da frequência relativa (estimativa de probabilidade) com o da probabilidade teórica. A construção das tabelas foi uma tarefa fácil para os sujeitos.

Observamos, ainda, nos resultados da Tabela 4, que as duplas 3, 4 e 11 apresentaram maior estimativa para Cebolinha (saíram mais caras). Já a dupla 5 apresentou a maior estimativa para Cascão (saíram mais coroas), seguida da dupla 7. Já as outras duplas tiveram resultados mais simétricos, sendo que a Magali recebeu a maior estimativa. As estimativas para Magali, das duplas 8, 9, 12 e 14 superaram em mais de 0,1 a probabilidade teórica. As duplas 1, 2, 6, 10 e 13 tiveram resultados muito próximos ao teórico.

A percepção dessa regularidade foi manifestada pelos sujeitos, que tentavam argumentar quando suas amostras *fugiam* do padrão, com comentários do tipo *a moeda estava viciada*; *fulano não estava chacoalhando a moeda antes de lançá-la*.

Em geral, os sujeitos não apresentaram dificuldades na construção das tabelas, dos gráficos e da árvore de possibilidades. Contudo, pudemos constatar, no caso da árvore de possibilidades, que os sujeitos não tinham consciência do significado de cada um dos ramos (probabilidade condicional), os eventos resultantes no final de cada ramo (interseção de eventos), a regra da multiplicação e a independência de eventos, com resultados similares aos encontrados por Cazorla e Gusmão (2009).

A notação simbólica também não foi utilizada por nenhuma dupla. Por exemplo, a notação P(C) para simbolizar probabilidade de sair cara, ou o símbolo Omega (letra grega W, maiúscula) para representar o espaço amostral $\Omega = \{C, X\}$, associado ao experimento *lançar uma moeda não viciada*, ou para representar o espaço amostral associado ao experimento *lançar uma moeda quatro vezes consecutivas* $\Omega = \{CCCC, CCCX, CCXC, \ldots, XXXX\}$, ou para representar $P(CCCC) = P(C)P(C)P(C)P(C)$.

6.3 Análise dos conceitos, dos procedimentos e das propriedades subjacentes na sequência

Os *conceitos* de Probabilidade trabalhados por esta sequência foram: experimentos determinísticos e aleatórios, espaço amostral, eventos simples e compostos; probabilidade de cara e coroa (eventos simples), dos caminhos e dos amigos a serem visitados (evento composto). Tabela de distribuição de frequência: frequência absoluta e frequência relativa (probabilidade frequentista). Caminhos possíveis, árvore de possibilidades, frequência esperada pela distribuição Binomial (Laplace), ou probabilidade teórica. Gráfico de barras.

As duplas não apresentaram dificuldades de compreender conceitos como experimentos determinísticos e aleatórios, espaço amostral para o lançamento da moeda, eventos simples, lançamento de quatro vezes a moeda, eventos compostos.

A atribuição de probabilidades para os eventos demonstrou quão forte é a concepção da equiprobabilidade, pois todas as duplas afirmaram que a probabilidade de sair cara é igual à probabilidade de sair coroa e, portanto, igual a 0,5 ou 50%.

Quando perguntados, pela primeira vez (Sessão I), se todos os amigos teriam a mesma probabilidade de serem visitados pela Mônica, sete duplas afirmaram que sim, e suas justificativas foram:

- *Por que a distância entre a casa da Mônica e seus amigos é a mesma e o critério adotado contempla a todos da mesma forma;*
- *Pois todos têm 4 quarteirões de distância e serão jogadas 4 vezes;*
- *Como a forma é aleatória e independente, todos têm a mesma chance;*
- *As casas dos amigos estão na diagonal e as opções são duas: Norte e Leste. As duas favorecem o encontro com os amigos.*

Sete duplas responderam que não, dando respostas do tipo:

- *Porque ao lançar a moeda quatro vezes, o resultado obtido não será sempre o mesmo. Por exemplo, quatro vezes cara ou 1x cara e 3x coroa etc.;*
- *Porque alguém ficará sem ser visitado já que o número de amigos é 5 e o número de lançamento da moeda é 4;*
- *Pois Horácio só tem uma possibilidade de ser visitado, enquanto que Magali tem mais de uma.*

Após a realização da experimentação (Sessão II), foi-lhes perguntado se mudariam de opinião na questão *Todos os amigos teriam a mesma probabilidade de ser visitados pela Mônica?* Aqui, podemos observar o impacto da experimentação na formação do pensamento probabilístico. Todas as duplas ou reafirmaram sua suspeita de que as chances não eram iguais ou repensaram suas posições e mudaram de opinião. A justificativa para suas respostas demonstra a evolução da formação conceitual: *A chance de sair duas caras e duas coroas é maior do que qualquer outra possibilidade*; *Alguns só têm uma única possibilidade de chegada, outros têm mais*; *Quem depende de todos os resultados iguais tem menos chances*.

Apenas uma dupla (D4) insistiu em sua primeira posição: *As chances são as mesmas*. Devemos observar que, embora uma dupla (D9) tenha respondido que as probabilidades não eram iguais, a justificativa nos leva a pensar que eles não tinham clareza de sua resposta: *Porque alguém ficará sem ser visitado, já que o número de amigos é 5 e o número de lançamento da moeda é 4*, e depois da experimentação justificaram: *Porque constatamos o que havíamos marcado antes*; uma vez que encontraram as seguintes estimativas: 0,07 para Horácio; 0,17 para Cebolinha; 0,53 para Magali; 0,23 para Cascão, e zero para Bidu. Neste caso, devemos chamar atenção para o perigo que pode representar a experimentação com amostras *pequenas* e probabilidades baixas, podendo levar a concepções erradas.

O papel da modelagem (Sessão III) na formação do conceito de probabilidade pode ser visto nas respostas dadas pelos sujeitos a essa mesma pergunta: *Porque as sequências que contemplam Bidu ou Horácio apresentam menor probabilidade*; *Embora Bidu tenha 3% de chance, ele será visitado*; *Porque o número de caminhos para casa de Magali é maior que o número de caminhos dos outros amigos*; *Porque diante da análise dos dados, percebemos que existem mais caminhos para levarem a Mônica à casa de Magali que aos outros amigos. Bidu e Horácio apresentam apenas um caminho, Cascão e Cebolinha apresentam 4 caminhos*.

Ao contrário da experimentação, podemos observar que as justificativas para as probabilidades serem diferentes estão pautadas no espaço amostral. Porém, as duas duplas que mostraram dificuldade na experimentação mantiveram sua convicção. Por exemplo, a Dupla 4: *Não é ao acaso e mesmo Magali sendo favorecida com C e X as chances são as mesmas, poderia só cair cara ou coroa*; a Dupla 9: *Por causa da aleatoriedade*. Contudo, a Dupla 3 *regride*, pois tendo iniciado com: *Como a forma é aleatória e independente, todos têm a mesma chance*, após a experimentação afirmaram que: *A chance de sair duas caras e duas coroas é maior do que qualquer outra possibilidade* e, após a modelagem, disseram que: *Continuo afirmando que todos os amigos têm a mesma chance*.

Finalmente, na Sessão IV, os sujeitos são confrontados a se posicionar sobre essas duas formas de atribuir probabilidades. Primeiro os sujeitos deviam explicitar quais eram as diferenças entre essas duas formas de atribuir probabilidades. As respostas foram quase unânimes, por exemplo: *A frequência vem do experimento e a probabilidade das possibilidades de caminho*; *A árvore de possibilidades é uma probabilidade teórica, a frequência esta relacionada ao evento*; *Em uma você divide com o total de repetições e a outra você divide com o número de caminhos percorridos*.

Depois disso, foram solicitados a escolher qual das duas maneiras de atribuir probabilidades seria a mais adequada. Nove duplas optaram pela probabilidade teórica. Três usaram os seguintes argumentos: *É mais prático*; *É mais exato* e *É mais concreto*, mais visível. Quatro duplas usaram argumentos do tipo: *Porque analisou todos os caminhos* ou *Indica as possibilidades de acontecimentos*, e duas duplas afirmaram que *A frequência pode induzir os resultados*; ou que: *O experimento varia de grupo para grupo e as possibilidades não variam*. As quatro duplas que escolheram a frequência argumentaram: *Generaliza o todo*; *Porque os dados são reais e na* p_i *nem todas as possibilidades dos caminhos foram encontrados; Deriva de um processo experimental* e *Porque expressa o resultado real*. Estes sujeitos não conseguiram perceber que estavam diante de amostras aleatórias e que essas podem levar a conclusões errôneas se o tamanho da amostra for pequeno.

A comparação entre essas duas formas de atribuir probabilidade, a frequentista *versus* a teórica, permitiu aos sujeitos explicitar o significado de atribuição de probabilidades a partir de uma modelagem teórica e a partir de uma experimentação aleatória. Nesse momento, o conceito de amostra aleatória pareceu ficar explícito.

Dentre as *propriedades* que emergem das atividades, temos: 1) se sai cara, implica deslocamento para o Norte, caso contrário se desloca para o Leste; 2) se a probabilidade de cara é ½, então a probabilidade de coroa também é ½; 3) se dois eventos são mutuamente excludentes e complementares, então sua união compõe o espaço amostral e suas probabilidades somam 1; 4) se dois eventos são independentes, então a probabilidade da interseção é igual ao produto de probabilidades; 5). Lei dos grandes números (estabilização das frequências): quando o tamanho de um experimento cresce indefinidamente a frequência relativa aproxima-se, cada vez mais, da lei de Laplace (número de casos favoráveis/número de casos possíveis), dentre outras.

6.4 Análise dos argumentos

No decorrer da atividade, observamos que muitos dos sujeitos utilizaram, de forma intuitiva, as propriedades e os axiomas de probabilidade para justificar seus argumentos. Por exemplo, eles atribuíram ½ para a probabilidade de sair cara e, imediatamente, atribuíram ½ à probabilidade de sair coroa. A justificativa verbal dada pelos professores foi: *Só pode ser ½, pois só existem dois possíveis resultados e a soma dos dois deve ser 1*. Assim como os resultados encontrados por Cazorla e Gusmão (2009), os argumentos implícitos, no caso do lançamento da moeda, foram: o espaço amostral é formado por apenas dois eventos ($\Omega = \{C, X\}$); os eventos são mutuamente excludentes ($C \cap X = \emptyset$); os eventos são complementares ($C^C = \Omega - X$); a união desses eventos recompõe o espaço amostral ($C \cup X = \Omega$); a soma de suas probabilidades é igual a um ($P(C \cup X) = P(\Omega)$); a probabilidade da união de dois eventos mutuamente excludentes é igual à soma de suas probabilidades ($P(C) + P(X) = 1$). Portanto, se $P(C) = ½$, então, $P(X) = 1 - ½ = ½$.

No caso da probabilidade para o evento composto, associado ao experimento *lançamento da moeda quatro vezes*, observamos que apenas uma dupla utilizou a notação *1/2.1/2.1/2.1/2 = 1/16*. Esse registro parece indicar que esses sujeitos partiram do pressuposto de eventos independentes e do conhecimento de que a probabilidade da interseção de eventos simples independentes é igual ao produto de probabilidades: $P(C \cap C \cap C \cap C) = P(CCCC) = P(C).\ P(C).\ P(C).\ P(C). = 1/2.1/2.1/2.1/2 = 1/16$.

7 Considerações finais

Em relação ao desempenho dos sujeitos nas atividades, os resultados mostraram que, mesmo se tratando de professores que haviam visto esses conteúdos nos seus cursos de graduação e que alguns desses conteúdos eles estavam ensinando, não se lembravam das propriedades, nem dos axiomas, utilizando-os de forma intuitiva. Dois professores manifestaram que sabiam do que se tratava, mas não se lembravam das fórmulas.

Quanto à atividade, os resultados são muito promissores, pois a experimentação aleatória conseguiu mostrar aos sujeitos que a frequência relativa é uma estimativa da probabilidade teórica, porém depende da amostra, podendo variar segundo a amostra. Contudo, a comparação dos gráficos no papel transparência permitiu observar a existência de um padrão comum, que se aproxima da probabilidade teórica.

Era intenção trabalhar, também, com a percepção dos sujeitos para a *Lei dos grandes números* (que afirma que para um número muito grande de repetições do experimento, a frequência relativa se estabiliza ao redor do valor da probabilidade teórica) e para tal percepção fazia falta aumentar o tamanho da amostra, o que não foi possível devido ao tempo, que foi limitado.

A utilização da técnica de análise semiótica do EOS vislumbra resultados consideráveis para a proposta de nosso trabalho, uma vez que nos permite um olhar mais atento e detalhado sobre os objetos implicados na atividade matemática, dando lugar a uma avaliação da sequência com vistas a um melhor planejamento, delineamento e eficácia no seu uso.

Também, é nosso desejo que este trabalho contribua para a formação científica do professor e, consequentemente, do estudante, tornando mais compreensiva a temática aqui estudada.

Referências

AINLEY, J.; MONTEIRO, C. Comparing Curricular Approaches for Statistics in Primary School in England and Brazil: A Focus on Graphing. In: JOINT ICMI/IASE STUDY - Teaching Statistics in School Mathematics: Challenges for teaching and teacher education. 2008, Monterrey, México. **Anais...** Monterrey, México. 2008. Disponível em: <http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/>. Acesso em: 10 jan. 2010.

BATANERO, C.; GODINO, J. D.; ROA, R. Training teachers to teach probability. **Journal of Statistics Education** [online], Alexandria, VA, v. 12, n. 1, 2004. Disponível em: <http://www.amstat.org/publications/jse/v12n1/batanero.html>. Acesso em: 10 jan. 2010.

BATANERO, C.; GODINO, J. Didáctica de la estadística y probabilidad para maestros: Probabilidad. In: GODINO, J. **Didáctica de las Matemáticas para Maestros.** Proyecto Edumat maestros. Granada: Universidad de Granada, 2002, p. 425-444. Disponível em: <http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros>. Acesso em: 10 jan. 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática**.** Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Fundamental, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática**.** Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Fundamental, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN Ensino Médio**: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação/ Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2010.

CAZORLA, I.; KATAOKA, V. Y.; NAGAMINE, C. M. L. Os passeios aleatórios da Carlinha. In: **Tutorial do AVALE**, 2010. Disponível em: < http://avale.uesc.br>. Acesso em: 10 jul. 2010.

CAZORLA, I.; SANTANA, E. **Tratamento da Informação para o Ensino Fundamental e Médio**. Itabuna, BA: Via Litterarum, 2006.

CAZORLA, I; GUSMÃO, T. Uma análise semiótica dos passeios aleatórios da Mônica: atividade para ensinar conceitos básicos de Probabilidade. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4., 2009, Taguatinga-DF. **Anais ...** Taguatinga-DF: UCB, 2009. p. 1–19.

COUTINHO, C. Q. S. **Introduction aux Situations Aléatoires dès le Collège:** de la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri-géomètre II. 2001. 338f. Tese (Doutorado em Didática da Matemática) – Informatique et Mathématiques Appliquées, Universidade J. Fourier, Grenoble, France, 2001. Disponível em: <http://www.pucsp.br/~cileda/theseCileda.PDF>. Acesso em: 10 jul. 2010.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S**. Investigação em Educação Matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

GODINO, J. D. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática**. Recherches en didactique des Mathématiques***,* Paris, v. 22, n. 2,3, p. 237-284, 2002.

GODINO, J. D. et al. Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontossemiótico. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 27, n. 1, p. 59-76, 2009.

GODINO, J. D.; BATANERO, C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Paris, v. 14, n. 3, p. 325-355, 1994.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. T. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. **ZDM. The International Journal on Mathematics Education,** New York: Springer, v. 39, n.1-2, p. 27-135, 2007.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática. **Acta Scientiae, Revista de Ensino de Ciências e Matemática,** Canoas, v. 10, n. 2, p. 7-37, 2008.

GONÇALVES, H. Educação Estatística: Apontamentos Sobre a Estatística nos Cursos de Pedagogia - magistério para Séries Iniciais do Ensino Fundamental. In: SEMINÁRIO IASI DE ESTATÍSTICA APLICADA, 9., 2003, Rio de Janeiro. **Anais ...** . Rio de Janeiro: ABE/IBGE, 2003. p. 1-12.

GUSMÃO, T. **Los procesos metacognitivos en la comprensión de las prácticas de los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos**: una perspectiva ontossemiótica. 2006. 366p. Tese (Doutorado em Didáctica de las Matemáticas) – Faculdade de Ciências da Educação, Universidade de Santiago de Compostela, Espanha, 2006.

GUSMÃO, T.; FONT, V.; CAJARAVILLE, J. Análise cognitivo e metacognitivo de práticas matemáticas de resolução de problemas: O caso Nerea. **Educação Matemática Pesquisa,** São Paulo, v. 11, n. 1, p. 9-43, 2009.

HENRIQUES, A. **Dinâmica dos Elementos da Geometria Plana em Ambiente Computacional Cabri-Géomètre II**. Ilhéus, BA: Editus, 2001.

PECK. R.; GOULD, R. Preparing secondary teachers to teach statistics: A distance education model. In: SESSION INTERNATIONAL STATISTICAL INSTITUTE, 55th, 2005, Sydney. **Proceding...** Sydney, 2005, p. 1-4. Disponível em: <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/13/Peck-Gould.pdf >. Acesso em: 10 jan. 2010.

SERRADÓ, A.; AZCÁRATE, P.; CARDEÑOSO, J. M. Analyzing teacher resistance to teaching probability in compulsory education. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON TEACHING STATISTICS, 7 th, 2006. **Proceeding...**, Salvador, Brasil: International Association for Statistical Education, 2006, CD ROM. (A. Rossman; B. Chance (Eds.)). Disponível em: <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications>. Acesso em: 10 jan. 2010.

VIALI, L. O ensino de Estatística e Probabilidade nos cursos de licenciatura em Matemática. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA, 18., 2008, São Pedro. **Anais ...** Estância de São Pedro, SP, ABE, 2008.

Submetido em Junho de 2010.
Aprovado em Outubro de 2010.