ISSN 0103-636X

O Movimento das Ideias Probabilísticas no Ensino Fundamental: análise de um caso

The Movement of Probabilistic Ideas in Basic School: a case analysis

Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos*
Regina Célia Grando**

Resumo

Objetivamos, com este artigo, apresentar um recorte de nossa pesquisa de mestrado: a análise de um caso com abordagem qualitativa, envolvendo alunos do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública estadual em que a professora-pesquisadora ministra aulas de Matemática, em uma cidade do interior do Estado de São Paulo. O propósito foi identificar as ideias sobre linguagem e pensamento probabilístico que emergem do processo de comunicação oral e escrita, tendo como metodologia a resolução de problemas em uma perspectiva investigativa e, como foco, as questões estocásticas. A análise possibilitou constatar que a metodologia adotada em sala de aula, no contexto de resolução de problemas, mediada pelo processo de comunicação oral e escrita, favorece o movimento das ideias probabilísticas dos alunos e, consequentemente, o desenvolvimento do pensamento probabilístico.

Palavras-chave: Pensamento Probabilístico. Linguagem Probabilística. Estocástica. Estatística. Resolução de Problemas.

* Mestre em Educação pela Universidade São Francisco (USF). Professora de Matemática da Escola Estadual "Dionysia Gerbi Beira" e da Escola Técnica Estadual "João Belarmino", Amparo, SP, Brasil. Endereço para correspondência: Avenida Europa, 701, casa 56, Jardim Camanducaia, CEP: 13905-100. Amparo, SP, Brasil. *E-mail*: jaquelisantos@ig.com.br

** Doutora em Educação pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Professora e Coordenadora do Curso de Pós-Graduação da Universidade São Francisco (USF), Itatiba, SP, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Vicenzo Trevisan, 257. Serrinha, CEP: 13254-624. Itatiba, SP, Brasil. *E-mail*: regrando@yahoo.com.br

Abstract

We present preliminary findings from our master's research: a case study with a qualitative approach, involving 7th grade students from a public school where the teacher-researcher teaches mathematics, in a city located in the interior of the state of São Paulo. The intention was to identify ideas about language and probabilistic thought that emerge from the process of verbal communication and writing, using a problem-solving approach from an investigative perspective, focusing on questions involving the concept of stochastic. The analysis found evidence that the methodology adopted in the classroom, in the context of problem-solving, mediated by the process of verbal communication and writing, favors the movement of probabilistic ideas of the students and, consequently, the development of probabilistic thought.

Keywords: Probabilistic Thought. Probabilistic language. Stochastic. Statistics. Resolution of Problems.

1 Introdução

A importância do ensino de Estatística e Probabilidade nas escolas desde as séries iniciais vem sendo discutida por autores de diversos países, inclusive do Brasil. O tema, em nosso país, é sugerido nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998) e no currículo da maioria dos Estados e das escolas; em algumas delas, desde a Educação Infantil.

Apesar disso, os dados do Indicador Nacional de Analfabetismo Funcional (INAF)[1] apontam um alto índice de desconhecimento e/ou dificuldade da população sobre o assunto. Atentos a isso, pesquisadores buscam soluções para minimizar o problema, pois acreditam que o ensino da estocástica[2] seja de suma importância para a sociedade atual, já que suas implicações se refletem diretamente na interpretação das informações, nas tomadas de decisões profissionais e pessoais, nas questões éticas, na postura crítica diante das situações do dia-a-dia. Shaughnessy (1992) defende a ideia de um ensino contínuo e de forma significativa, em que as situações apresentadas aos alunos sejam de seu interesse. De modo semelhante, Lopes (2008) sugere que tal processo de ensino e aprendizagem deva ser baseado em investigações e resoluções de problemas.

[1] O Indicador Nacional de Analfabetismo Funcional — Inaf — consiste em um levantamento periódico de dados sobre as habilidades de leitura, escrita e matemática da população brasileira. (FONSECA, 2004).

[2] Entende-se *estocástica* como termo europeu utilizado para incluir probabilidade e estatística. *Stochastics the common European term to include "probability and statistics"* (SHAUGHNESSY, 1992).

O objetivo deste artigo é apresentar parte de nossa pesquisa de mestrado, que buscou investigar quais são as ideias sobre linguagem e pensamento probabilísticos que alunos do Ensino Fundamental apresentam, em um contexto de resolução de problemas, mediados pelo processo de comunicação em aulas de matemática. Para isso, organizamos uma sequência de 25 tarefas[3], tendo como metodologia a resolução de problemas em uma perspectiva investigativa, com o foco nas questões estocásticas.

A pesquisa foi realizada com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública estadual de ensino em que a professora-pesquisadora ministrava aulas de Matemática, em uma cidade do interior do estado de São Paulo. Caracteriza-se como um estudo desenvolvido em abordagem qualitativa, que considera a sala de aula da pesquisadora — um ambiente de aprendizagem de alunos e professora-pesquisadora — como contexto para a pesquisa. Foi proposta aos sujeitos uma sequência de tarefas[4] que visam mais diretamente às probabilidades, que proporcionaram aos alunos contato com a linguagem ligada à estocástica, à análise de possibilidades, à estimativa de medida de chances, à experimentação e à avaliação de situações reais e simuladas.

Optamos por um trabalho em sala de aula que considera a divisão do ambiente de aprendizagem em três fases: a fase do *antes* — introdução da tarefa; a fase do *durante* — realização da tarefa; e a fase do *depois* — socialização da tarefa, como sugerido por Van de Walle (2009). Nessa etapa, os sujeitos foram organizados em pequenos grupos, em contexto de sala de aula, e realizaram dezoito tarefas. Na segunda etapa da pesquisa, quatro alunos realizaram sete tarefas individualmente e foram entrevistados após as realizações destas.

A linguagem probabilística foi nosso ponto de partida. Pautamo-nos em conclusões de pesquisas, como as de Bentz e de Borovcnik e Bentz (apud SAENZ, 1999), que argumentam que as respostas obtidas podem não representar os processos de pensamento dos estudantes, pois as questões relacionadas à linguagem podem confundi-los; e as pesquisas de Green (apud SAENZ, 1999),

---

[3] Denominamos *tarefas*, situações-problema, abertas ou fechadas, que possibilitavam colocar o aluno em um movimento de resolução de problemas e produção de pensamento matemático. Algumas das tarefas serão descritas mais à frente; a sua totalidade está disponível na dissertação de Santos (2010). As tarefas utilizadas nesse estudo foram obtidas através de consultas a outras pesquisas desenvolvidas sobre o tema (LOPES, 2003; GODINO; BATANERO; CAÑIZARES, 1996; SAENZ, 1999; FERNANDES; BARROS, 2005), bem como de livros didáticos (LOPES, 2000).

[4] Parte da sequência de tarefas foi elaborada com o grupo de pesquisa em Educação Matemática da Universidade São Francisco (campus de Itatiba) - GRUCOMAT (Grupo Colaborativo de Matemática) - do qual fazemos parte.

que apontam pouca habilidade verbal dos estudantes para descrever com coerência situações probabilísticas. Sendo assim, tínhamos como objetivo pedagógico, em algumas tarefas, proporcionar contato e reflexões sobre palavras que fazem parte do nosso cotidiano e da linguagem probabilística, já que, por meio delas, expressamos nossa confiança sobre a ocorrência de certos eventos. Tínhamos como propósito de pesquisa observar como os alunos atribuíam significados a essas palavras.

A realização da sequência de atividades com alunos — a pesquisa de campo — exigiu instrumentos de coleta de dados adequados aos procedimentos adotados. Dessa forma, a coleta de informações deu-se por meio dos registros escritos dos grupos de alunos em folha impressa fornecida pela professora-pesquisadora, realizados durante a atividade; dos registros em áudio de entrevista semi-estruturada, com alguns alunos fora do contexto de sala de aula, dentre eles Humberto — o caso que descrevemos nesse artigo; dos registros em vídeo da socialização das atividades durante a aula; e dos registros escritos da professora-pesquisadora no diário de campo.

Estudos feitos por pesquisadores como Shaughnessy (1992) e Azcárate (1996), assim como as investigações realizadas por Fernandes (1999) e Godino, Batanero e Cañizares (1996), fizeram parte da revisão teórica que norteou nossa pesquisa.

Shaughnessy (1992) orientou-se em pesquisas realizadas por educadores e psicólogos para criar o modelo de desenvolvimento conceitual estocástico, segundo ele, procurando o equilíbrio entre simplicidade e utilidade. Seu objetivo era criar um modelo que aproximasse pesquisadores e professores dos resultados que encontrou em suas pesquisas. O autor procurou organizar as diferentes concepções sobre estocástica em quatro níveis de sofisticação conceitual: não estatística; estatística ingênua; estatística emergente e estatística pragmática; os quais, afirma ele, oferecem aos professores indicativos sobre quais concepções seus alunos evidenciam e de quais necessitam apropriar-se, o que possibilita ao aluno um avanço em suas concepções estocásticas.

Azcárate (1996) orientou-se nos estudos realizados com professores primários, na Espanha, nos quais definiu quatro categorias de concepções probabilísticas que possibilitaram a elaboração de um modelo explicativo de hipóteses do conhecimento probabilístico dos sujeitos. A autora utiliza esse modelo como referência na orientação, na interpretação de dados e na formulação de hipóteses de progressão em suas investigações. O modelo configura quatro hipóteses, em relação ao tratamento da probabilidade: inclusão não explícita; concepção intuitiva; concepção emergente e concepção normativa; que são divididas em dois aspectos: conceitual e quantificador.

Em suma, Shaughnessy (1992) e Azcárate (1996) estabeleceram critérios semelhantes para analisar as concepções estocásticas dos sujeitos em suas pesquisas. Em um amplo conjunto de dados, os autores buscaram classificar os sujeitos de acordo com as ideias por eles apresentadas, em uma única *concepção probabilística*, à qual atribuem caráter progressivo. Nosso objetivo, ao adotar essa diretriz para nossa pesquisa, é evidenciar como essas ideias estocásticas percorrem as diferentes concepções probabilísticas; ou seja, consideramos que um mesmo aluno possa ter uma concepção, diante de uma determinada tarefa, e outra, em outra tarefa. Entendemos que as situações relacionadas à incerteza podem ser interpretadas de diferentes maneiras, por diferentes concepções probabilísticas, conduzindo ou não as pessoas às respostas adequadas.

Abordaremos, na sequência, uma discussão acerca das concepções sobre probabilidade, pensamento e linguagem probabilísticos. Traremos a análise dos registros orais e escritos, produzidos por um dos casos analisados em nosso estudo: o do aluno Humberto que, na primeira etapa da pesquisa, trabalhou em um grupo formado por quatro alunos e, na segunda etapa, desenvolveu tarefas individualmente. Ao centrarmos o foco em um dos alunos, buscamos analisar o movimento do pensamento probabilístico produzido por ele em um trabalho tanto coletivo, junto com seus parceiros de grupo, quanto individual, em uma situação particular de resolução de tarefas e interação com a professora-pesquisadora. Optamos por trazer esse caso, uma vez que ele se evidenciou como representativo da compreensão sobre o pensamento probabilístico dos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, no movimento entre as produções coletivas e individuais desse aluno.

2 O pensamento probabilístico: concepções sobre probabilidade e estocástica

Em nosso trabalho, tomamos como foco o estudo da teoria das probabilidades, embora entendamos que não seja possível tratar do pensamento probabilístico isolado de uma perspectiva mais ampla, que inclui a estatística, como é proposto pelos estudos no campo da estocástica. Segundo Costa (2007, p. 25), o estudo matemático das probabilidades estabelece relação com a estatística na "utilização de técnicas analíticas para identificar e caracterizar eventuais relações entre as variáveis em estudos e os níveis de relação entre tais variáveis que se fundamentam na Teoria das Probabilidades".

No trabalho pedagógico com os alunos da Educação Básica é comum observar que eles apresentam muito mais dificuldades em aplicar noções probabilísticas do que outros conceitos matemáticos. Sáenz (1999) justifica tal situação pela dificuldade em pensar no enfoque de quantificar o azar, situação não presente em geometria, por exemplo. Para o autor, a concepção de probabilidade é fruto de reflexão e prolongado contraste com a realidade. Dessa forma, a compreensão dos princípios probabilísticos é importante, pois, segundo Fischbein (1975), as primeiras noções sobre o assunto, noções primárias, podem levar ao erro.

As diferentes abordagens das concepções probabilísticas, de acordo com Fernandes (1999), apresentam caráter multifacetado e podem induzir a diferentes perspectivas. De modo semelhante, Shaughnessy (1992) ressalta que a tradição dualista da noção de probabilidade — como grau de crença e como cálculo de frequências —, que ainda é bastante comum, conduz a debates de pesquisas de maneira quase ardilosa. Acrescenta, ainda, que os méritos das diferentes concepções sobre probabilidade têm sido apresentados, por meio da literatura, como se houvesse uma batalha a ser vencida.

Os teóricos do assunto distinguem os conceitos de probabilidade em quatro grupos que se aproximam (CIRINO, 2007, p. 33):

(1) o conceito clássico;

(2) o conceito frequentista ou empírico;

(3) o conceito subjetivista;

(4) o conceito axiomático ou formal.

Atribui-se ao *conceito clássico e laplaciano* a definição de concepção clássica baseada em Laplace, contida na obra *Théorie analytique des probabilités*, publicada em 1812. Assim, a probabilidade é definida pela razão entre números de casos favoráveis em relação ao total de casos possíveis, desde que esteja explícito que todos os resultados sejam igualmente prováveis de ocorrer. Nesta definição de probabilidade, "assume-se implicitamente a equiprobabilidade de todos os acontecimentos elementares do espaço amostral e constitui uma abordagem a priori da probabilidade, pois se calculam probabilidades antes da realização de qualquer experiência física". (FERNANDES, 1999, p. 51).

A principal característica do *conceito frequentista ou empírico* é que a probabilidade de um acontecimento emerge do processo de experimentação. Segundo Godino, Batanero e Cañizares (1996), o valor da probabilidade é dado pela frequência relativa de sucessos obtidos na realização de um experimento. Por exemplo, suponhamos um sucesso particular A que nos interessa; realizamos o mesmo experimento várias vezes e anotamos as ocasiões em que ocorre A; então, a razão entre o número de vezes que sucede A, n_A, e o número total de repetições n (razão frequencial ou frequência relativa de que A ocorra, isto é,

n_A/n) assemelha-se à tendência de um limite, quando *n* tende ao infinito.

Dessa forma, as probabilidades são baseadas em resultados de experiências realizadas, o que é denominado probabilidade *a posteriori*, uma vez que a probabilidade de um evento é estimada depois de os experimentos terem sido realizados. Nessa perspectiva, eventos individuais são inseridos no coletivo, ou seja, eventos semelhantes são inseridos em um mesmo contexto, em que assumem as propriedades individuais uns dos outros.

Na perspectiva *subjetivista*, as probabilidades expressam grau de crença ou percepção pessoal. O indivíduo utiliza suas experiências e seu conhecimento sobre o assunto para expressar a probabilidade de um sucesso, o que possibilita diferentes medidas de probabilidade para um mesmo sucesso. Fernandes (1999, p. 53) designa essa perspectiva como "personalista", pois, segundo o autor, as duas concepções anteriores – clássica e frequentista - são propriedades do mundo real, enquanto, na percepção subjetivista, as probabilidades são avaliações pessoais de situações aleatórias, inerentes à mente do indivíduo. Desse modo, a probabilidade passa de uma avaliação externa ao aluno para uma avaliação centrada no aluno.

Shaughnessy (1992) ressalta que é possível matematizar probabilidades subjetivas como uma forte dependência sobre o teorema de Bayes e uma teoria que possibilite uma (re)significação de probabilidades, baseada nas informações acessíveis – informações prévias e as suas experiências.

A concepção *formal* ou *axiomática* da probabilidade, vigente nos dias atuais, segundo Godino, Batanero e Cañizares (1996), originou-se dos trabalhos de Kolmogorov. Surgiu como oposição à concepção clássica e está apoiada na teoria dos conjuntos, em que o autor, associado a uma situação aleatória, elege o espaço amostral *E* e um subconjunto *A* formado pelos sucessos de *E*. Dessa forma, a probabilidade é definida pela razão entre números de *A* em relação ao espaço amostral *E* compreendida entre 0 e 1; a probabilidade do evento certo é igual a 1, e de um sucesso impossível é igual a 0.

Em que a compreensão sobre tais conceitos relacionados ao pensamento probabilístico nos auxilia nessa pesquisa? Acreditamos que algumas dessas diferentes concepções estejam presentes no ideário e no discurso de alunos na Educação Básica, principalmente daqueles que ainda não tiveram a oportunidade de vivenciar teoricamente conceitos relacionados à probabilidade como medida, à ideia de aleatoriedade, à probabilidade condicional etc., como os alunos do 7º ano do Ensino Fundamental. Dessa forma, partimos do pressuposto de que muitos desses conceitos seriam *encontrados* durante a realização das tarefas que propusemos aos alunos na pesquisa.

3 O movimento das concepções probabilísticas: o caso de Humberto

Como já mencionado, nossa pesquisa foi dividida em duas fases: a primeira foi desenvolvida com todos os alunos das turmas investigadas, organizados em grupos no contexto de sala de aula; e a segunda, individualmente, fora da sala de aula, com quatro alunos que participaram também da primeira fase. A escolha dos alunos não foi tarefa fácil, pois havia muitos em situações semelhantes, mas a necessidade de focar mais nosso interesse de pesquisa obrigou-nos a um recorte, para reduzir o número de alunos envolvidos.

Humberto, que, na primeira etapa, pertencia a um grupo de quatro alunos formado por duas meninas e dois meninos, destacou-se perante os colegas de grupo e de classe por suas argumentações durante a realização das tarefas, pois, quando não concordava com as considerações dos colegas, expunha espontaneamente suas ideias e argumentava com eles, o que facilitava nossa compreensão sobre *como estava pensando*. Tal fato nos conduziu a selecioná-lo para realizar as tarefas da segunda fase da pesquisa.

Nessa segunda fase, foi proposta aos alunos uma sequência com sete tarefas, com características semelhantes às anteriores; portanto, na perspectiva de resolução de problemas e tendo como foco as questões probabilísticas. No entanto, algumas ações pedagógicas foram alteradas, uma vez que os alunos realizaram as tarefas individualmente e em um contexto diferenciado, fora da sala de aula. Depois da realização das tarefas, foram feitas entrevistas reflexivas (SZYMANSKI; ALMEIDA; PRANDINI, 2002), nas quais o aluno Humberto pôde confrontar as respostas dadas por ele na primeira e na segunda fase da pesquisa. Também lhe foi possibilitado refletir e explicar suas respostas e ideias.

3.1 Humberto e o seu grupo

Nas primeiras tarefas, que visavam à reflexão e à apropriação da linguagem, observamos que o grupo de que Humberto fazia parte utilizava justificativas qualitativas do tipo pessoal e raciocínio baseado no reconhecimento das situações de incerteza. Na tarefa, que relacionava a linguagem estocástica à previsão do tempo, o grupo também estabeleceu, de forma coerente, relações entre a linguagem estocástica e a previsão meteorológica do tempo.

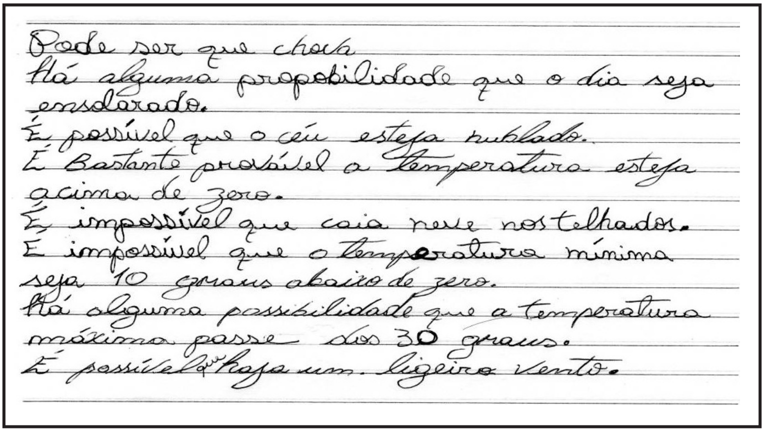
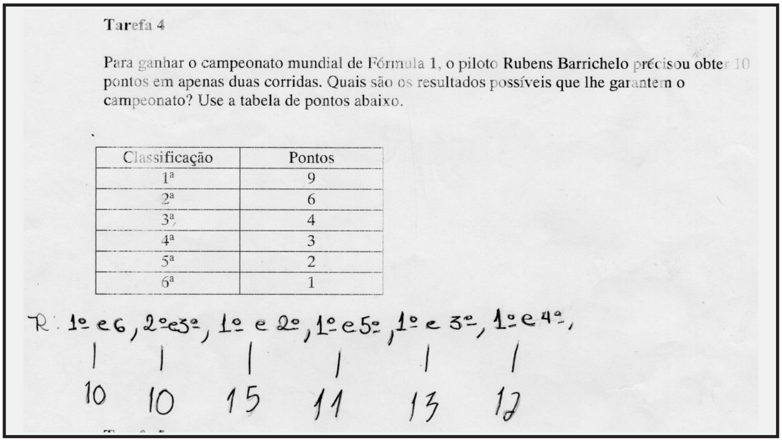

Pode ser que chova
Há alguma propobilidade que o dia seja ensolarado.
É possível que o céu esteja nublado.
É Bastante provável a temperatura esteja acima de zero.
É impossível que caia neve nos telhados.
É impossível que o temperatura mínima seja 10 graus abaixo de zero.
Há alguma possibilidade que a temperatura máxima passe dos 30 graus.
É possível q. haja um ligeiro vento.

Figura 1 - Resolução dos alunos da tarefa sobre a previsão do tempo

Dentre as justificativas encontradas pelo grupo, verificamos que esses alunos se basearam na frequência dos fenômenos climáticos observados na cidade onde residem, levando em conta as diferentes estações do ano e o aquecimento global, os quais eles admitiram que poderiam interferir em tais previsões. Aliado a isso, acrescentaram os valores quantificadores pessoais que são atribuídos implicitamente à linguagem probabilística.

Dessa forma, observamos que estão presentes em suas concepções as explicações conceituais subjetivistas e frequenciais, além de decisões apoiadas no modelo laplaciano, cujas relações estabelecidas indicam a ideia de equiprobabilidade entre os possíveis acontecimentos, como, por exemplo, no caso de cair neve nos telhados e a temperatura mínima ser 10 graus abaixo de zero.

Outro conjunto de tarefas dizia respeito à análise das possibilidades de situações combinatórias simples. Entendíamos que, após a apropriação da linguagem probabilística, um dos conceitos principais a ser trabalhado era a ideia da construção do espaço amostral, o que dependia do pensamento combinatório. Dessa forma, esse conjunto de tarefas tinha como objetivo movimentar o pensamento combinatório dos alunos. Pelos registros escritos produzidos por estes, na resolução dessas tarefas, observamos que eles apresentaram raciocínio combinatório correto, porém incompleto.



Tarefa 4

Para ganhar o campeonato mundial de Fórmula 1, o piloto Rubens Barrichelo precisou obter 10 pontos em apenas duas corridas. Quais são os resultados possíveis que lhe garantem o campeonato? Use a tabela de pontos abaixo.

Classificação	Pontos
1ª	9
2ª	6
3ª	4
4ª	3
5ª	2
6ª	1

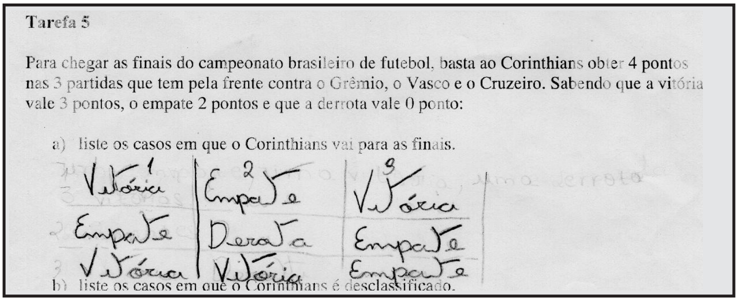
R: 1º e 6, 2º e 3º, 1º e 2º, 1º e 5º, 1º e 3º, 1º e 4º,

10 10 15 11 13 12

Figura 2 - Resolução dos alunos da tarefa envolvendo o pensamento combinatório

Em apenas uma das tarefas, em que havia no total cinco possibilidades, o grupo determinou todas as combinações; nas demais, os alunos registraram parte delas.

Nos registros da resolução das tarefas observamos, também, as formas de comunicação das suas ideias: eles raramente as apresentam de forma organizada, nem mesmo as conferem, pensando em certa sequência lógica ou organização.



Tarefa 5

Para chegar as finais do campeonato brasileiro de futebol, basta ao Corinthians obter 4 pontos nas 3 partidas que tem pela frente contra o Grêmio, o Vasco e o Cruzeiro. Sabendo que a vitória vale 3 pontos, o empate 2 pontos e que a derrota vale 0 ponto:

a) liste os casos em que o Corinthians vai para as finais.

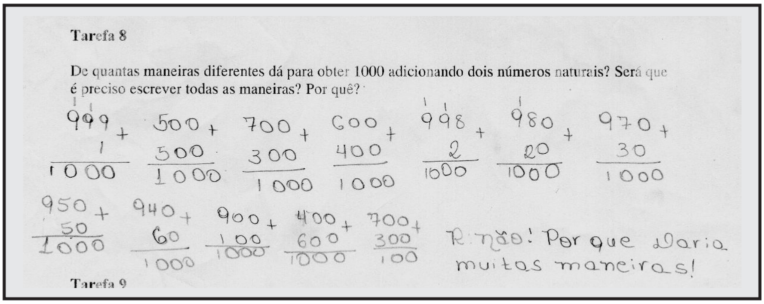
1	2	3
Vitória	Empate	Vitória
Empate	Derrota	Empate
Vitória	Vitória	Empate

b) liste os casos em que o Corinthians é desclassificado.

Figura 3 - Organização da resposta da tarefa em forma de tabela

Identificamos, no decorrer das tarefas, que os alunos que apresentavam tal organização determinavam o número total de possibilidades ou aproximavam-se dele. Não defendemos o ensino de técnicas de organização em situações como essas, mas apontamos que esse modo de apresentar os dados pode exprimir um avanço no raciocínio combinatório, para alunos que nunca estiveram expostos a situações estocásticas.

Houve uma preocupação em oferecer aos alunos tarefas que evidenciassem os limites do cálculo das combinações pela estratégia de identificação dos casos. Assim, a tarefa 8 (Figura 4), apresentada a seguir, tinha essa preocupação:


Tarefa 8

De quantas maneiras diferentes dá para obter 1000 adicionando dois números naturais? Será que é preciso escrever todas as maneiras? Por quê?

999 + 1 = 1000; 500 + 500 = 1000; 700 + 300 = 1000; 600 + 400 = 1000; 998 + 2 = 1000; 980 + 20 = 1000; 970 + 30 = 1000; 950 + 50 = 1000; 940 + 60 = 1000; 900 + 100 = 1000; 400 + 600 = 1000; 700 + 300 = 100

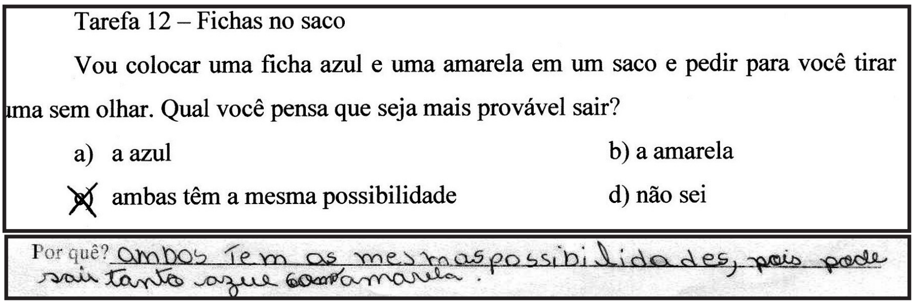
R: Não! Porque daria muitas maneiras!

Tarefa 9

Figura 4 - Tentativa de obter todas as combinações possíveis para a soma 1000

Levando em conta os registros realizados e a justificativa dada pelo grupo na tarefa 8, sobre as diferentes maneiras de obter 1000 adicionando dois números naturais e a necessidade de realizar o respectivo registro, a resposta do aluno, mesmo pouco profunda — *Não! Porque daria muitas maneiras* —, revela o reconhecimento de um número elevado de combinações. Assim, a partir da análise do conjunto de tarefas envolvendo o pensamento combinatório, inferimos que os alunos apresentam raciocínio combinatório correto e têm o conhecimento de que o número de possibilidades varia de acordo com as situações. Além disso, são capazes de reconhecer que, em casos mais amplos, fica difícil escrever todas as possibilidades.

Outro conjunto de tarefas contemplava a ideia de probabilidade, ou seja, a medida de chance. Nelas observaram-se equívocos relacionados à compreensão do espaço amostral.


Tarefa 12 – Fichas no saco

Vou colocar uma ficha azul e uma amarela em um saco e pedir para você tirar uma sem olhar. Qual você pensa que seja mais provável sair?

a) a azul b) a amarela

c) ambas têm a mesma possibilidade d) não sei

Por quê? ambos tem as mesmas possibilidades, pois pode sair tanto azul como amarela.

Figura 5 - Resposta quanto à equiprobabilidade

Tarefa 13

E se eu colocar duas fichas azuis dentro do saco e uma amarela; qual é a mais provável que saia?

a) a azul b) a amarela

c) ambas têm a mesma possibilidade d) não sei

Por quê? ambos Tem as mesmaspossibilidades, pois pode sair tanto azul como amarela.

Figura 6 - Resposta equivocada quanto à equiprobabilidade

Observamos, nas referidas tarefas, que o grupo de alunos apresenta uma concepção equivocada de espaço amostral; ou seja, na tarefa 12, eles responderam e justificaram sua resposta *corretamente*, assumindo a equiprobabilidade dos acontecimentos elementares do espaço amostral; no entanto, na tarefa 13, responderam da mesma forma, afirmando em sua justificativa que, independentemente do número de fichas, as chances são as mesmas. Ao admitirem que as chances são iguais, os alunos baseiam-se na amostra e concebem equivocadamente como espaço amostral as cores azul e amarelo, atribuindo a cada uma delas 50% de chances de ser sorteada. Situação semelhante ocorreu nas pesquisas de Rubel (2006), o qual sugere que o professor examine a variedade de respostas dadas pelos alunos, pois, para o autor, respostas corretas não significam necessariamente um raciocínio matemático correto; neste caso específico, um raciocínio probabilístico normativo. Rubel (2006) também nos faz atentar para a necessidade de analisar as justificativas dadas pelos alunos em suas respostas, pois estas podem trazer indícios de eventuais equívocos ou, mesmo, revelar métodos de solução alternativa.

Diante do exposto, evidenciamos que Humberto e seu grupo, nas respostas e nas justificativas apresentadas ao conjunto de tarefas propostas que envolviam a estimativa de chance por meio da linguagem probabilística, empregaram valores qualitativos pessoais; respostas baseadas na transferência de estabilidade frequencial da amostra; e decisões apoiadas em explicações baseadas no modelo laplaciano: em algumas situações, ao estimar as probabilidades em que não havia simetria no espaço amostral, admitiram a equiprobabilidade dos eventos, ou seja, afirmaram que as chances em fenômenos aleatórios são igualmente prováveis.

Após a realização desses conjuntos de tarefas, propusemos uma situação de jogo, buscando identificar quais semelhanças e diferenças poderíamos observar quando os conceitos e os pensamentos probabilísticos necessitam ser mobilizados em situações de jogo e não em situações de problemas. Godino, Batanero e Cañizares (1996) sugerem uma aproximação histórica entre os jogos de azar e o cálculo de probabilidade. Em uma revisão histórica, os autores encontram suposições de que a probabilidade se tenha aprimorado, por meio de cálculo, quando o homem passou a praticar esses jogos. Estes têm sido alvos de pesquisas e aplicações na prática escolar, na perspectiva de resolução de problemas:

> O jogo pedagógico na sala de aula de Matemática foi considerado como gerador de situações-problema ao aluno. Uma situação torna-se problemática ou não para o aluno, na medida em que, por oferecer um problema a ser resolvido, proporciona a ele a possibilidade de questionamentos, inferências, conjecturas e diferentes situações de jogo. (GRANDO; MARCO, 2007, p. 96).

As razões acima justificam a inserção do jogo *A travessia do rio*[5] em nossa sequência de tarefas.

Jogo *A travessia do rio*

Regras do jogo:

- Cada equipe (dupla) coloca as suas peças numa das margens do rio, podendo pôr mais do que uma na mesma casa, deixando outras vazias.
- Alternadamente, os jogadores lançam dados e calculam a soma obtida.
- Se a soma corresponder a uma casa onde estejam peças suas, na respectiva margem, passa uma delas para o outro lado do rio.
- Ganha quem conseguir passar, primeiro, todas as peças para o outro lado.

MARGEM

Vermelho												
RIO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Azul												

MARGEM

Figura 7 - Tabuleiro do jogo "A travessia do rio"

[5] Disponível no *site*: <http://www.apm.pt/portal/index.php?id=32582>, de onde foi retirado. Último acesso em 24/09/2009. O jogo foi adaptado para o contexto.

Seu contexto envolve análise de possibilidades, medida de chance e sorte, mesmo porque, em situações de jogo, este último fator é considerado pelos jogadores. Ao todo, os alunos jogaram *A travessia do rio* quatro vezes. No final de cada jogada, a disposição das fichas era alterada, ora pela professora-pesquisadora, ora pelos alunos.

Na primeira jogada, as fichas do tabuleiro das duas equipes foram dispostas pela professora-pesquisadora; intencionalmente, uma das equipes possuía uma ficha no número 1. Humberto e seu grupo, só no momento posterior, quando terminaram a jogada, perceberam, por meio dos colegas de classe, que o número 1 não tinha possibilidade de sair. Na segunda etapa, a professora-pesquisadora distribuiu as fichas entre os números 3 e 12, e os alunos colocaram as fichas de que dispunham em números que ainda não possuíam fichas: 5, 8 e 9. Na terceira etapa, as fichas foram distribuídas pela professora-pesquisadora entre os números 3 e 11, e, novamente, os alunos acrescentaram fichas em números que ainda não as possuíam. Todas as fichas da quarta etapa foram colocadas pelos alunos, que, novamente, não acrescentaram fichas nos números 1, 2 e 3. Dessa vez, colocaram duas fichas nos números 4, 6 e 10. Com exceção da primeira etapa, em todas as outras, a equipe vencedora foi a de Humberto.

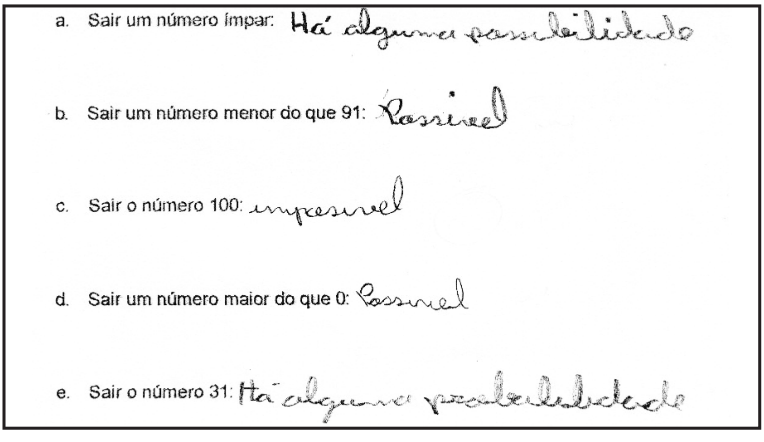
Esses dados evidenciam que os alunos se baseiam na observação da estabilidade frequencial dos resultados nas etapas anteriores para dispor suas fichas no tabuleiro em outras jogadas; assim, observamos que Humberto e seus colegas acreditam ser mais fácil ter resultados diferentes do que os mesmos várias vezes seguidas. Neste caso, baseiam-se em sua própria percepção de frequência relativa. Tal ideia remete-nos às características da noção conceitual de frequência; ou seja, ao conceito frequentista ou empírico, em que as chances de determinado evento são analisadas a partir de resultados de experiências realizadas e, também, por meio da interpretação intuitiva da probabilidade em situações de jogo, o que é muito comum, uma vez que o aluno não está apenas refletindo sobre o aleatório, ele também o vivencia. Shaughnessy (1992) caracteriza esse tipo de julgamento como disponibilidade heurística, situação em que as pessoas estimam a probabilidade de eventos, baseadas em observações realizadas por elas em instâncias particulares. Essas informações caracterizam que Humberto e seu grupo, nesse contexto de jogo, fazem uso da concepção subjetivista, ao estimar as probabilidades.

De maneira geral, essa primeira etapa da pesquisa possibilita-nos inferir que não há uma regularidade nas concepções probabilísticas apresentadas nas diferentes tarefas, mas uma habilidade de adequação de suas ideias em diferentes contextos. Foram evidenciados alguns equívocos relacionados à interpretação do espaço amostral, quando as possibilidades envolviam situações combinatórias. Assim, em relação à análise combinatória, consideramos que as tarefas que envolviam análise de possibilidades concomitante à estimativa de probabilidade foram mais significativas aos alunos.

3.2 Humberto por ele mesmo

Após a realização das atividades coletivas, Humberto foi selecionado para a segunda etapa da pesquisa. Verificamos que, na primeira tarefa que fez individualmente, ele atribuiu termos probabilísticos que expressavam graus de probabilidade não aplicados comumente aos acontecimentos previstos na situação proposta, como mostra o trecho a seguir:

> 1) Roda-se uma tômbola de jogo com número de 1 a 90. Considerando os resultados possíveis deste jogo, classifique, com uma das palavras da lista abaixo, cada um dos acontecimentos seguintes:
>
> Impossível - Pode ser – Possível - Bastante provável – Certo - Se espera que – Seguro - Há alguma possibilidade - Há alguma probabilidade – Incerto


a. Sair um número ímpar: Há alguma possibilidade

b. Sair um número menor do que 91: Possível

c. Sair o número 100: impossível

d. Sair um número maior do que 0: Possível

e. Sair o número 31: Há alguma probabilidade

Figura 8 - Estimativa de Humberto quanto aos resultados do jogo de tômbolas

Durante a entrevista, com o objetivo de que o aluno refletisse sobre seus equívocos, a professora-pesquisadora propôs que ele estabelecesse relações das considerações feitas em tarefas anteriores com a que estava sendo discutida. Dessa forma, a professora-pesquisadora pediu ao aluno que atribuísse um valor percentual às palavras organizadas na lista, de acordo com a confiança que elas expressavam. Assim, na entrevista, ela propôs, com seus questionamentos, que o aluno estabelecesse a analogia entre a probabilidade numérica atribuída por ele aos termos probabilísticos, valor percentual, e os acontecimentos do jogo:

> Episódio 1
>
> Profª: *Você acha que há alguma possibilidade de sair um número ímpar?*
> Humberto: *Sim.*
> Profª: *É possível, você colocou 30%. Você acha que as chances de sair uma bola menor que 91 neste jogo são de 30%?*
> Humberto: *Eu coloquei porque tem o número 90 nas bolas.*
> Profª: *Quais seriam os números menores que 91?*
> Humberto: *90, 89, 88, 87, 86. Agora, pensando em porcentagem, o possível não seria 30%, seria mais. Talvez eu devesse mudar a palavra para "há alguma probabilidade". Eu acho que ficaria mais certo.*
> Profª: *Você colocou que é possível que saia o número zero neste jogo. Isso quer dizer pode sair um número menor que zero?*
> Humberto: *Eu poderia mudar, para "pode ser", porque é 45% de chance.*
> Profª: *Se há 45% de chance de sair, há 55% de não sair. Se não sair um número maior que zero, que número vai sair?*
> Humberto: *Nenhum. Está errado na b e na d. Nas duas eu errei, poderia colocar seguro ou certo, porque não tem menor que zero e nem maior que 91.*
> Profª: *Por que você acha que há alguma probabilidade de sair o número 31?*
> Humberto: *Eu coloquei que é mais ou menos 50%.*
> Profª: *Quantas bolas tem na tômbola?*
> Humberto: *90.*
> Profª: *Quantas bolas com o número 31?*
> Humberto: *Uma.*
> Profª: *As chances de eu tirar uma dentre 90 são de 50%?*
> Humberto: *Puts, está errado, só tem uma bola, seria incerto, porque é difícil sair.*

A intervenção da professora-pesquisadora com a entrevista possibilitou que o aluno refletisse não só sobre o significado das palavras, mas sobre a medida probabilística que essas palavras expressam implicitamente.

Em outra tarefa, o aluno analisou as chances de bolas vermelhas e verdes serem retiradas dos recipientes.

Em uma vitrine de uma loja de esportes há alguns recipientes transparentes com bolas de tênis coloridas[6]. Veja o desenho abaixo, representando a vitrine.

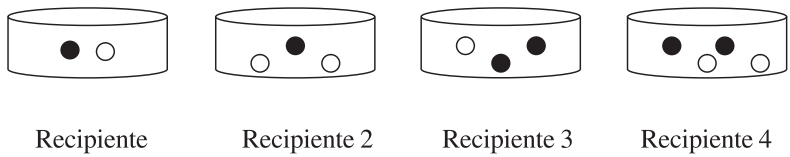


Figura 10 - Baseada em Godino, Batanero e Cañizares (1996, p. 73).

Com base nos desenhos, Humberto afirmou que, nos recipientes, as bolas cuja cor estava em maior quantidade tinham mais chances de serem retiradas, porém enfatizou que as bolas de outra cor, que estavam ali em menor quantidade, também tinham chances. O item *c* desta tarefa, que questionava em que recipiente — 1 ou 2 — seria mais fácil retirar uma bola vermelha, foi retomado pela professora-pesquisadora na entrevista, pois a justificativa dada pelo aluno em seu registro escrito não apresentava sua ideia de forma clara:

Episódio 2

Profª: *As possibilidades de retirar bolas vermelhas e verdes eram iguais em todos os recipientes?*
Humberto: *Não, alguns têm menos verdes e mais vermelhas; outras, mais verdes e menos vermelhas.*
Profª: *Você poderia me dizer quais as possibilidades das cores em cada recipiente?*
Humberto: *No recipiente 1, as chances são iguais. No 2, as bolas verdes têm mais chances, pois elas têm duas bolas. No 3, as vermelhas têm mais chances, porque tem duas. No 4, são iguais, porque tem duas bolas de cada cor.*
Profª: *Você colocou que é mais fácil retirar uma bola vermelha do recipiente 1 porque as possibilidades são iguais. Pode me explicar?*
Humberto: *Porque, no 2, a vermelha não tem tanta chance; a verde é mais ou menos 80% e a vermelha, 20%.*

Notamos, nesta tarefa, que Humberto reconhece a existência das diferentes possibilidades do evento e que, em suas respostas, prevalece a presença de raciocínio aditivo e um ensaio de raciocínio proporcional.

[6] Para maior compreensão da tarefa com a impressão substituímos as bolas de cores verdes por brancas e as bolas de cores vermelhas por pretas.

Ele utilizou a linguagem probabilística com frequência, tanto na explicação oral de suas ideias, como em suas respostas e justificativas escritas. Na tarefa em que deveria estimar a probabilidade, ao lançar dois dados e somar os números obtidos, o aluno utilizou a linguagem probabilística, como mostra o quadro a seguir:

Acontecimento apresentado na tarefa	Probabilidade estimada por Humberto
Um número par?	Possível
Um número ímpar?	Possível
O número 1?	Há alguma possibilidade

Quadro 1 – Justificativas de Humberto na soma dos resultados de dois dados

A resposta dada por Humberto em relação à probabilidade de obter o número 1, somando os números sorteados em dois dados, e a justificativa dada por ele: *Todos têm uma possibilidade de sair*, foram objeto de discussão no momento da entrevista:

Episódio 3

Profª: *Por que é possível tirar um número par?*
Humberto: *Você não tem certeza, pode sair par ou ímpar ou outro diferente.*
Profª: *Tem número diferente de par ou ímpar?*
Humberto: *Não, não tem. Os dois são possíveis de sair. Eu acho que errei porque o número 1 ele se encaixa na resposta dos dois anteriores*. [O aluno se referia aos itens par e ímpar, queria dizer que também poderia ter colocado possível para o 1].
Profª: *Que números você somou para dar o número 1?*
Humberto: *Não entendi.*
Profª: *Quais os números que você soma nos dois dados para que o resultado seja 1?*
Humberto: *Não tem como, a menos que tivesse um dado.*
Profª: *Quais são os resultados a que você se refere, quando diz que todos tem uma possibilidade de sair?*
Humberto: *Não, as chances de par e ímpar são iguais, mas o 1 não tem chance. Pensei em um dado só, se retirar um, dará certo.*

Percebemos, por meio das entrevistas, que Humberto se expressa bem oralmente, esclarece e revê suas ideias, faz as alterações que julga necessárias e apresenta justificativas para essas alterações. Os termos probabilísticos e as justificativas utilizadas pelo aluno apoiam-se em critérios de equiprobabilidade e subjetividade.

No jogo *Corrida de cavalos*[7], Humberto tinha um tabuleiro com números de 1 a 12, que representavam cavalos, e dois dados, os quais os alunos jogavam simultaneamente e realizavam a soma; esta indicava qual o cavalo que deveria avançar uma casa no tabuleiro; vencia o cavalo que primeiro alcançasse a linha de chegada. Humberto apostou nos números 7, 10 e 12 e justificou sua aposta, dizendo que tinha apostado no 7, porque acreditava que tivesse mais chances que os números que estavam do seu lado; no 10, porque é fácil de sair — disse quais eram as combinações para formar o número 10; e no 12, porque tem uma chance. Esse jogo é semelhante ao jogo *A travessia do rio*, vivenciado anteriormente pelo aluno. A resposta e a justificativa de Humberto evidenciam que, mesmo estando as explicações relacionadas ao raciocínio combinatório, elas também são apoiadas na leitura frequencial de experiências anteriores e em valores qualitativos pessoais, sem critérios objetivos em sua explicação. Vale lembrar que o número 10 é bastante utilizado em situações cotidianas, como o cálculo mental, nas situações de agrupamentos em 10.

Em resumo, podemos constatar que houve um movimento nas ideias probabilísticas apresentadas por Humberto, o que era favorecido, ora pela tarefa proposta, ora pela intervenção da professora-pesquisadora. Na análise, ficou claro que o aspecto probabilístico conceitual é mais forte que o aspecto probabilístico quantificador; isso pode ser decorrente de dois fatores: o primeiro, relacionado às tarefas, que contemplam mais a estimativa de probabilidades por meio de vocabulário estocástico; e o segundo, derivado da não instrução escolar a respeito do cálculo de estimativas numéricas das probabilidades.

A análise pormenorizada das produções apresentadas não só por Humberto, mas também por outros alunos envolvidos na pesquisa, para as tarefas propostas pela pesquisadora, evidencia a manifestação de determinadas ideias probabilísticas, que se apresentam, em um primeiro momento, carregadas de *verdades e sentidos pessoais* e, num segundo momento, com a intervenção do professor e de colegas de classe, tornam possíveis a reflexão e a alteração de ideias, equivocadas ou não.

Quanto ao pensamento probabilístico dos alunos, ficou evidente que as "intuições primárias", Fischbein (1975, apud FERNANDES, 1999, p. 13), não representam ideias primitivas, mas estão carregadas de coerência e rigor. Notamos que os alunos possuem habilidades para estabelecer relações de

[7] Skovsmose (2008, p. 26).

situações probabilísticas do seu cotidiano e relacioná-las ao contexto das tarefas. Nas situações probabilísticas relacionadas a jogos, a concepção subjetivista tem prevalência, enquanto, nas demais, outras concepções são bastante utilizadas. Provavelmente, isso ocorre porque as experiências envolvendo a aleatoriedade para alunos, crianças ainda, estejam quase sempre associadas a situações de jogo, nas quais as crianças experimentam lançar dados, observar regularidades em jogos do tipo dominó etc. Nas situações de jogo, os alunos estabelecem relações com outros jogos já vivenciados, o que lhes possibilita certa intuição a respeito do que acontece com os dados, com o baralho etc.

4 Considerações finais: reflexões sobre a pesquisa

Tínhamos como hipótese inicial que as técnicas utilizadas no cotidiano escolar não vinham promovendo o desenvolvimento do pensamento probabilístico dos alunos, e que uma metodologia diferenciada, com uma prática voltada aos cenários de investigação (SKOVSMOSE, 2008), poderia mobilizar tal pensamento, pois os alunos atuariam, no seu processo de aprendizagem, em um contexto de resolução de problemas organizado de forma que a comunicação de ideias fosse estabelecida.

Com a análise das tarefas envolvendo a linguagem probabilística apresentada pelos alunos, notamos que eles se apropriaram das palavras e das expressões probabilísticas nas observações e nas vivências de situações do seu cotidiano, por meio das reflexões e da realização de tarefas propostas em nossa pesquisa, principalmente nas que favoreceram o processo de leitura e escrita e nas discussões promovidas por meio de tais tarefas.

Identificamos que os alunos possuem a ideia de que os termos probabilísticos expressam as chances dos acontecimentos a eles relacionados e que alguns desses termos exprimem valores quantitativos exatos da probabilidade envolvida, como, por exemplo, os termos *impossível*, *certo*, *sem-dúvida* e *seguro*; e outros valores mais flexíveis, como o *pode ser*, *se espera que*, *há alguma probabilidade* etc.

Os registros escritos das tarefas evidenciaram que os alunos expressavam suas ideias de forma sucinta; mas, ao promover a expressão desse pensamento por meio da comunicação oral, estabelecida entre professora-pesquisadora e alunos, nos momentos do desenvolvimento e da socialização das tarefas, eles relataram suas ideias à classe de forma clara e detalhada. Durante as entrevistas, no diálogo estabelecido com a professora sobre a tarefa por eles realizada, os alunos também se mostravam confiantes na expressão de ideias probabilísticas, assim como na reflexão e na superação de alguns equívocos apresentados. A linguagem probabilística foi bastante utilizada pelos alunos, em problemas abertos, como forma de estimar as probabilidades ou possibilidades.

Shaughnessy (1992) e Azcárate (1996) analisam um amplo conjunto de dados apresentados pelos sujeitos para, de acordo com as ideias por estes apresentadas, classificar tais dados em uma única concepção probabilística, atribuindo a elas um caráter progressivo. Propomos, em nossa pesquisa, utilizar os critérios estabelecidos por esses autores para analisar as diferentes ideias que os alunos expõem diante das tarefas propostas, com o objetivo de evidenciar como elas, as ideias, percorrem as diferentes concepções probabilísticas. Ou seja: um mesmo aluno pode ter uma concepção, diante de uma determinada tarefa, e outra, em outra tarefa?

Consideramos que as situações relacionadas à incerteza podem ser interpretadas de diferentes maneiras, por diferentes concepções probabilísticas, conduzindo ou não as pessoas às respostas adequadas. Dessa forma, observamos o movimento das ideias probabilísticas apresentadas pelos alunos, promovido tanto pelas tarefas como pela intervenção da professora-pesquisadora e dos colegas de classe. As atitudes e a atmosfera criada pela professora-pesquisadora foram fundamentais na apresentação das ideias probabilísticas dos alunos, assim como o dinamismo proporcionado às aulas de Matemática pela metodologia de ensino adotada.

Diante do exposto, e apoiados nas pesquisas de Fischbein (1975, apud FERNANDES, 1999), que interpreta o desenvolvimento da probabilidade como um processo contínuo, em que os conceitos probabilísticos subjetivos se tornam mais elaborados e são substituídos por conceitos probabilísticos baseados em argumentos lógico-matemáticos, ressaltamos a necessidade de um trabalho contínuo, desde as séries iniciais, que promova o movimento do pensamento probabilístico dos alunos.

Em relação à análise combinatória, consideramos que as tarefas que envolviam análise de possibilidades concomitante à estimativa de probabilidade foram mais significativas aos alunos, pois elas possibilitavam que eles percebessem a relação existente entre ambas.

Consideramos que os resultados obtidos nesta pesquisa contribuem com os professores que atuam em sala de aula, desejam dinamizar as aulas de Matemática e têm como perspectiva o desenvolvimento do pensamento não só probabilístico, mas também matemático e crítico dos seus alunos. Para a pesquisa em Educação Estatística, os resultados deste estudo contribuem para apontar o movimento de produção da linguagem e das ideias probabilísticas por alunos do Ensino Fundamental, estabelecendo as contribuições de um trabalho sistemático com alunos desse nível de ensino para a aprendizagem estocástica desses estudantes.

Acrescentamos, ainda, que os dados apontados contribuem para a realização de outras pesquisas relacionadas ao desenvolvimento não apenas do pensamento probabilístico dos alunos, mais precisamente relacionadas às situações que envolvam probabilidade e análise combinatória, mas também de metodologias que favoreçam tal desenvolvimento.

Referências

AZCARÁTE, P. G. **Estudio de las concepciones disciplinares de futuros profesores de primaria em torno a las nociones de la aleatoriedad y probabilidad.** Granada: Editorial Comares, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria do Ensino fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2011.

CIRINO, M. M. **A intermediação da noção de probabilidade na construção de conceitos relacionados à cinética química no ensino médio.** 2007, 201 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) — Faculdade de Ciências de Bauru, Universidade Estadual Paulista, Bauru, SP, 2007.

COSTA, A. **A educação estatística na formação do professor de matemática.** 2007, 153 f. Dissertação (Mestrado em Educação) — Programa de Pós Graduação *Stricto Sensu* em Educação, Universidade São Francisco, Itatiba, SP, 2007. Disponível em: <http://www.saofrancisco.edu.br/itatiba/mestrado/educacao/uploadAddress/Dissertacao_Adriana_Costa%5b1557%5d.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2011.

FERNANDES, J. A. S. **Intuições e aprendizagem de probabilidades:** uma proposta de ensino de probabilidades no 9.o ano de escolaridade. 1999, 461 f. Tese (Doutorado em Educação) — Faculdade de Educação, Universidade do Minho, Braga, Portugal, 1999. Disponível em:< http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/5121/2/Tese.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2011.

FERNANDES, J. A.; BARROS, P. M. Dificuldades em estocástica de uma futura professora do 1º e 2º ciclos do Ensino Básico. **Revista Portuguesa de Educação,** Braga, Portugal, v. 18, n. 1, p. 117-150, 2005. Disponível em: <http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=37418107>. Acesso em: 10 jul. 2011.

FISCHBEIN, E. **The intuitive sources of probabilistic thinking in children.** Dordrecht-Holland: D. Reidel Publishing Company, 1975.

FONSECA, M. C. F. R. **Letramento no Brasil:** habilidades matemáticas. São Paulo: Global, 2004.

GODINO, J. D.; BATANERO, M. C.; CAÑIZARES, M. J. **Azar y probabilidad:** fundamentos didácticos y propuesta curriculares. Madrid, España: Editorial Síntesis, 1996.

GRANDO, R. C.; MARCO, F. F. O movimento da resolução de problemas em situações com jogo na produção do conhecimento matemático. In: MENDES, J. R.; GRANDO, R. C. (Orgs.). **Múltiplos olhares:** matemática e produção de conhecimento. São Paulo: Musa, 2007. p. 95-118. (Musa educação matemática, v. 3).

LOPES, A. J. (Bigode). **Matemática agora é feita assim.** 7ª séries. São Paulo: FDT, 2000.

LOPES, C. E. **O conhecimento profissional dos professores e suas relações com Estatística e Probabilidade na Educação Infantil**. 2003, 281 f. Tese (Doutorado em Educação) — Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2003.

LOPES, C. E. O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. **Caderno Cedes**, Campinas, v. 28, n. 74, p. 57-73, jan./abr. 2008. (Ensino de Matemática em Debate: sobre práticas escolares e seus fundamentos)

RUBEL, L. H. Student's probabilistic thinking revealed: the case of coin tosses. In: BURRILL, G. F.; ELLIOTT , P. C. (Eds.). **Thinking and Reasoning with Data and Chance: Sixty eighth Yearbook**. USA: Reston, 2006. p. 49-60. NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS — NCTM.

SÁENZ, C. C. **Materiales para la enseñanza de la teoría de probabilidades:** propuesta de un modelo didáctico. Madrid: Universidad Autônoma de Madrid, 1999.

SANTOS, J. A. F. L. **O movimento do pensamento probabilístico mediado pelo processo de comunicação com alunos do 7º ano do ensino fundamental.** 2010, 183f. Dissertação (Mestrado em Educação) — Programa de Pós Graduação *Stricto Sensu* em Educação, Universidade São Francisco, Itatiba/SP, 2010. Disponível em: <http://www.saofrancisco.edu.br/itatiba/mestrado/educacao/uploadAddress/Jaqueline_A,_Foratto_Lixandr%C3%A3o_Santos[14190].pdf>. Acesso em: 10 jul. 2011.

SHAUGHNESSY, J. M.. Research in probability and statistics: reflections and directions. In: GROUWS, D. A. (Ed.) **Handbook of research on mathematics teaching and learning.** USA: NCTM, 1992. p. 465-494.

SKOVSMOSE, O. **Desafios da reflexão em educação matemática crítica.** Campinas/ SP: Papirus, 2008.

SZYMANSKI, H.; ALMEIDA, L. R.; PRANDINI, R. C. A. R. **A entrevista na pesquisa em educação:** a prática reflexiva. Brasília: Plano, 2002.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Tradução de P. H. Colonese. Porto Alegre: Artmed, 2009.

Submetido em Maio de 2010.
Aprovado em Novembro de 2010.