ISSN 0103-636X

Reflexões Sobre Análise Institucional: o caso do ensino e aprendizagem de integrais múltiplas

Reflections on Institutional Analysis: the case of teaching and learning of multiple integrals

Afonso Henriques*
André Nagamine**
Camila Macedo Lima Nagamine***

Resumo

Uma análise institucional é um estudo que se realiza em torno de elementos institucionais, a partir de inquietações levantadas pelo pesquisador. Essa análise é uma das práticas importantes nas pesquisas em Educação que visam estudar os fenômenos que emergem no processo ensino/aprendizagem. Assim, nos propomos, no presente artigo, apresentar uma análise institucional em torno dos projetos acadêmicos curriculares, os livros didáticos e os estudantes enquanto elementos institucionais, de uma instituição de ensino superior, considerando as *integrais múltiplas* como objeto de estudo. Mas, como se faz uma análise institucional e com que finalidades didáticas? Essas perguntas se constituem no fio condutor do presente artigo. As respostas correspondentes levaram-nos a concluir que uma análise institucional permite identificar as condições e exigências que determinam, numa instituição, as práticas institucionais em torno de objetos de estudo requeridos na formação de recursos humanos. Favorece a elaboração/organização

* Doutor em Matemática e Informática pela Universidade Joseph Fourier (UJF) de Grenoble, França. Professor Titular da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), Líder do Grupo de pesquisas em ensino e aprendizagem da matemática em ambiente computacional (GPEMAC)/DCET/UESC). Ilhéus, BA, Brasil. Endereço para correspondências: Rua Francisco Benício, 140, Apto. 102, Alto Mirante, CEP: 45603-310, Itabuna, BA, Brasil. *E-mail*: henry@uesc.br.

** Doutor em Ciências da Computação e Matemática Computacional pela Universidade de São Paulo - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (USP-ICMC). Professor Adjunto da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), Ilhéus, BA, Brasil. Endereço para correspondência: Rua B, 215. CEP: 45604-785, Itabuna, BA, Brasil. *E-mail*: andren@uesc.br

*** Mestre em Estatística pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar). Professora Assistente da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), Ilhéus, BA, Brasil. Endereço para correspondência: Rua B, 215, CEP: 45604-785, Itabuna, BA, Brasil. *E-mail*: cmlnagamine@uesc.br

de sequências didáticas que tenham por finalidade estudar as práticas efetivas de sujeitos da instituição em torno dos objetos de estudo propostos, contribuindo assim no desenvolvimento de pesquisas educacionais.

Palavras-chave: Análise Institucional. Praxeologia. Sequência Didática. Integrais Múltiplas.

Abstract

An institutional analysis is a study that investigates institutional factors, based on concerns raised by the researcher. This analysis is one of the important practices in research education aimed at the study of phenomena that emerge in the learning/teaching process. In this article, we conduct an institutional analysis of projects related to the academic curriculum, textbooks and students as institutional elements of a higher education institution, considering *multiple integrals* as the object of study. But, how is an institutional analysis performed, and for what didactic purpose? These questions constitute the basic element of reflection in this article. The answers led us to conclude that an institutional analysis identifies the conditions and requirements that determine, in an institution, institutional practices related to objects of study required in the training of human resources. It encourages the development/organization of the didactic sequences aimed at studying the effective practices of people from the institution related to the objects of study proposed, thus contributing to the development of educational research.

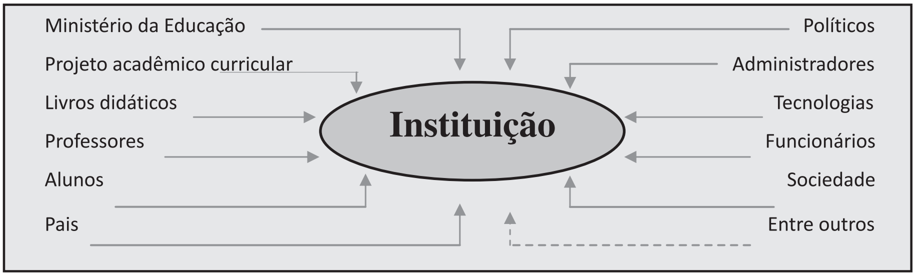
Keywords: Institutional Analysis. Praxeology. Didactic Sequence. Multiple Integrals.

1 Introdução

Antes de discorrermos no tema do título deste artigo, convém descrevermos sobre o que entendemos por *instituição, instituição de referência* e *elementos institucionais*. Lembramos que as pesquisas em Educação, em particular Matemática, requerem do pesquisador conhecimentos detalhados, não apenas de saberes matemáticos envolvidos na pesquisa, mas, também, do referencial capaz de dar um suporte teórico no trabalho pretendido. A abstração das condições particulares que dão sentido e sistematização dos saberes envolvidos, bem como seus efeitos no processo ensino/aprendizagem, são aspectos indispensáveis no sistema educativo.

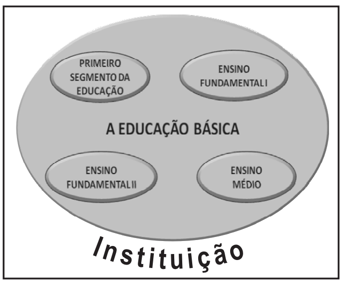
Referindo-se a esse sistema, Chevallard (1992), ressalta que nele intervêm diversos elementos constituintes do sistema social do ensino, doravante denominado *Noosfera* que envolve: o Ministério da Educação, os políticos, a proposta curricular do estado ou de um curso, os administradores, os professores, os livros didáticos, os parentes de estudantes, a mídia (rádio, jornal, TV, revistas, computadores, softwares, internet etc.) que designam, dentre todos os conhecimentos historicamente acumulados, aqueles que são pertinentes para a formação do cidadão que ingressa na instituição. Além desses, outros elementos são também relevantes nesse sistema, tais como o tipo da sociedade, sua administração, suas práticas, seu desenvolvimento tecnológico, a formação de professores e de autores de livros didáticos. Esses elementos constituem-se em dados institucionais e se fundam em objetos de investigação na Educação.

Assim, ao falarmos de *instituição* estaremos nos referindo à *Noosfera* constituída, dentre outros *elementos institucionais* possíveis, pelos que representamos no Quadro 1. Uma *instituição de referência* é correspondente à instituição de realização e/ou aplicação da pesquisa em questão, seja de ensino ou não. A explicitação dessa instituição pelo pesquisador deve satisfazer, pelo menos, um desses elementos.



Quadro 1 - Elementos constituintes de uma instituição

Em geral, no desenvolvimento de uma pesquisa em Educação, pensamos em uma instituição constituída, no mínimo, com um desses elementos. Mesmo que o pesquisador não explicite ou não use o termo instituição, seu trabalho está sempre inserido em uma instituição.

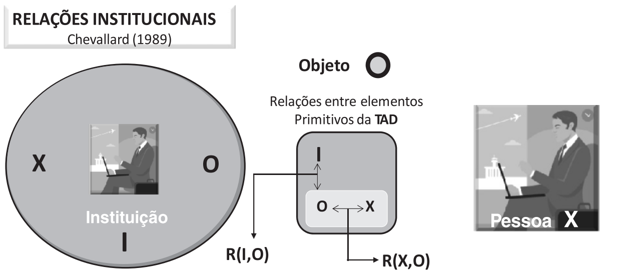


Quadro 2 - Educação Básica e suas partes enquanto instituições

Tal como mostra o Quadro 2, a Educação Básica, como um todo, é uma instituição, as suas partes (primeiro segmento da educação, Ensino Fundamental I, Ensino Fundamental II, Ensino Médio etc.) também o são, podendo ser caracterizadas como *instituições de referência* e/ou de *aplicação*. O termo referência é sugestivo, na medida em que identifica o local institucional da realização/aplicação da pesquisa. Uma Instituição do Ensino Superior (IES) por sua natureza é uma instituição no contexto descrito acima. As suas partes, tais como os *cursos*, também são *instituições*. Com efeito, podemos falar sobre relações e reconhecimento de objetos nas instituições, no contexto descrito por Chevallard.

2 Relações institucionais

Na Teoria Antropológica do Didático (TAD), Chevallard (1989), discute sobre *institucionalização*, *relações institucionais* e *pessoais* com os objetos institucionais. Para ele, um objeto (O) do saber é institucionalizado ou reconhecido institucionalmente, se existe a relação institucional denotada por R(I,O) da instituição I com o objeto O (cf. Quadro 3). Para Henriques (2011), esse reconhecimento passa pelos registros de documentos oficiais da instituição, tais como Projetos Acadêmicos Curriculares (PAC) no caso das IES ou Projetos Políticos Pedagógicos (PPP) tratando-se da Educação Básica.



Todo **SABER** é ligado ao menos a uma **INSTITUIÇÃO**, na qual é desenvolvido, num dado domínio real. O ponto essencial é, portanto, que um saber não existe *in vacuo*, num vazio social. Todo conhecimento aparece, num dado momento, numa dada sociedade, ancorado em uma ou algumas instituições, Chevallard (1989).

A *relação pessoal* de uma pessoa com um objeto do saber só pode ser estabelecida quando a *pessoa* entra na *instituição* onde existe esse *objeto*.

Quadro 3 - Relações entre os elementos primitivos da TAD

Além disso, como as instituições admitem pessoas, Chevallard (1992) versa também sobre relações pessoais, de um indivíduo *X* com um objeto *O* da instituição denotado por R(*X,O*) (cf. Quadro 3) e afirma que essa relação só pode ser estabelecida quando *X* entra na instituição *I* onde *vive O* com certas finalidades, por exemplo, realizar um determinado curso, que reconhece esse objeto.

O estudo da relação R(*X,O*) é frequente nas pesquisas em Educação Matemática e consiste, naturalmente, no estudo das práticas efetivas de indivíduos de determinadas instituições de referências. Por exemplo, investigar o que os estudantes aprendem na referida instituição em torno de *O*. Assim, podemos afirmar que R(*X,O*) é uma relação de grandes interesses em pesquisas na Educação, e pode ser analisada utilizando-se uma *Sequência Didática* (SD) organizada com base nas praxeologias desenvolvidas em torno de *O* na instituição de aplicação. Neste artigo não nos disponibilizamos a tratar desse tema (SD), reservando-o para outro artigo.

Vale sublinharmos que a *relação institucional* é, particularmente, ligada às atividades institucionais que são solicitadas aos estudantes, e é de certa maneira, caracterizada por diferentes tipos de *tarefas* que os estudantes devem efetuar e por razões que justificam tais tipos de tarefas. A *relação institucional* com um objeto R(*I,O*) é descrita por um conjunto de práticas sociais que funcionam numa instituição, envolvendo esse objeto do saber. De acordo com Chevallard (1992), o *saber matemático*, enquanto forma particular do conhecimento, é fruto da ação humana institucional, é algo que se: produz, utiliza, ensina ou de uma forma geral, que transita nas instituições. Com efeito, Chevallard (1992) propôs a noção de *organização praxeológica* ou simplesmente *praxeologia* (como conceito chave) para estudar as *práticas institucionais* relativas a um objeto *O* do saber, em particular as práticas sociais em matemática. Ele se propôs a distinguir as *praxeologias* que podem ser construídas numa sala de aula, onde se estuda esse objeto, analisar a maneira que se pode construir o estudo de *O*, assim como as condições de realização.

Assim, além dos conceitos próprios das *relações institucionais* e *pessoais* com *objetos do saber*, é conveniente entendermos o desenvolvimento das práticas de ensino desses *objetos* nas *instituições*. Nesse contexto, Chevallard (1992) propõe um modelo de análise característico das práticas que se desenvolvem nas instituições. Tal modelo é entendido como uma das vertentes da TAD o qual resumimos a seguir.

3 A abordagem praxeológica

A *abordagem praxeológica* é um modelo para análise da ação humana institucional, descrita em termos de quatro noções: *Tarefa, Técnica, Tecnologia e Teoria.* Essas noções permitem a modelação das práticas sociais em geral e, das atividades matemáticas em particular, desenvolvidas como segue.

A *Tarefa* é denotada pela letra *T* para representar um *tipo de tarefa* identificado numa *praxeologia*, contendo ao menos uma tarefa *t*. Essa noção supõe um objeto relativamente preciso. Subir uma escada, por exemplo, é um tipo de tarefa, mas subir, assim isolado, não o é. Da mesma forma, calcular uma integral é um tipo de tarefa, mas calcular, assim isolado, é um gênero que requer um determinativo. Assim, tarefas, tipo de tarefas, gênero de tarefas não são dados da natureza: são *artefatos*, *obras construtos* institucionais, cuja reconstrução em tal instituição é um problema inteiramente objeto da didática.

A Técnica denotada por τ, é uma maneira de fazer ou realizar um tipo de tarefas *T*. Assim, uma *praxeologia* relativa a *T*, necessita de maneiras de realizar as tarefas $t \in T$, isto é, de uma técnica, do grego *tekhnê*, que significa saber-fazer. Dessa forma, para um dado tipo de tarefas *T*, existe, em geral, uma única técnica, ou ao menos um conjunto de técnicas reconhecidas institucionalmente (em exceção das possíveis técnicas alternativas que podem existir, mas em outras instituições) que permitem realizar $t \in T$.

A *Tecnologia*, denotada por τ, é um discurso racional (o *logôs*) tendo por objetivo justificar a técnica τ, garantindo que esta permite realizar as tarefas do tipo *T*. Uma segunda função da tecnologia é a de explicar, tornar compreensível a técnica.

Se a primeira função – *justificar a técnica* – consiste em assegurar que a técnica permite alcançar o pretendido, a segunda função – *explicar* - consiste em expor o porquê é daquela maneira. É notável que as duas funções, justificação e explicação, são assumidas diferentemente por uma dada tecnologia. Tradicionalmente, no contexto matemático, a função de justificação carrega consigo a função de explicação, pelo viés das exigências demonstrativas. Exemplo, um estudante memoriza uma determinada tecnologia (teorema ou fórmula), chega a resolver certos tipos de tarefas com essa tecnologia, mas, às vezes, não sabe explicar o porquê do resultado encontrado. Isso porque, conforme a decomposição praxeológica, que veremos a seguir, em dois blocos, o estudante se prende no primeiro deles, o saber-fazer [praxe], uma vez que o ambiente tecnológico-teórico [*logôs*] é geralmente do domínio do professor.

A quarta e última noção do modelo *praxeológico* é a *Teoria*, representada por Θ, tendo a função de justificar e tornar compreensível uma tecnologia θ.

As quatro noções: *tipo de tarefa* [T], *técnica* [τ] *tecnologia* [θ] e *teoria* [Θ], descrevem uma *organização praxeológica* completa [$T/\tau/\theta/\Theta$], que se compõe, naturalmente, em dois blocos [T/τ] e [θ/Θ], constituindo, respectivamente, o *saber-fazer* [*praxe*] e o ambiente *tecnológico-teórico* [*logôs*]. Dessa forma, podemos afirmar que *produzir; ensinar e aprender matemática* são ações humanas institucionais que podem descrever-se conforme o modelo *praxeológico.* Nesse sentido, a *organização praxeológica* relativa às atividades matemáticas é uma *organização matemática*.

Chevallard (1992) discute sobre a organização matemática, referindo-se à *praxeologia* de um objeto matemático específico. Assim, se o objeto de estudo é estatístico, então podemos falar da *organização estatística*, se for um objeto do domínio da física, falamos da *organização física*, se for da Química, falamos, então, da *organização química*. A *praxeologia* depende, portanto, do domínio de desenvolvimento do objeto *O*.

Uma noção matemática desenvolvida no seio de instituições distintas pode apresentar *praxeologias* diferentes nessas instituições. De acordo com Matheron:

> [..] essa visão ressalta o aspecto ecológico relativo a um objeto *O*, quer dizer, o aspecto do questionamento da existência real ou da inexistência desse objeto na instituição onde vive uma dada *praxeologia*. Essa dimensão ecológica permite questionar sobre a maneira como é ensinado um objeto identificado num livro didático. Que tipo de tarefas a realizar e com que tipo de técnicas disponíveis (ou não)? Qual é a *praxeologia*, e por conseqüência, que tipo de progressão considerar?” (MATHERON, 2000, p. 52).

A noção de *organização praxeológica* e a *noção de relação institucional* proporcionam, a partir de um estudo *ecológico de livros didáticos* e de *programas* de cursos, ferramentas que permitem responder questões de pesquisa colocadas no contexto institucional. Assim, é importante analisar os livros e os programas na *instituição de referência*.

4 Os cursos de Matemática da Universidade Estadual de Santa Cruz como instituição de referência

Neste artigo escolhemos como *instituição de referência* os *cursos de Matemática* da Universidade Estadual de Santa Cruz - (UESC). Nessa instituição, nos interessamos, particularmente, na análise institucional em torno dos *projetos acadêmicos curriculares* vigentes e do *livro didático*, enquanto elementos institucionais (Quadro 1). Com essa escolha, focalizamos as análises no estudo das *integrais múltiplas* (*IM*) (objeto matemático de nosso interesse). O objetivo é destacar o *habitat*, os *nichos* e a *praxeologia* desse objeto a partir dos livros didáticos mais utilizados no seu ensino/aprendizagem nessa instituição, desenvolvendo assim, uma análise institucional.

5 Análise institucional, o que é?

Análise institucional é um estudo realizado em torno de elementos institucionais, a partir de inquietações/questões levantadas pelo pesquisador no contexto institucional correspondente, permitindo identificar as condições e exigências que determinam, nessa instituição, as relações institucionais e pessoais a objetos do saber, em particular, os objetos matemáticos, as organizações ou *praxeologias* desses objetos que intervém no processo ensino/aprendizagem.

Portanto, a análise institucional passa pelo estudo das organizações, das práticas que se desenvolvem na instituição em torno de objetos da aprendizagem e das relações institucionais e pessoais com esses objetos.

Quando um professor, enquanto indivíduo da instituição vai organizar o assunto que pretende ensinar, uma das suas referências primordiais é a ementa ou programa da disciplina proposto no PAC ou no PPP da instituição de referência. O PAC/PPP revela a relação institucional R(*I,O*) da instituição *I* com o objeto *O* que o professor deve ensinar. Assim, é interessante, em uma análise institucional, realizarmos o estudo do PAC/PPP que permite revelar a relação institucional com o objeto *O*, assim como as exigências institucionais. Tal estudo deve ser alimentado pela *ecologia do saber*, questionando sobre o lugar e a função do objeto *O*, a fim de evidenciar o *habitat* e o *nicho ecológico* de *O*.

Na abordagem *ecológica de saberes*, Chevallard (1992) define *habitat* como sendo o lugar de vida e o ambiente conceitual de um objeto do saber. Trata-se, essencialmente, de objetos com os quais interage, mas também das situações de ensino nas quais aparecem as manipulações e experiências associadas. O autor define *nicho ecológico* como sendo o lugar funcional ocupado pelo objeto do saber no sistema ou *praxeologia* dos objetos com os quais interage nas instituições. No caso particular das *integrais múltiplas* queremos saber o lugar ou diferentes lugares, de vida e funcional, desse objeto. Ou seja, quais são os *habitats* e *nichos* ocupados pelas *IM* na instituição de referência?

5.1 Análise institucional em torno das integrais múltiplas

A UESC oferece dois currículos para a formação em Matemática: *Bacharelado* e *Licenciatura*, em vigor desde 1999. O currículo de *Licenciatura* foi reformulado em 2006. Antes desses cursos, existiam os cursos de Ciências com habilitações em: Biologia, Física, Matemática e Química, nessa instituição. Os PAC dos cursos de Matemática em vigor colocam em prática dois fluxogramas[1] distintos. Na organização desses PAC encontramos as integrais como objetos de estudo na matéria chamada *Cálculo Diferencial e Integral* (*CDI*) ou simplesmente *Cálculo* dividido em quatro disciplinas no Bacharelado e em três na Licenciatura. Na Figura 1 temos o resumo do ementário dos quatro Cálculos, no caso do Bacharelado. A primeira relação dos estudantes com essa matéria acontece no segundo semestre em I.

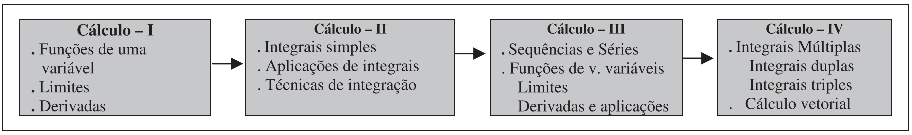


Figura 1 - Distribuição dos conteúdos das disciplinas de Cálculo.

Assim, o *CDI* é presente nos três primeiros anos de formação do Bacharel em Matemática e nos dois primeiros anos do Licenciado, e constitui o *habitat* das *IM*. Com efeito, o candidato em busca da formação em Matemática, nessa instituição, tem duas opções. Essas opções têm uma particularidade marcante: as disciplinas comuns nos dois cursos estão distribuídas no segundo, terceiro e no quarto semestres. Os estudantes têm a mesma relação institucional *I* com os objetos *O* de aprendizagem nesses semestres. Na entrada para o 3º

[1] Fluxogramas dos cursos de Matemática disponíveis no site (http://www.uesc.br/colegiado_matematica/ index.php).

ano, cada curso focaliza uma formação específica do profissional. Nesse contexto, os PAC de *I* sublinham:

> O Bacharelado em Matemática visa preparar o profissional para o estudo aprofundado da Matemática, preparando-o para pós-graduação em nível de Mestrado e/ou Doutorado em Matemática ou áreas afins, podendo também atuar como professor universitário, pesquisador, consultor técnico, além de outras opções ligadas ao comércio, indústria e serviços.
> A Licenciatura em Matemática visa preparar o profissional que pretende dedicar-se a educação básica. Podendo prosseguir seus estudo em nível de Mestrado e/ou Doutorado em Matemática, Educação Matemática ou áreas afins, permitindo-lhe atuar também como professor universitário pesquisador.

Tanto no primeiro caso quanto no segundo, as integrais aparecem como um dos objetos institucionais, indispensável para a formação dos profissionais em Matemática. Uma vez que todo indivíduo que entra nessa instituição, em busca da formação matemática, passa pelo ensino desse objeto, que na organização do *CDI* se estende de integrais simples às integrais múltiplas. Nessa extensão, constatamos que as primeiras técnicas (t) de cálculo de integrais aparecem na disciplina intitulada Cálculo II (Figura 1), através de integrais de funções de uma variável ou *Integrais Simples* doravante identificadas por *IS*. Algumas destas técnicas referem-se a tarefas *T* de cálculos: de áreas de superfícies planas, de volumes dos sólidos de revolução, de volumes por anéis cilíndricos e de volumes por seções transversais. Mais adiante, o ensino de *integrais múltiplas* é introduzido como prolongamento das *IS* no Cálculo IV (para Bacharelado) e no Cálculo III (para Licenciatura). Portanto, as *IS* alimentam os objetos com os quais interagem as *IM*, devido ao lugar importante atribuído à noção de somas de *Riemann* na organização matemática das *integrais*.

Observamos, igualmente, que tanto a Geometria Analítica quanto a Geometria Descritiva interagem fortemente com as *integrais,* nos programas de *CDI*, devido ao lugar funcional ocupado pelo estudo de funções de uma e de várias variáveis, e suas respectivas representações gráficas no plano bidimensional (2D) ou no espaço tridimensional (3D). Além disso, é notável, nesses programas, que a *vida* das *integrais múltiplas* é reforçada pelo estudo: das integrais duplas, área de regiões planas e volume de sólidos, integrais duplas em coordenadas polares, área de superfícies tridimensionais, integrais triplas, momento de inércia e centro de massa, coordenadas cilíndricas e esféricas, mudança de variáveis e cálculo vetorial. O estudo desse último, por sua vez, é suborganizado por: campos vetoriais, integrais curvilíneas, independência de caminhos, teorema de *Green*, teorema de *Gauss* e teorema de *Stokes*, fazendo parte dos conteúdos do ensino das *integrais múltiplas*.

O ensino de integrais encontra, portanto, um lugar natural na organização matemática do *CDI*. Nesse encontro, constatamos que após o estudo de funções de uma variável e de integral simples, chega-se ao estudo das funções de várias variáveis que, entre outros objetos, alimentam o estudo das *IM*. Assim, podemos dizer que o primeiro *nicho* das *integrais múltiplas* é o *nicho da análise* matemática que caracterizamos aqui como *nicho estrutural*, no sentido em que as *IM* vêm completar um programa de estudo, reforçando uma coerência, seguindo um esquema de dois segmentos (estudo de funções de uma variável real e de funções de várias variáveis reais) e três tempos (definição/limite de funções, cálculo diferencial e cálculo integral). Além disso, as *integrais múltiplas* servem o cálculo de áreas de superfícies e de volumes de sólidos. Neste contexto, as *IM* alimentam-se via gráficos, das técnicas de representação gráfica, assim como do raciocínio geométrico, ocupando, assim, um *nicho geométrico* que caracterizamos aqui como *nicho interpretativo*. As *integrais múltiplas* servem, também, para calcular massa, momentos de inércia e várias outras noções procedentes da Física. Encontramos, aqui, as aplicações das *IM* ocupando um *nicho físico* que caracterizamos como *nicho aplicativo*.

Observamos que o conteúdo programático das *IM* é estreitamente ligado ao de funções de várias variáveis reais. Todavia, o lugar ocupado pelas funções de diversas variáveis reais no Cálculo IV (para Bacharelado) revela funcionalidades distintas em relação à representação gráfica no espaço tridimensional proposta no Cálculo III, na medida em que, nesse último, as funções de diversas variáveis são estudadas de maneira isolada, examinando-se uma única função em cada tarefa. Enquanto que, na maior parte das situações de resolução de problemas ou exercícios de aplicação propostos no Cálculo IV, uma função interage com outras para formar um domínio de integração, que é um sólido delimitado pelas superfícies de funções conhecidas. Com efeito, a representação gráfica no espaço toma outro *status* no estudo das *integrais múltiplas* em relação ao ensino precedente. Além disso, constatamos nos ementários do *PAC* que o *CDI* não é o único *habitat* das integrais na instituição *I*. Elas sobrevivem, também, em diversas disciplinas da formação em Matemática, tais como: o Cálculo Numérico, Funções Analíticas, Análise Real II, Cálculo

Avançado, Física IV, formando, assim, um campo vasto de investigação.

A análise realizada até aqui, permitiu-nos identificar e evidenciar os diferentes *habitats* e *nichos* ocupados pelas *integrais múltiplas* na instituição *I*. Desde a criação dos cursos de Bacharelado e de Licenciatura em Matemática, em 1999, nessa instituição, o ensino das *integrais múltiplas* encontra um lugar no ensino de Cálculo Diferencial e Integral, ocupando três nichos: *análise*, *geométrico* e *físico*.

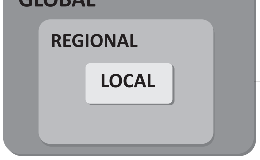
Não obstante, estamos interessados em saber, também, as práticas institucionais propostas nessa instituição em torno do estudo das *IM*. Em outras palavras, que tipo de tarefas, técnicas, tecnologia e teorias correspondentes ao estudo de *integrais múltiplas* em *I*? Assim, para refinarmos a análise institucional com essa finalidade, nos propomos em analisar os *livros didáticos* mais utilizados nessa instituição em torno do ensino das *integrais múltiplas*, concentrando nossa atenção em um deles, com intuito de destacarmos a *organização praxeológica* das *IM*.

5.2 Análise de livros didáticos

Essa análise possibilita o acesso dos elementos característicos da relação institucional com o objeto do ensino visado, bem como das exigências institucionais e das organizações propostas em torno desse objeto. Nesse tipo de análise consideramos três estruturas organizacionais, conforme o esquema abaixo (Figura 2)

Estrutura organizacional ***global*** *do livro didático* – trata-se da organização que apresentamos em uma tabela a partir da identificação de todos os tópicos ou assuntos por capítulos propostos no livro em questão, destacando a quantidade de seções e das páginas ocupadas por cada seção no livro.

Estrutura organizacional ***regional*** *do livro didático* – refere-se a organização que apresentamos em uma tabela a partir da identificação das seções, título das seções que compõem um tópico ou capítulo destacado na organização global do livro, revelando (se possível) a quantidade de Definições, Teoremas, Fórmulas, Exemplos (que são exercícios resolvidos), Exercícios propostos (que são exercícios não resolvidos, encontrados geralmente no final da sessão ou capítulo), e das páginas ocupadas pela seção.



Estrutura organizacional ***local*** *do livro didático* – refere-se a organização que apresentamos em uma tabela a partir da identificação das subseções, título das subseções que compõem um tópico ou uma sessão destacada na organização regional do livro, revelando (se possível) a quantidade de Definições, Teoremas, Fórmulas, Exemplos (que são exercícios resolvidos), Exercícios propostos (que são exercícios não resolvidos, encontrados geralmente no final da sub-sessão, sessão ou capítulo), e das páginas ocupadas pela subseção.

Figura 2 - Estruturas organizacionais do livro didático

Essas estruturas ou organizações didáticas proporcionam uma visão geral dos objetos de estudo propostos no livro em análise. Dependendo do interesse do trabalho, o pesquisador pode restringir-se a uma das partes dessas estruturas. Essa restrição favorece a consolidação dos conhecimentos em torno da praxeologia correspondente, como se procede mais adiante. Com efeito, a análise de uma única sessão de um livro didático é uma análise local.

Os livros que nos referimos são elementos dos PAC mencionados anteriormente, e são frequentemente adotados nessa instituição. Dentre eles, selecionamos os que listamos no Quadro 4, e concentramos as nossas análises em um deles (SWOKOWSKI, 1994). Essa escolha se justifica pelo fato de ser o livro mais solicitado pelos estudantes na biblioteca da *instituição de referência*. O Quadro 4 traz, também, as referências completas dos três livros, onde *P/n* indica o lugar que consta as *IM* em cada livro, *P* indica o número de páginas ocupadas pelas *IM* e *n* o número total de páginas do livro.

Referência do livro **Título, autor, « tradutor » edição, editor, ano de edição**	*P/n*
Cálculo com geometria analítica. SWOKOWSKI, Earl William. Tradução Alfredo Alves de Faria. 2ª ed. Volume 2. São Paulo Makron Books, 1994.	100/763
O Cálculo com Geometria Analítica. LEITHOLD, Louis. Volume II, Editora: HARBRA Ltda, São Paulo, 1994.	109/760
Cálculo. THOMAS, Jorge B. Jr. 11. ed. Americana. São Paulo. Editora Pearson / Addison Wesley. 2009.	77/647

Quadro 4 - Alguns livros de cálculo contendo *integrais múltiplas.*

Para conduzir a nossa análise, nos baseamos no modelo *praxeológico* apresentado anteriormente, e optamos por apresentar, inicialmente, a estrutura organizacional global de Swokowski (1994), a fim de localizarmos o lugar de *vida* das *IM* e dos objetos com os quais interagem. Localizado esse lugar, descrevemos sua organização para obtermos uma visão geral desse objeto de ensino, para, em seguida, analisarmos em detalhe, seção após seção, a parte do curso e a das tarefas propostas, as técnicas disponíveis para resolvê-las e suas justificativas tecnológico-teóricas. O objetivo é colocar em evidência os tipos de tarefas institucionais sobre *IM* propostas aos estudantes, na instituição *I*.

Vale sublinharmos que esse tipo de análise pode ser desenvolvido sob qualquer objeto de estudo. Nossa redação não detalha as análises de todos os pontos levantados acima, em função da sua amplitude. O leitor encontrará o estudo mais detalhado na tese do Henriques (2006).

5.2.1 Estrutura organizacional global do livro didático

Todos os livros apresentados no Quadro 4 são traduções, para o português, das edições americanas, todos com títulos originais *Calculus*. Dentre esses livros, apresentamos, neste artigo, a organização global de Swokowski (1994), livro composto de 19 capítulos, cujo início traz a apresentação de um formulário que compreende os seguintes elementos: Fórmulas de derivadas e de integrais - (uma página); Fórmulas[2] da geometria e figuras[3] - (uma página); Expressões algébricas[4] - (meia página); Fórmulas e gráficos de geometria analítica[5] - (meia página); Fórmulas trigonométricas[6] – (uma página).

O Quadro 5 apresenta os 19 capítulos, com os respectivos títulos dos objetos de estudo, as seções e a quantidade das páginas ocupadas pelo assunto.

Capítulos	Assunto	Seções	Páginas
01	Revisão preliminar	03	38
02	Limite de funções	06	60
03	A derivada	09	67
04	Aplicações de derivadas	09	73
05	Integrais	08	63
06	Aplicação de integrais definidas	09	69
07	Funções logarítmicas e exponenciais	07	61
08	Funções trigonométricas recíprocas e hiperbólicas	05	36
09	Aplicações de integrais definidas	08	22
10	Formas indeterminadas e integrais impróprias	05	27
11	Séries infinitas	11	82
12	Tópicos de geometria analítica	05	40
13	Curvas planas e coordenadas polares	06	61
14	Vetores e superfícies	07	63
15	Funções com valores vetoriais	07	35
16	Derivação parcial	10	91
17	**Integrais Múltiplas**	**10**	**77**
18	Cálculo vetorial	08	59
19	Equações diferenciais	07	39
Apêndice		--	26
Respostas dos exercícios de número ímpar		--	70
Índice analítico		--	10

Quadro 5 - Estrutura organizacional global do Swokowski

Cada capítulo é dividido em seções (de três a onze, com uma média de sete seções) e terminado por exercícios cujos números ímpares têm soluções sumárias, fornecidas no final do livro. Cada seção é organizada de acordo com o seguinte plano:

[2] Área A, circunferência C, volume V, área de uma superfície curva S, altura h, raio r.
[3] Triângulo retângulo, triângulo, triângulo equilátero, retângulo, paralelogramo, trapezóide, circulo, setor circular, coroa circular, caixa retangular, esfera, cilindro circular reto, cone circular reto, tronco de cone, prisma.
[4] Potenciação e radicais, valor absoluto, desigualdades, fórmula quadrática, logaritmos, teorema binomial.
[5] Fórmula da distância, equação de um círculo, coeficiente angular m de uma reta, forma ponto-coeficiente angular, forma coeficiente angular-intercepto, gráfico de uma função quadrática.
[6] Funções trigonométricas de ângulos agudos, de ângulos arbitrários, de números reais, triângulos especiais, identidades trigonométricas, valores especiais de funções trigonométricas.

- *CURSO*
- *EXEMPLOS*
- *EXERCÍCIOS PROPOSTOS*

Em todo o livro há uma margem larga à esquerda (7,50 cm em relação a 20,60 cm de largura). Essa margem desaparece nas rubricas destinadas aos exercícios não resolvidos e é, geralmente, vazia, utilizada eventualmente para:

> Ilustração de *figuras em preto e branco* feitas com um software (de maneira sistemática), mas, às vezes com dificuldades de visualização por serem apresentadas em preto e branco. Elas são numeradas de forma contínua ao longo do capítulo (figura 17.1, figura 17.2 etc.). As figuras exercem, por conseguinte, um papel isolado do corpo do texto. Além disso, os softwares e as técnicas utilizados para traçá-las nunca são evocados pelo autor.
> Os títulos dos enunciados: *definições*, *teoremas*, *métodos*, *propriedades* e *fórmulas*. Todos esses enunciados são numerados de forma contínua, independentemente das suas categorias no capítulo. Por exemplo, à definição 17.4 pode suceder o teorema 17.5 em seguida, a definição 17.6 que corresponde ao *teorema de Fubini* etc. Todos os enunciados assim numerados são enquadrados sistematicamente com um fundo em cinza claro. Em geral, o título do enunciado revela claramente o objeto correspondente. Exemplo: definição de integrais iteradas (17.7); teorema para o cálculo de integrais duplas (17.8); volume como limite de somas duplas (17.9); diretrizes para achar a área de uma região R_x por meio de uma integral dupla (17.11).: (HENRIQUES, 2006, p.57).

A parte *Curso* começa com o título de cada nova seção e nela intercalam-se os exemplos, que são exercícios resolvidos, numerados de forma contínua e apresentados da seguinte forma:

- EXEMPLO n *enunciado* onde n é o número do exemplo.
- SOLUÇÃO *sequência de uma solução detalhada*.

Cada seção termina com um conjunto de exercícios propostos. Como já foi dito, uma resposta rápida dos exercícios de número ímpar é dada no fim do livro. Em geral, alguns exercícios são agrupados por pacotes correspondentes a um mesmo tipo de *tarefas*. Isso deixa supor que são mais exercícios de treinamento do que exercícios de investigação. Podemos, por conseguinte, dizer que os exercícios propostos são elaborados para permitir ao estudante estabilizar ou mobilizar conhecimentos adquiridos no *Curso* e as técnicas *rotineiras* para resolver tipos de *tarefas* bem selecionadas. O trabalho do estudante é, por conseguinte, balizado, eliminando algumas subtarefas preliminares na determinação da natureza de algumas *tarefas*. Consequentemente, o efeito *topázio* do estudante é reduzido a um mimetismo sobre *tarefas* identificadas com *técnicas* colocadas em evidência durante o *Curso*. Por exemplo: *na tarefa calcular a integral dupla dada por,* $\int_1^2\int_1^2 (x+y)dydx$ é eliminada da prática efetiva do estudante a subtarefa de estabelecer essa integral. Com efeito, uma interpretação geométrica da tarefa permite mobilizar competências de cálculo de volume do sólido compreendido entre o plano dado pela equação $z = x+y$ (correspondente a função a integrar $f(x,y)=x+y$) e a sub-região (domínio de integração) do plano-xy, dada analiticamente por $R=\{(x,y);\ 1 \leqslant x \leqslant 2,\ 1 \leqslant y \leqslant 2\}$. Com a eliminação dessas subtarefas, sobra, para o estudante, apenas a tarefa de realizar os cálculos.

Alguns exercícios propostos nesse livro são precedidos de um símbolo, cuja explicação é dada no prefácio do livro, quando o autor sublinha:

> Como os estudantes podem ter acesso a diversos tipos de calculadoras ou computadores, não procuramos categorizar os exercícios marcados com **C**. O enunciado de um problema deve proporcionar informações suficientes para indicar ou sugerir o tipo de calculadora ou computador disponível para obter uma solução numérica. Por exemplo, se um exercício indica que se deve aplicar a regra de trapezoidal com $n = 4$, qualquer calculadora é adequada, desde que a função não seja muito complicada. Já que para $n = 20$, é recomendável uma calculadora programável ou um computador. Se a solução de um exercício envolve um gráfico, pode ser adequada uma calculadora que imprima gráficos; todavia, funções ou superfícies complicadas podem exigir um equipamento computacional sofisticados [...] (SWOKOWSKI, 1994, prefácio).

Contudo, nós acreditamos que o uso da calculadora ou computador para a resolução de problemas/tarefas como das integrais não se acomoda, naturalmente, nas práticas institucionais dos estudantes. Para isso, é necessário o desenvolvimento de técnicas instrumentais (tema que não discutimos neste artigo). Nenhum símbolo indica o nível de dificuldade das *tarefas*. Em contrapartida, é dito claramente no prefácio que “as listas de exercícios começam com problemas de rotina e progridem gradativamente até aos exercícios mais complexos". Assim, podemos notar que o livro segue uma organização didática clássica, onde o estudante é guiado a partir de situações mais simples para as mais complexas. A seguir apresentamos a organização regional do *habitat* das *integrais múltiplas* desse livro.

5.2.2 Organização regional do livro didático

A organização regional permite evidenciar os objetos de estudo tratados em um determinado capítulo do livro em análise. No nosso caso, nos referimos ao capítulo 17 de Swokowski (1994) que trata do estudo das *integrais múltiplas*, organizado como segue:

Tabela 1 - Estrutura organizacional regional (capítulo 17) do livro Swokowski

Seção	Título da seção	Def	Teo	Cor	For	Ex	Exo	Pq	P
17.1	Integrais duplas	06	02	-	-	07	54	09	11
17.2	Área e volume	02	02	-	-	04	34	08	09
17.3	Integrais duplas em coord. Polares	-	02	-	01	05	34	06	07
17.4	Área de uma superfície	01	-	-	01	02	16	04	03
17.5	Integrais triplas	04	03	-	-	07	36	09	11
17.6	Momentos e centros de massa	04	01	-	-	07	32	10	08
17.7	Coordenadas cilíndricas	-	02	-	-	06	40	05	08
17.8	Coordenadas esféricas	-	02	-	-	06	42	07	06
17.9	Mudança de variáveis e jacobianos	02	02	01	01	06	38	08	12
17.10	Exercícios de revisão						53	14	02
Total		**17**	**16**	**01**	**03**	**50**	**378**	**78**	**77**

Def = Definições, **Teo** = Teoremas, **Cor** = Corolários, **For** = Fórmulas, **Ex** = Exemplos, **Exo** = Exercícios, **Pq** = Pacotes, **P**=Pagina.

Em cada seção, os exercícios (Exo) não resolvidos que se encontram no final da seção, são agrupados por pacotes (Pq), que denotamos por $T[t_j, t_k]$ com $j < k$; $j,k \in \mathbb{N}^*$ e corresponde a um tipo de *tarefa.* Gostaríamos de apresentar aqui as análises correspondentes a cada objeto apresentado na Tabela 1, seção por seção. Contudo, em função de suas amplitudes, neste artigo apresentamos, exclusivamente, a análise local da parte *Curso* da primeira seção (17.1) e concluímos o artigo com os resultados globais da análise desse capítulo.

5.2.3 Análise local do livro didático: o caso das integrais duplas no Swokowski

Como podemos observar na Tabela 1 o *habitat* de *integrais duplas* nesse livro contém 6 definições, 2 teoremas, 7 exemplos e 54 exercícios agrupados em 9 pacotes. Para introduzir o ensino de *integrais duplas* de funções de duas variáveis definidas em regiões R do plano-xy, o autor faz analogia formal com o estudo de *integrais simples* de funções de uma variável, considerando os quatro passos que reproduzimos abaixo:

> 1. Particionar [a, b] escolhendo $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.
> 2. Para cada k, escolher um número w_k no subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$.
> 3. Formar a soma de Riemann $\Sigma_k f(w_k)\Delta x_k$, com $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.
> 4. Se $||P||$ é a norma da partição (o maior Δx_k), então $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|d\|\to 0} \sum_k f(w_k)\Delta x_k$. Se f é não-negativa em [a, b], então a soma de Riemann do passo 3 é uma soma de áreas de retângulos de alturas associadas ao valor funcional de w_k no subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Essa soma tende para a área da região sob o gráfico da f em [a, b]. (SWOKOWSKI, 1994, p.460).

No caso das *integrais duplas*, o primeiro passo corresponde a partição da região R de integração. Referindo-se a um capítulo anterior (6.1) o autor limita-se à subdivisão da região R em um número finito de sub-regiões que ele chama de regiões do tipo R_x ou R_y obtidas por meio de uma rede de retas paralelas aos eixos coordenados.

> R_x designa uma região (**Figura 3** (i)) compreendida entre duas curvas de equações $y=g_1(x)$ e $y=g_2(x)$ tal que $g_1(x) \leqslant g_2(x)$ para todo x em $[a, b]$ onde a e b são os extremos da abscissa do ponto (x, y) da região.
> R_y designa uma região (**Figura 3** (ii)) compreendida entre duas curvas de equações $x=h_1(y)$ e $x=h_2(y)$ tal que $h_1(y) \leqslant h_2(y)$ para todo y em $[c, d]$ onde c e d são os extremos da ordenada do ponto (x, y) da região.

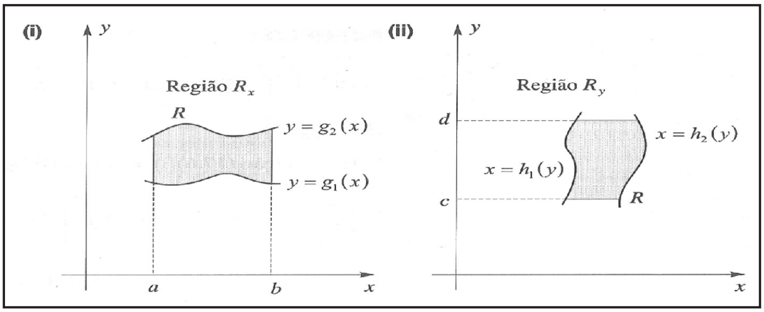


Figura 3 - Tipo de regiões (R_x ou R_y) de integração dupla (Figura extraída do Swokowski (1994, p. 466))

O conjunto de retângulos, ditos elementos de área, interiores a R constitui uma partição interior P de R que o autor denota por $\{R_k\}$, e o comprimento da maior diagonal de todas as R_k, por $\|P\|$ chamado de *norma da partição* de R. Além disso, observamos também que Ax_k denota a área da sub-região R_k.

Com essas notações, o autor apresenta formalmente o que é uma soma de *Riemann* de funções de duas variáveis conforme a definição (17.1). O conceito de integral de uma função vai, por conseguinte, confrontar-se com o da existência de soma de *Riemann.* Com efeito, as noções de integrabilidade, suas condições e suas propriedades são inquestionáveis no sentido amplo de funções.

Questiona-se, contudo, sobre o limite da soma de *Riemann* quando a norma da partição tende a 0. O autor admite que, se a função é contínua em R, o limite existe, e recorda a definição clássica em (ε,δ) (definição 17.2). Em seguida, enuncia a definição da *integral dupla* de f sobre R que reproduzimos como segue:

> Seja f uma função de duas variáveis definida em uma região R. A integral dupla de f sobre R, denotada por $\iint_R f(x,y)dA$ é
>
> $$\iint_R f(x,y)dx = \lim_{\|d\|\to 0} \sum_k f(x_k, y_k)dA_k$$
>
> desde que o limite exista.

O autor recorda que uma condição suficiente da existência da integral é dada pela continuidade da função, sem analisar essa informação no contexto topológico do espaço vetorial normalizado. Com efeito, admite-se que apenas as funções contínuas sobre regiões limitadas são utilizadas na organização matemática desse objeto do saber, sem a necessidade de se verificar se as são efetivamente. Por conseguinte, a questão da existência da integral é afastada totalmente do *topos* do professor, ela não é colocada em cheque, nem nos exemplos e muito menos nas *tarefas* propostas. Além disso, a generalização de integrais para domínios ilimitados não é prevista nessa organização.

Após a apresentação da definição formal, o autor habilita-se a trabalhar com a relação entre o *volume de um sólido* e o *cálculo de uma integral dupla,* enfatizando que "*as somas de Riemann* e a *integral dupla* gozam de uma interpretação geométrica útil". Limitando-se ao caso em que f é uma função contínua e positiva em R. Para esse caso, o autor denota por S o gráfico de f e por Q o sólido limitado por S, pelo plano-*xy* e pela superfície cilíndrica gerada pelas paralelas ao eixo-*z* e passando sobre a fronteira de R, conforme ilustra a figura 4, extraída do Swokowski (1994, p. 463). Constatamos, aí, a existência de funções de mais de uma variável interagindo no espaço com gráficos de equações a fim de formar o contorno do sólido Q[7].

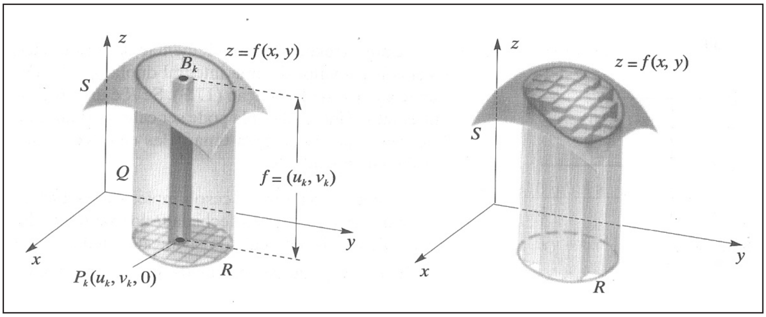


Figura 4 - Figuras 17.4 e 17.5 em Swokowski (1994, p. 463)

Vale sublinhar que o produto $f(x_k, y_k)\Delta A_k$ é o volume do prisma de base retangular de área ΔA_k na ilustração à esquerda da Figura 4. A soma de volumes de todos os prismas (ilustração à direita) é uma aproximação do volume *V* de *Q*. Como essa aproximação melhora quando $||P||$ tende a 0, *V* é definido como o limite de somas dos números $f(x_k, y_k)\Delta A_k$ quando $||P||$ tende a 0. Assim, o autor fornece a seguinte definição em concordância com a definição anterior.

> Seja *f* uma função contínua de duas variáveis, tal que *f*(*x*, *y*)³0 para todo (*x*, *y*) em uma região *R*. O volume *V* do sólido compreendido entre o gráfico de *z* =*f*(*x*,*y*) e acima de *R* é
> $$V=\int_R f(x, y)dA$$

O autor enfatiza, logo após, que com exceção de casos elementares, é virtualmente impossível achar o valor de uma integral dupla $\iint_R f(x, y)dA$ diretamente a partir da definição (17.3). Entretanto, se *R* é uma região R_x ou R_y, a *integral dupla* pode ser calculada por meio de duas integrais sucessivas. Em seguida vem um resultado (17.6) que na realidade consiste no *teorema de Fubini* não enunciado como tal nesse livro.

"Def.17.6

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx \quad (1)$$

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dA = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy \quad (2)$$

[7] Essa interação se constitui em um novo tipo de *tarefas* para o estudante, uma vez que no ensino que precede as *IM*, trata-se do estudo de uma função em cada *tarefa*. Essa interação traz novas dificuldades ao estudante, uma vez que a visualização no espaço tridimensional não é uma tarefa fácil.

Dois exemplos (01 e 02) vêm depois dessa definição e permitem validar o resultado precedente. Os dois exemplos apresentam, na verdade, a mesma integral, colocando-se em evidência a inversão de ordem de integração. Assim, encontramos, aqui, a primeira técnica *t* de integração que denotamos por *Idt1* e que permite realizar um tipo de *tarefa* de *integrais duplas* denotado por *IdT1* correspondentes a um gênero de *tarefa*: *calcular uma integral múltipla* a saber:

> ***IdT1:*** Dada uma região retangular *R* do plano-*xy* e uma função de duas variáveis, calcular a integral dupla sobre *R*.

Esse tipo de *tarefa* é realizado utilizando-se a técnica *Idτ1*. A notar que, nesse tipo de *tarefa,* o domínio de integração e a função a integrar são fornecidos. A ação do estudante consiste apenas na execução dos cálculos passando pela realização das seguintes subtarefas: *escolher a ordem de integração, estabelecer a integral, calcular as primitivas, aplicar sucessivamente o teorema fundamental do cálculo e realizar o cálculo numérico.* Contudo, as duas primeiras subtarefas poderão não fazer parte da tarefa do estudante, é o caso em que *IdT1* traz a representação algébrica do cálculo da integral previamente estabelecia. São os tipos de casos que já nos referimos, nos quais o efeito *topázio* do estudante é reduzido num mimetismo sobre *tarefas* identificadas na *praxeologia* com *técnicas* colocadas em evidência durante o *Curso*.

A segunda técnica *Idτ2* apresentada pelo autor permite a realização do seguinte tipo de tarefas *IdT2*.

> ***IdT2:*** Dada uma região *R* qualquer do plano-*xy* e uma função de duas variáveis, calcular a integral dupla sobre *R*.

Idt2 corresponde ao teorema (17.8)(i) dado por "$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right] dx$ "onde g_1 e g_2 são funções de uma variável, contínuas em [*a, b*] e *f* uma função de duas variáveis, contínua na região *R*. Os tipo de tarefas que requerem essa técnica exigem mais o estudante na modelagem das situações correspondentes do que o primeiro tipo. Além disso, a possibilidade da inversão da ordem de integração, nesse tipo de tarefa, leva a consideração de uma técnica *Idτ2'* favorecendo a realização de tarefas do mesmo tipo *IdT2*. Essa técnica (consequência do teorema de *Fubini*) é apresentada nesse livro pela expressão do teorema (17.8)(ii) dado por $\iint\limits_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\right] dy$ onde h_1 e h_2 são funções contínuas em [*c, d*] e *f* contínua em *R*.

Constatamos que *IdT1* e *IdT2* são dois tipos de *tarefas* sutilmente distintos. As técnicas associadas não são completamente as mesmas. Com efeito, o teorema de *Fubini* é sempre válido para *IdT1* e não para *IdT2*. Para isso, é suficiente considerar $g_1(x) = -x$ e $g_2(x) = 4x-x^2$, $\forall x \in [0,5]$. Nesse caso a aplicação da técnica *IdT2'* não é direta. Ela passa pela decomposição de *R* em sub-regiões.

Os teoremas correspondentes às técnicas que destacamos acima não são apresentados, no livro referido, com demonstrações matemáticas rigorosas. O autor assegura-se que tais demonstrações são objetos de textos mais avançados.

Até o momento, podemos afirmar que a *tecnologia* do cálculo de *integrais duplas* revela duas *técnicas* de referência *Idt1*, *Idt2* e dois tipos de *tarefas IdT2* e *IdT2*. Nessas tarefas observamos que a noção de simetria aparece em grande número delas, mas é colocada em evidência na organização em geral como meio de simplificar o cálculo de *integrais*. Além disso, existe um interesse muito grande da parte do autor em abrir discussões entre registros de representação, na medida em que quase todas as resoluções de *tarefas,* apresentadas como exemplos, são acompanhadas de um desenho. Além da própria linguagem materna, constatamos a abundância de registros algébricos e analíticos. Contudo, esses últimos estão, em geral, implícitos no cálculo de integrais.

De um modo geral, na *organização praxeológica* das *IM* aparece uma *subtarefa* em grande número de exemplares e alimenta o *nicho geométrico*. Essa *subtarefa* representa um *exercício emblemático*, trata-se de:

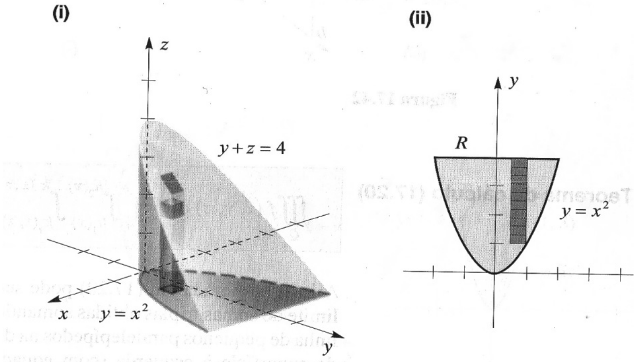
Calcular o volume de um sólido delimitado por superfícies de equações conhecidas.

Neste tipo de *tarefa*, a maioria dos problemas resolvidos nesse livro fornece, no início da solução, uma representação gráfica do sólido (domínio de integração) e/ou das superfícies que o delimitam feitas no computador, sem que seja explicada a maneira como foram realizadas. Todavia, o autor espera um uso importante dessa representação gráfica na modelagem da *integral múltipla*. Para ilustrar nossa constatação, eis um exercício, do tipo *emblemático*, extraído desse livro.

Calcule o volume do sólido delimitado pelo cilindro $y= x^2$ e pelos planos $y+z=4$ e $z=0$.

A solução proposta no livro começa assim:

A Figura 17.41 (i) ilustra o sólido... A região *R* no plano-*xy* aparece na figura 17.41(ii), juntamente um retângulo correspondente a primeira integral. Aplicando (17.19) com $f(x,y,z)=1$, temos:



O teorema 17.19 consiste na equação algébrica de cálculo da integral tripla dada por:

$$V=\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{0}^{4-y} dz\,dy\,dx=\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\Big[z\Big]_0^{4-y} dy\,dx$$

$$=\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}(4-y)\,dy\,dx=\int_{-2}^{2}\left[4y-\frac{1}{2}y^2\right]_{x^2}^{4} dx$$

$$=\int_{-2}^{2}(8-4x^2+\frac{1}{2}x^4)\,dx=\left[8x-\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{10}x^5\right]_{-2}^{2}=\frac{256}{15}\approx 17.$$

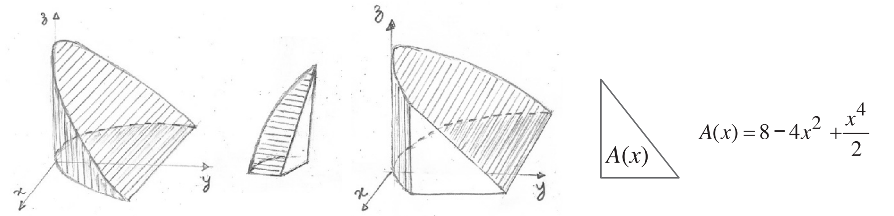
$\iiint\limits_Q f(x,y,z)\,dV=\iint\limits_R\left[\int_{k_1(x,y)}^{k_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right]dA$ que antecede esse exemplo no curso.

Figura 5 - Resolução Swokowski (1994, p. 503)

Desse exemplo, destacamos cinco *registros de representação* frequentes no ensino de *integrais múltiplas*. Tais registros não são caracterizados como tal nesse livro, que são: *registro gráfico, analítico, algébrico, numérico* e a própria *linguagem materna*. Desse destaque emergem as seguintes perguntas: *Como são construídos os gráficos ou superfícies de equações conhecidas utilizando o computador?* Os sólidos considerados nos exercícios do tipo emblemático são objetos do espaço tridimensional delimitados por partes de superfícies em questão, caracterizando-os como sólidos isolados, conforme mostra, por exemplo, a Figura 5. *Como se obtém esse tipo de sólidos isolados enquanto produto do computador? Como é feita a coordenação entre esses registros de representação?*

Constatamos, ainda, que o *exercício emblemático* contém *tarefas* realizáveis com as técnicas de *integrais simples* (sólidos de revoluções, seções transversais, anéis cilíndricos). O exercício precedente, por exemplo, poderia ser resolvido com uma dessas técnicas. De fato, do ponto de vista geométrico, um corte por um plano perpendicular ao eixo-*x*, para *x* compreendido entre -2 e 2, é um triângulo de área *A(x)*. O volume do sólido é, portanto, a soma dessas áreas para *x* variando de -2 a 2. Ou seja, a integral simples

$$V_Q = \int_{-2}^{2} A(x)dx = 2\int_{0}^{2}\left(8-4x^2+\frac{x^4}{2}\right)dx = \frac{256}{15}. \;.$$



(1) Sólido *Q* (2) corte de *Q* por um plano perpendicular ao eixo-*x*

Figura 6 - Cálculo de volume do um sólido por método de seções transversais ou divisão em fatias.

Entretanto, essas técnicas são *apagadas* na organização das *IM* pelo efeito do *contrato didático* e das *exigências institucionais* que impõem a mobilização dos conhecimentos próprios das *IM* e das técnicas que chamamos de *transformação de volume por Integrais Duplas* (***τvID***) e *transformação de volume por Integrais Triplas* (***τvIT***).

5.2.4 Dois modelos praxeológicos inversas entre si

Podemos concluir que tanto a organização global do livro, quanto a local *IM* revelam uma *praxeologia usual*, que parte da apresentação teórica dos conteúdos, do bloco *logôs* [θ/Θ] para o bloco *praxe* [T/τ]. Isto é, de fora para dentro como mostra esquema da Figura 7:

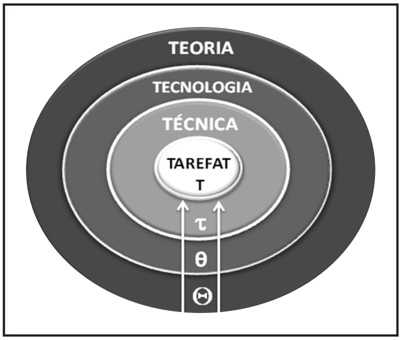


Figura 7 - Praxeologia Usual

Nessa organização, as *tarefas* propostas aos estudantes, que se encontram sistematicamente no final de cada seção são, em geral, aplicações imediatas dos conceitos ou técnicas vistas no bloco *logôs*. Ora, o processo heurístico de cálculo de uma integral constitui-se de fases de modelização didática de problemas. Todavia, essa modelização é implícita na praxeologia das *IM*. Além disso, notamos que a *representação gráfica* ocupa um espaço significativo nessa organização, porém, é do domínio do professor. Ela não é transformada em *tarefas* explícitas com *praxeologias* associadas.

Os métodos de obtenção de um *sólido isolado* são escondidos do estudante, na medida em que inexistem técnicas explícitas no livro que possam permitir a obtenção desse tipo de sólido. Parece-nos que o autor do livro espera que o estudante *leia* (ou que *reproduza*) os gráficos presentes no livro. Enquanto que nos exercícios que lhe são propostos, sistematicamente no final de cada seção, este deve produzir, por si, esse tipo de gráfico e utilizá-los na realização da *tarefa*. Além disso, a articulação entre *registros gráficos* e *analíticos* não é trabalhada. A nosso ver, essa articulação exerce um papel fundamental na conceitualização, bem como na mobilização dos problemas de cálculo de *integrais múltiplas*, sem perda de vista dos conhecimentos geométricos de objetos envolvidos.

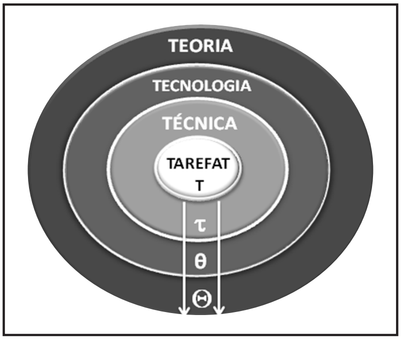


Figura 8 - Praxeologia Modelada

Vale sublinharmos que, a partir dessa análise, é possível construirmos uma *sequência didática* (SD) constituída de tarefas provenientes ou não do livro considerado, útil para estudo das práticas efetivas de estudantes em torno do objeto *O* (*integrais múltiplas*) na instituição de referência. Uma SD permite a inversão de uma praxeologia usual destacada numa análise institucional. Chamamos a praxeologia inversa da usual, de praxeologia modelada esquematizada na Figura 8. Nessa praxeologia, a evolução dos estudos é motivada por resolução de problemas ou tarefas relativas aos conceitos ou objetos institucionais que se pretende ensinar. É de notar que uma praxeologia não exclui a outra. Pelo contrário, ambas se complementam. Todavia, a nossa experiência tem mostrado que, em disciplinas como CDI, que requerem muita prática de estudantes, torna-se fundamental o uso da praxeologia modelada. Para isso, a realização de análise a priori de uma SD pelo docente é uma prática indispensável.

6 Conclusão

Neste artigo nos preocupamos em discutir questões institucionais que envolvem objetos do saber e seus reconhecimentos como objetos de estudo na instituição de referência. Esse reconhecimento motiva o estudo de práticas institucionais envolvidas na formação de recursos humanos, em particular os estudantes dessa instituição, em torno do objeto visado. Assim, a fim de contribuir, operacionalmente, com as pesquisas que podem desenvolver trabalhos nessa linha de pensamento, definimos, inicialmente, o que entendemos por *instituição de referência*. Baseando-nos na teoria antropológica do didático, recorremos às noções de relações institucionais e *praxeológicas* desenvolvidas por Chevallard (1992) para conduzirmos a análise institucional em torno de um objeto do saber, em particular, as *integrais múltiplas*, tomando como instituição de referência os cursos de Matemática da Universidade Estadual de Santa Cruz. Com efeito, escolhemos alguns livros didáticos frequentemente utilizados no ensino de *integrais múltiplas* nessa instituição, a partir do projeto acadêmico curricular dessa instituição. Para delimitarmos as análises, centramos o trabalho em um desses livros (SWOKOWSKI,1994).

A análise desse livro permitiu-nos destacar uma *praxeologia usual* da instituição em torno das *IM*, que coloca em evidência os tipos de *tarefas* e as *técnicas* disponíveis para a realização dessas *tarefas* na relação dos estudantes com esse objeto de estudo. As análises correspondentes permitiram revelar uma problemática em torno do ensino das *integrais múltiplas* que, a nosso ver, nunca tinha sido discutida no âmbito de pesquisas em Educação Matemática no ensino superior. Trata-se da coordenação entre registros de representação no processo heurístico de cálculo de *integrais múltiplas*. Percebemos claramente a existência de vários registros que interferem nas técnicas de cálculo de integrais. Com efeito, em quase todo *habitat* de *integrais múltiplas*, em todos os livros selecionados no Quadro 4, o *nicho geométrico* é o mais designado, com representações gráficas feitas no computador sem que sejam ensinadas as técnicas (t) de suas realizações. Os gráficos aparecem bruscamente, como *algo proveniente do céu*. Todavia, os autores se apóiam fortemente em tais representações no processo heurístico de cálculos de integrais.

O registro analítico dos fenômenos estudados exerce um papel fundamental, mas esse registro não aparece de forma explícita na *praxeologia* das *IM*. Além disso, na realização das tarefas do tipo *emblemático*, a dificuldade não se resume na visualização de superfícies no espaço tridimensional. Mesmo nas *tarefas* que envolvem superfícies elementares, pode-se deparar com uma tarefa complexa, em que a mobilização da noção de simetria pode ser fundamental. Com efeito, sem a realização de uma análise *a priori* das *tarefas* propostas, que permita compreender as variáveis visuais dos gráficos e simbólicos correspondentes, fica difícil avaliar o nível das dificuldades das *tarefas*, olhando apenas nas equações fornecidas nos enunciados.

Por hipótese, a realização de um problema do tipo *emblemático* por estudante, passa pela produção de representações gráficas correspondentes, mesmo que não sejam solicitadas explicitamente no enunciado. *A priori*, essas representações são difíceis, e não são ensinadas explicitamente na *praxeologia* destacada nesses livros, e se constituem numa problemática para um educador interessado com a formação do estudante com essas competências. A hipótese acima pode ser validada mediante aplicação de uma sequência didática na instituição de referência.

Para finalizar este artigo, afirmamos que a *análise institucional* permite identificar as condições e exigências que determinam, numa instituição, a *organização praxeologia* de objetos de estudos; fornece indícios de *tipo de tarefas* que podem ser consideradas numa *sequência didática* útil para o estudo de práticas institucionais em torno desses objetos na *instituição de referência*, favorecendo, assim, o desenvolvimento da praxeologia modelada, cujas análises, tanto *a priori* quanto *a posteriori*, podem ser realizadas com base na *abordagem praxeológica* de Chevallard.

Referências

CHEVALLARD, Y. **Le concept de rapport au savoir. Rapport personel, rapport institutionnel, rapport officiel**. Grenoble: IREM d'Aix-Marseille. 1989.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 12, n.1, p. 73-112, 1992.

HENRIQUES, A. **L'enseignement et l'apprentissage des intégrales multiples**: analyse didactique intégrant l'usage du logiciel Maple. Grenoble: UJF, Lab. Leibniz, 2006.

HENRIQUES, A. **Dinâmica dos elementos da geometria plana em ambiente computacional cabri-géomètre II**. Ilhéus: Editus, 2011.

MATHERON Y. Analyser les praxéologies quelques exemples d'organisations mathématiques. **Petit x**, Grenoble, n. 54, p. 51-78, 2000.

SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo: Makron Books, 1994.

Submetido em Janeiro de 2012.
Aprovado em Março de 2012.