ISSN 0103-636X

cc BY NC ND

O Uso de Simuladores e a Tecnologia no Ensino da Estocástica

The Use of Simulation and Technology in Teaching Stochastic

Leandro de Oliveira Souza*
Celi Espasandin Lopes**

Resumo

Esse artigo refere-se a parte de uma pesquisa de mestrado que teve por objetivo investigar as contribuições que a inserção da tecnologia pode trazer à educação estocástica. O termo "estocástica" tem sido utilizado para referir-se à inter-relação dos conceitos de combinatória, probabilidade e estatística. Embora o estudo tenha enfatizado os processos de ensino e aprendizagem de probabilidade e estatística, neste texto descrevemos as atividades relacionadas ao estudo probabilístico. A pesquisa realizada foi de natureza qualitativa, com análise interpretativa a partir de categorias emergentes da parte empírica: simulação, interação e resolução de problemas. O processo de análise convergiu para a elaboração de um estudo de caso sobre um grupo formado por quatro alunas, com as quais se desenvolveram as atividades e se investigou o seguinte problema: como os recursos tecnológicos podem ser úteis para a construção de novos conhecimentos da Estocástica no Ensino Fundamental? Para responder a essa questão, utilizou-se a perspectiva vygotskiana, considerando que, através de atividades de ensino, se possa promover a aprendizagem por meio da internalização. Dessa forma, o processo centrou-se na interação, com dimensão coletiva e com apoio de recursos tecnológicos. Tornou-se evidente que a inserção de tais recursos gera conhecimentos mais amplos e precisos, porém exige do professor um conhecimento teórico-metodológico muito mais aprofundado

* Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática na Universidade Cruzeiro do Sul. Doutorando em Ensino de Matemática na Universidade Cruzeiro do Sul (UNICSUL), São Paulo, SP, Brasil. Endereço para correspondência: Secretaria de Pós-Graduação, Rua Galvão Bueno 868, Liberdade, CEP: 01506-000. São Paulo, SP, Brasil. *E-mail*: olileo@ig.com.br.

** Doutora em Educação, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Docente do Mestrado e Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Cruzeiro do Sul (UNICSUL), São Paulo, SP, Brasil. Endereço para correspondência: Secretaria de Pós-Graduação, Rua Galvão Bueno 868, Liberdade, CEP: 01506-000. São Paulo, SP, Brasil. *E-mail*: celilopes@uol.com.br.

sobre o assunto. Além disso, os resultados destacaram a importância da simulação e do processo de interação na educação estocástica.

Palavras-chave: Ensino-aprendizagem. Educação Estatística. Ensino Fundamental. Tecnologia.

Abstract

This paper describes part of a study that aimed to investigate the contributions that technology use can bring to stochastic education. The term stochastic has been used to refer to the interrelationship of the concepts of combinatorics, probability and statistics. Although the study emphasized the teaching and learning of probability and statistics, this text describes the activities related to the probabilistic study. The research was qualitative, with interpretive analysis based on categories that emerged from the empirical part: simulation, interaction and problem-solving. The analytic process converged with the preparation of a case study of a group of four students with whom the activities were developed, and the following problem was investigated: how can technology resources be useful for the construction of new knowledge about stochastic in the elementary school? To answer this question we used Vygotsky's perspective, considering that learning activities can promote learning through internalization. Thus, the process focused on the interaction having the collective dimension and the support of technological resources. It became evident that the inclusion of these resources generates broader and accurate knowledge but requires a teacher with much deeper theoretical and methodological knowledge on the subject. Moreover, the results highlighted the importance of simulation and the process of interaction in stochastic education.

Keywords: Teaching and Learning. Statistics Education. Middle School. Technology.

1 Introdução

A sociedade contemporânea requer outros olhares para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática na escola. Uma questão pertinente refere-se à implementação da educação estocástica na Escola Básica. Optamos pelo termo "estocástica" ao nos referirmos à interface entre a estatística e a probabilidade, entendendo que tais assuntos, quando estudados na Educação Básica, possibilitam o desenvolvimento de formas particulares de pensamento e raciocínio, envolvendo fenômenos aleatórios, interpretação de amostras e elaboração de inferências (LOPES; MORAN, 1999). Estocástica é um termo frequentemente usado por vários pesquisadores de ensino, aprendizagem e avaliação de probabilidade e estatística. Tem sido utilizado, com maior ênfase, na produção científica da educação matemática europeia, para referir-se ao imbricamento entre os conceitos de combinatória, probabilidade e estatística (ESTEPA, 2002; MELETIOU-MAVROTHERIS; LEE, 2002; HEITELE, 1975). No Brasil, aparece destacado nas pesquisas de LOPES (1998, 2003). Os grupos de trabalho do PME — *Stochastic Working Group* — e do CERME – *Developing Stochastic Thinking* — têm discutido regularmente a educação estocástica.

A perspectiva de uma educação estocástica no ensino fundamental brasileiro é aqui considerada, devido ao fato de ser o pensamento estocástico uma linha de raciocínio matemático (HEITELE, 1975) presente em nosso currículo. Além disso, nosso foco neste artigo é a Probabilidade, um dos conceitos fundamentais em Estocástica (MARTIGNON; KURZ-MILCKE, 2006).

Outro pressuposto considerado refere-se a que, para desenvolver o ensino da Estocástica, o professor precisará, além de atualizar e construir seus próprios conhecimentos sobre o tema, refletir sobre o quanto ele se opõe ao determinismo, ao mesmo tempo que poderá visualizar o fato de que vivemos em um mundo simultaneamente estocastizado e determinista (LOPES, 2003).

Essa reflexão epistemológica torna-se essencial no caso da estocástica, pois esse assunto pode ser difícil de ensinar, devido às suas características especiais, tanto de aprofundar questões mais amplas a partir de dados analisados, como de efetuar juízos de valor sobre os modelos apropriados para trabalhar os dados. Mas, principalmente, pelo processo de reflexão sobre ideias controvertidas, como o azar e a causalidade.

Para Batanero (2002), os professores dos diversos níveis educativos que queiram acompanhar a educação estatística devem aceitar a rapidez e as mudanças que os meios tecnológicos nos trazem e, desse modo, conduzir a Educação Estatística de maneira que se crie uma cultura de ensino que permita libertá-la dos cálculos enfadonhos, rotineiros e descontextualizados.

Batanero (2002) afirma que uma pessoa pode ser, por exemplo, brilhante na resolução de problemas estatísticos e pode ter um vasto conhecimento de conceitos, mas desconhecer as aplicações da Estatística e o papel que ela exerce na sociedade. Importa ter consciência de que a cultura não é somente conhecimento: capacidade emocional, sentimentos, valores, atitudes são também componentes importantes da educação.

Acompanhando essa nova forma de conceber o trabalho escolar com Matemática, a Probabilidade, cada vez mais, toma parte no currículo dessa disciplina; porém, segundo Batanero et al. (2005), a grande maioria dos professores tem pouca experiência no ensino da Probabilidade e, algumas vezes, acabam por compartilhar com seus alunos uma série de equívocos na educação probabilística. Segundo a autora, ensinar probabilidade é difícil, por várias razões: uma delas é a disparidade entre a intuição e o desenvolvimento conceitual, mesmo no que se refere, aparentemente, a conceitos elementares. Observamos que é muito importante encontrar meios de ensinar probabilidade para as crianças, superando as crenças errôneas que podem advir de uma educação que incida sobre competências técnicas.

Para Batanero et al. (2005), uma vez que a educação esteja focada somente em competências técnicas é improvável que os professores recebam ajuda para superar suas crenças e dificuldades. Pensando nisso, é muito importante que encontremos novos meios para ensinar Probabilidade, ao mesmo tempo em que construímos uma ponte entre contextualização e pedagogia, como foi sugerido por Ball (2000).

Para Batanero et al. (2005), as simulações são ferramentas fundamentais no início do Ensino Fundamental, pois permitem que os alunos construam modelos e experimentem com fenômenos aleatórios e previsões a longo prazo, dando a real interpretação para a frequência dos fenômenos probabilísticos, o que seria praticamente impossível sem a rapidez dos simuladores tecnológicos.

Chance e Rossman (2006) recomendam o uso de simulações como ajuda aos alunos para explorar a Estatística introdutória, e sugerem que se proponha aos estudantes um envolvimento direto com o processo de simulação, pois acreditam que isso propicie uma melhor compreensão sobre o processo, sem que a transição para uma simulação computacional se torne uma demonstração obscura. Também destacam a importância de criar uma ligação entre os programas computacionais e as simulações. Essa conexão pode ser estabelecida, simplesmente, embutindo a tecnologia e a simulação no mesmo contexto, projetando as simulações para que correspondam à aleatoriedade do estudo.

Para esses autores, a escolha da tecnologia deve ser feita para promover a interação entre aluno e acessibilidade, mantendo o foco no conceito de Estatística e não na tecnologia. Para isso, é necessário que se utilizem ferramentas que permitam um rápido retorno visual, como o *software Fathom*. Tais ferramentas e modelos podem ser muito eficazes no estabelecimento de dissonância cognitiva, pois elas exigem dos estudantes maior atenção à sua própria compreensão sobre os conceitos.

Ao elaborar atividades de ensino a ser propostas aos alunos, o professor deverá priorizar atividades nas quais haja espaços para construção lógica e incentivar a concentração no conjunto de conceitos estatísticos. É interessante que construa simulações durante todo o curso e permita que os alunos vejam as simulações como uma ferramenta de análise de direito próprio, e considerem os recursos de simulações para comparar diferentes técnicas analíticas (CHANCE; ROSSMAN, 2006).

2 Metodologia

Este artigo corresponde a um recorte da pesquisa de mestrado (SOUZA, 2009) que investigou o seguinte problema: como os recursos tecnológicos podem ser úteis para a construção de novos conhecimentos da Estocástica no Ensino Fundamental? Para responder a essa questão, desenvolvemos uma pesquisa de natureza qualitativa, com análise interpretativa, a partir das seguintes categorias emergentes da parte empírica: simulação, interação e resolução de problemas.

Foram desenvolvidas quatro atividades, sendo duas de Estatística, aplicadas a duas turmas de aproximadamente 40 alunos em uma escola Municipal de São José dos Campos, e mais duas de Probabilidade, aplicadas a um grupo de quatro alunas voluntárias dessas turmas.

Neste artigo descreveremos as atividades que focalizaram a Probabilidade. Aplicamos a um grupo reduzido de alunos justamente por possuirmos apenas uma licença do *software Fathom*, no qual reconhecemos um grande potencial para o ensino de Estatística e Probabilidade; por isso nós o utilizamos como simulador de eventos aleatórios na pesquisa.

Além disso, através das atividades de ensino de Probabilidade pretendíamos observar se nossa atividade de pesquisa podia fazer com que a aprendizagem ocorresse por meio da internalização (VYGOTSKY, 1991, p.64), a partir de um processo de troca, com dimensão coletiva e com apoio de recursos tecnológicos.

Optamos, então, por fazer a gravação da discussão em áudio e trabalhar com um número pequeno de alunos, para que pudéssemos levantar dados, participando do processo de ensino e aprendizagem e intermediando-o. A nossa ideia de trabalhar com poucos alunos teve por meta dar-nos, posteriormente, condições para fazer a análise desses dados com maior precisão. Embora nosso objetivo central fosse analisar as contribuições dos recursos tecnológicos à aquisição de conhecimentos probabilísticos e estatísticos, também observamos nossa prática docente e o processo de interação dos alunos durante a construção do conhecimento.

3 O uso das simulações reais e virtuais

Em consonância com as diretrizes postuladas por Chance e Rossman (2006), neste estudo, buscamos evidenciar que o processo de ensino e aprendizagem da Estocástica no Ensino Fundamental pode ser ampliado e tornar-se mais significativo com o uso dos computadores: estes podem auxiliar os estudantes a adquirir conhecimentos sobre a coleta de dados e sobre sua organização, descrição, análise e interpretação, e a utilizá-los para tomada de decisões.

Para observar o potencial que os computadores têm em sala de aula, desenvolvemos, nesta pesquisa, uma análise da utilização de alguns jogos para trabalhar Probabilidade com alunos de 12 e 13 anos de idade. Para isso, usamos também alguns softwares disponíveis na Internet, além do *Fathom*. Com o intuito de observar como esses trabalhos podem ser desenvolvidos no Ensino Fundamental, iniciamos uma atividade que chamamos de "Corrida dos dados", com um roteiro de perguntas e orientações que foram entregues aos alunos.

Para iniciar a atividade, cada jogador escolheu três números de 2 a 12 e escreveu as iniciais de seu nome abaixo do número escolhido. Cada um jogou dois dados de cores diferentes, simultaneamente, cada um na sua vez. No Quadro 1, os jogadores marcaram um X na coluna correspondente à soma dos resultados obtidos pelo lançamento indicado nas faces superiores dos dois dados. Eles foram informados de que ganharia o jogo aquele que conseguisse completar primeiro a coluna correspondente ao número escolhido.

Fim	**Fim**	**Fim**	**Fim**	**Fim**	**Fim**	**Fim**	**Fim**	**Fim**	**Fim**	**Fim**
				X						
				X						
				X						
				X	X					
				X	X					
			X	X	X					
			X	X	X					
			X	X	X	X				
			X	X	X	X				
			X	X	X	X	X			
			X	X	X	X	X			
			X	X	X	X	X			
			X	X	X	X	X	X		
			X	X	X	X	X	X		
	X		X	X	X	X	X	X	X	
	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
C	B	L	C	L		L	B		B	C

Quadro 1 – Tabela usada no jogo "Corrida de dados"

Ao iniciar o jogo, os alunos foram questionados se todos os números escolhidos ofereciam a mesma chance de ganhá-lo. Antes de responder, uma das alunas iniciou a discussão, perguntando por que não poderia escolher o número 1. Outra argumentou que não havia o número 1, porque, ao jogar os dois dados simultaneamente, a soma mínima dos valores seria dois.

Ainda durante a discussão, o grupo teve dúvidas a respeito das chances das somas dos valores dos dados, mas concordou com a resposta de que não existe um número que tenha maior ou menor chance de ganhar. Os alunos acreditaram, simplesmente, em sorte, o que não está errado. Porém, a sorte, nesse caso, dependeria do tamanho da amostra, já que as chances não eram as mesmas. Os alunos teriam sorte ou não pelo fato de escolher os números que tinham maior chance de soma, sem saber as regras do jogo. A partir do momento que as conhecessem, já não se trataria mais de sorte e, sim, de escolher os números certos.

Acreditar em sorte é o mesmo que acreditar no destino ou na predestinação; em algo que está escrito e irá acontecer. A Probabilidade ajuda a entender que algumas situações irão acontecer com maior ou menor frequência; que o destino, nesse sentido, tem uma tendência central e que, se souber escolher, o jogador poderá ter mais chances com sua sorte boa.

Através da primeira pergunta, pudemos observar que a opinião de um dos componentes do grupo interferiu nas respostas coletivas, pois gerou dúvidas e, ao mesmo tempo, contribuiu para que não houvesse respostas prontas; tal fato levou-os a refletir no que há por trás do jogo e se sorte existe ou não.

Em seguida, com o intuito de desestabilizar a primeira impressão das alunas, questionamos a respeito de qual número seria mais fácil de ganhar e qual seria o mais difícil. Através das respostas, ficou claro que o grupo ainda não havia percebido que algumas somas têm maior ou menor possibilidade de acontecer e, por acreditarem que as chances seriam iguais, elas julgavam que ganhar ou perder ainda seria questão de sorte.

Depois de responder às perguntas, iniciaram o jogo: cada uma escolheu três números, e decidiram que apenas uma das quatro marcaria o resultado. Após todas escolherem aleatoriamente três números, uma delas marcou a letra inicial dos nomes de cada uma embaixo dos números. Quando se iniciou o jogo, elas se entusiasmaram com os resultados obtidos nos dados. A princípio, os números 6, 5 e 8 largaram na frente. Durante um tempo, o 7 ultrapassou todos, mas, logo depois, o número 6 retomou a frente, conforme observado no Quadro1.

Após o final da partida, as alunas foram questionadas se o resultado do jogo fora justo para todos os números e se existiria alguma soma mais fácil de acontecer. A princípio, responderam que o jogo fora justo para todos os números, mas, quando foram questionadas novamente se existia algum número mais fácil de acontecer, começou a especulação e, com ela, a construção do novo conhecimento. Inicialmente, elas acharam que o número mais fácil de acontecer seria o 6, porque podia ser formado usando 1+5, 4+2 e 3+3; e o mais difícil, o número 2, que é formado por somente por 1+1.

Na resposta dada à primeira questão, é perceptível que o grupo ainda não tinha descoberto quais as regras que determinam as chances de ganhar o jogo e, por isso, os alunos ainda pensavam que o único fator determinante seria a sorte. Mas, a partir da segunda pergunta, descobriram que algumas somas são mais difíceis e outras mais fáceis de acontecer. É bem provável que o histograma construído por meio do jogo tenha facilitado essa percepção. Ainda não estava clara para o grupo a lógica do jogo que faz com que as somas sejam mais ou menos prováveis de acontecer.

Os estudos que envolvem as concepções de crianças sobre justiça nos jogos de azar vêm crescendo há alguns anos. Watson e Collins (1994) constataram que muitas crianças achavam que alguns números têm maior chance de aparecer, mesmo em dados justos. No estudo de Cañizares et al. (2003), algumas crianças mostraram uma concepção antropomórfica sobre a probabilidade, e outras foram guiadas pelas características físicas dos geradores de eventos aleatórios — no nosso caso, os dados —para decidir a respeito da sua imparcialidade. No estudo de Watson e Collins (1994), as crianças tiveram necessidade de recorrer à experimentação para decidir sobre a imparcialidade dos dados.

Hoje contamos com as simulações interativas, em que substituímos uma situação aleatória real por diferentes experimentos que podem ser facilmente manipulados e analisados. Os computadores suportam as simulações interativas e ajudam a construir modelos simplificados, em que características irrelevantes são ignoradas; os fenômenos têm o tempo condensado e ficam à disposição das avaliações e dos trabalhos dos alunos (ENGEL; VOGEL, 2004). Na nossa pesquisa, percebemos que, durante as simulações, os alunos, com frequência, verbalizavam seus pensamentos, o que fazia com que os outros se apropriassem do seu raciocínio probabilístico e gerassem novos raciocínios.

A simulação pode proporcionar uma boa oportunidade de incluir uma abordagem de modelização no ensino de Probabilidade; então, para aguçar a percepção das alunas, utilizamos a atividade *RollingDice*, do programa *Fathom*. O jogo simula a soma do lançamento de dois dados e constrói o histograma com os resultados obtidos, da mesma forma que o jogo do Quadro 1, que havíamos feito anteriormente. Desenvolvemos essa atividade também com o objetivo de que os grupos verificassem os resultados do jogo e comparassem o histograma do programa *Fathom* com os dados probabilísticos de uma situação real. A grande vantagem de utilizar o programa nessa atividade é que ele pode fazer as simulações por várias vezes, economizando nosso tempo.

Após a aplicação da atividade *RollingDice* e a simulação interativa, o grupo passou a acreditar que existe uma tendência de as somas 6 e 7 acontecerem com maior frequência. Com isso, os alunos desenvolveram um raciocínio lógico, contando as chances de acontecerem, no lançamento dos dados, as combinações que comprovavam suas teorias. Porém, eles ainda não haviam percebido que os dados podem ser organizados de maneira inversa. Por exemplo, a soma 6 pode ser formada por 1 e 5 e também por 5 e 1. Isso acabou atrapalhando a sua conclusão.

Continuando, solicitou-se que o grupo elaborasse regras para o jogo, que tornassem justas as chances para os três jogadores, descrevendo-as. A regra criada por eles dizia que os três só poderiam escolher um número que tivesse uma única maneira de somar.

Após essa resposta, ficou clara a certeza do grupo de que as chances de somas não são iguais, mas ficou demonstrado, também, que não estavam certos de quais somas teriam maior e menor probabilidade de acontecer; tanto é que criaram uma regra impossível: não existe a possibilidade de três jogadores escolherem três números que tenham apenas uma única maneira de somar. Os únicos números que atendem a esse requisito são o 2 e o 12.

O programa *Fathom* facilitou aos alunos enxergar que as possibilidades e as chances de que aconteçam determinadas somas não são iguais, mas não auxiliou a descobrir qual é a chance de cada soma, apenas mostrou que são diferentes.

Para que eles percebessem que as chances são diferentes, usamos o *Racing game with two dice*, do CD-ROM *Navigating through Probability* 6-8 (2005), o qual, à medida que selecionamos os números, automaticamente mostra a combinação que se forma.

Iniciamos o jogo com cada jogador escolhendo três números de 2 a 12, utilizando o *player* A até *player* I. Cada letra era referente a um jogador. A princípio, jogaram três pessoas. Cada jogador escolheu três letras diferentes, referentes a três números, conforme a Figura 1.

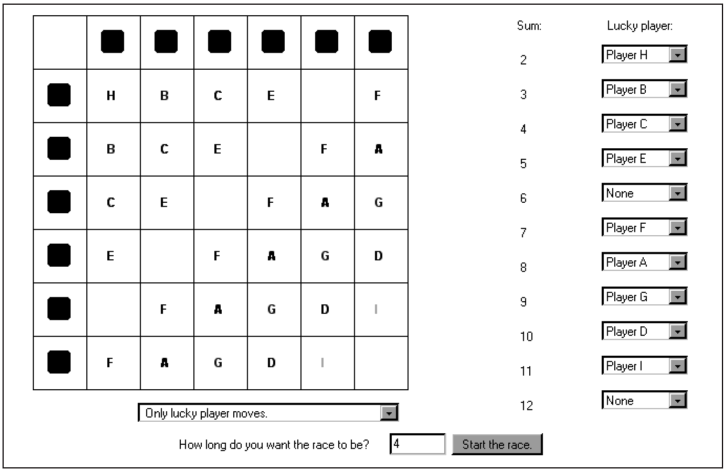

Figura 1 – Escolha dos números no jogo *Racing game with two dice.*

A Figura 2 mostra um exemplo de como é feita a corrida no jogo.

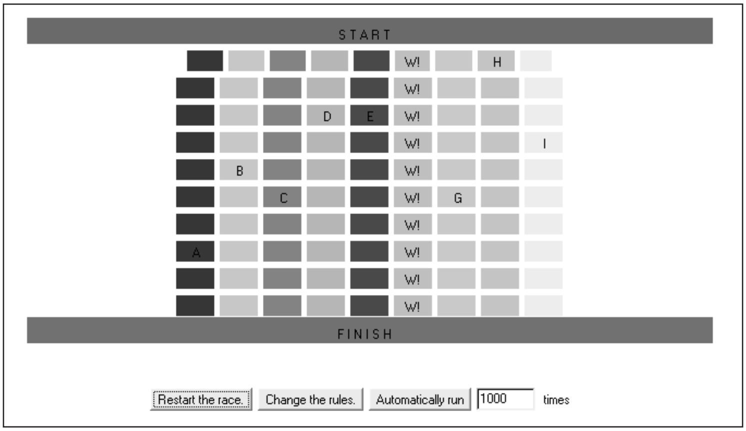

Figura 2 – Exemplo da corrida das letras no jogo *Racing game with two dice*

Ao final de três corridas, mostrou-se às alunas o simulador que traz o resultado de mil jogos aleatórios, pedindo-lhes que criassem uma regra para o jogo, em que quatro pessoas tenham a mesma chance de ganhar. A resposta do grupo foi para que cada pessoa escolhesse dois números. Em seguida, pedimos que criassem uma regra para o jogo, em que cinco pessoas que joguem tenham a mesma chance de ganhar. Eles responderam que cada pessoa deveria escolher um número.

Com as respostas dadas nas duas perguntas anteriores, fica claro que o grupo, apesar de já ter percebido que as chances de soma são diferentes, oscilava em suas respostas, pelo fato de acreditar que existe o acaso, e este só pode ser determinado pela sorte; ou seja, tanto faz o número que escolherem e as chances serem diferentes, pois ganhar o jogo dependerá da escolha e da aposta que fizerem nos números, independentemente da chance; para as alunas, não importa se há 4 chances em 36 ou 6 em 36, o que importa é fazer uma boa escolha; só assim se pode ganhar o jogo.

Em uma entrevista com dois alunos de quarta série, Kauffman e Bolite (1998) observaram que crianças eram capazes de reconhecer que o jogo havia sido desleal, quando um jogador tinha mais chance de ganhar, e foram capazes de mudar as regras para equacionar, para ambos os jogadores, as probabilidades de ganhar. Maher (1998) chegou a conclusões semelhantes e, por outro lado, considerou que influências sociais são essenciais para a aprendizagem de estudantes sobre ideias estatísticas.

Nossa pesquisa parece confirmar tais afirmações. Quando, a seguir, pedimos para as alunas que criassem um novo jogo e uma tabela com os resultados da multiplicação obtida através do lançamento dos dois dados, questionamos se existiria algum número mais fácil de acontecer.

Para responder a essa pergunta, montaram uma tabela com todos os números de 1 a 36 e, em seguida, fizeram a escolha dos números que gostariam que ganhassem o jogo. Durante essa escolha, uma delas percebeu que não haveria resultados para multiplicação de alguns números e citou como exemplo o número 23. Na regra criada por elas, ganharia o jogo quem chegasse ao final da tabela e, para isso, os jogadores deveriam percorrer 10 espaços. O Quadro 2 apresenta como foi o jogo e seus resultados.

Resultado das Multiplicações																																			
											X																								
					X						X																								
					X						X																								
					X						X																								
					X						X																								
			X		X						X																								
	X		X		X						X								X																
	X		X		X				X		X								X				X												
	X		X		X		X		X		X			X					X				X												X
X	X		X		X		X	X	X		X			X			X		X				X	X					X						X
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**
							N				N			L			C		L			C		N			C		L						

Quadro 2 - Tabela criada pelas alunas para o jogo "Corrida de dados".

No final da atividade, para responder ao questionamento de quais seriam os números mais fáceis de acontecer, as alunas recorreram ao conhecimento construído nas atividades anteriores e fizeram a observação do histograma para, em seguida, dizer que as formas de multiplicar o 6 e o 12, através dos resultados dos dados, eram apenas duas.

A partir da atividade da multiplicação, o grupo percebeu que as chances não são as mesmas, inclusive pelo fato de não existirem alguns produtos no intervalo de 1 a 36. Isso foi observado na fala de uma das alunas a respeito do número 23. A partir desse momento, ela não acreditou mais ser o jogo apenas questão de sorte e entendeu que existem chances diferentes. Porém, quando especificaram as chances de acontecer o 12 e o 6, ainda desconsideraram os resultados dos números indicados das faces inversas dos dados, por exemplo, 4 na face superior do dado vermelho e 3 na face superior do dado amarelo ou 3 na face superior do dado vermelho e 4 na face superior do dado amarelo. Nos dois casos, a multiplicação dos valores das faces indicadas nos dois dados seria 12.

Pudemos perceber que as alunas se pautaram apenas pela observação do histograma, pois, usando a estratégia de que tanto o 6 quanto o 12 têm dois modos de ser formados, elas desconsideraram que o 4 também tem duas formas de acontecer: o 2x2 e o 4x1. Na verdade, o 4 não tem a mesma chance de acontecer que o 6 e o 12, pois devemos considerar as combinações inversas, fato que as alunas, naquele momento, ainda ignoravam.

Após o final das atividades, foram retomados todos os questionamentos para verificar se, com a ajuda dos softwares, havíamos conseguido atingir os objetivos. Para isso, acessamos o *Fathom* e fizemos a simulação várias vezes e aos poucos, conforme a Figura 3.

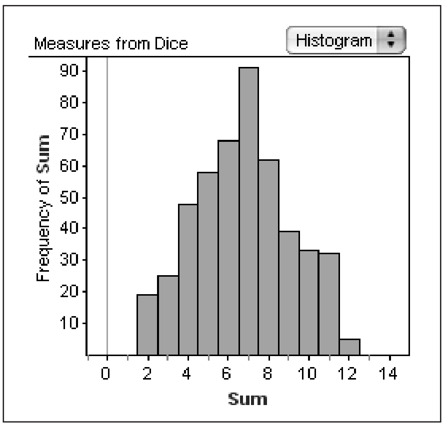

Figura 3 – Simulação do jogo *Racing game with two dice*, no programa *Fathom*

Através do diálogo, pudemos perceber que o grupo, com o auxílio dos dois programas, conseguiu identificar qual é a chance real de cada soma obtida por meio dos dados, fato que, até então, não havia sido identificado na prática, por acreditarem que 4 e 3 representassem a mesma chance que 3 e 4. Ficou claro, também, através do diálogo, que, sem a intervenção do professor, os programas sozinhos seriam falhos na construção dos conhecimentos propostos pela atividade. Os simuladores descrevem uma situação real, pautados em uma programação que os alunos desconhecem; por isso, refizemos a atividade com a intervenção do professor.

Simulamos o jogo *Racing game with two dice* mais uma vez. Verificamos o resultado, e o 7 ocorreu 401 vezes, conforme podemos ver na Figura 4.

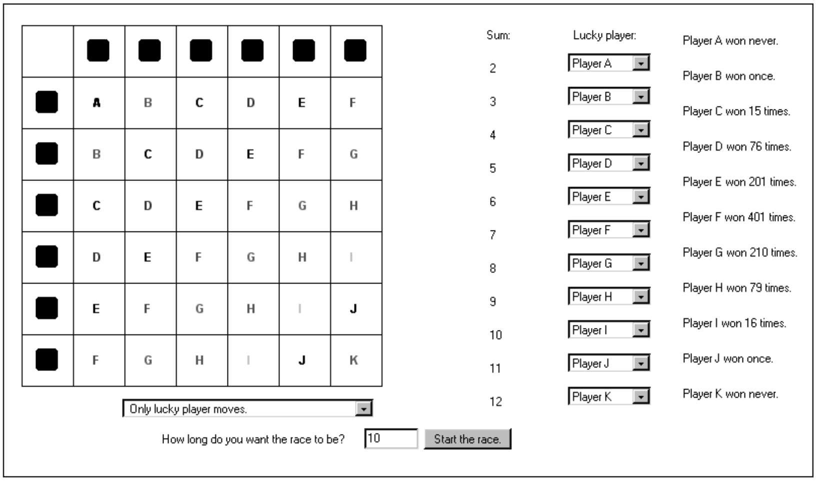

Figura 4 – Simulação da corrida das letras no jogo *Racing game with two dice*

Em seguida, propusemos ao grupo reler todas as perguntas e respondê-las novamente. As perguntas e as respostas seguintes revelam a nova análise:

Quando questionadas a respeito das chances, as alunas afirmaram que o 7 tinha chances maiores de ganhar, enquanto o 2 e o 12 tinham chances menores. Pedimos, então, que as alunas elaborassem *regras para o jogo que tornem justas as chances para os três os jogadores, descrevendo-as*. Nesse momento, começaram elaborar estratégias em voz alta. Uma delas sugeriu que tirassem *o 7, o 2 e o 12.*

Sugerimos que fizessem essa operação no *computador, usando as letras A, B e C*. As alunas discutiram por um tempo, usando o jogo, e chegaram à conclusão de que cada jogador deveria escolher para si números que permitissem 12 chances de soma; sendo assim, construíram o jogo, conforme a Figura 5.

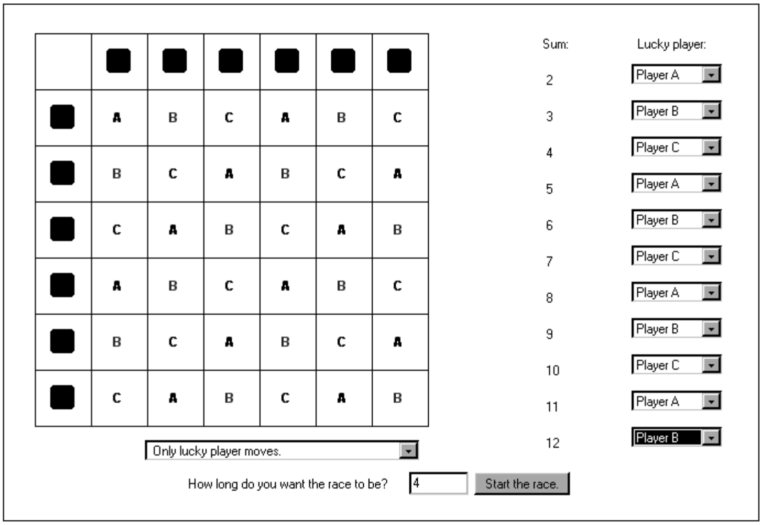

Figura 5 – Construção pelo grupo do jogo Corrida das letras — *Racing game with two dice*

Nesse momento, usando o programa, o grupo conseguiu criar uma regra que tornaria perfeitamente justas as chances para cada um dos três jogadores. Mas a forma criada pelos alunos só definiria, realmente, as mesmas chances, se eles mudassem também a tábua da corrida. Escolhendo os números dessa forma, cada *player* teria 12 chances, de um total de 36. Essa percepção do grupo pode ser identificada também através das respostas das duas perguntas posteriores. Podemos verificar que o grupo não percebeu que quem escolhesse o 7 ainda ganharia mais vezes; para resolver esse problema, eles poderiam organizar a tabela com apenas três colunas e com os números agrupados conforme a organização dos alunos no Quadro 3.

2-5-8-11	**3-6-9-12**	**4-7-10**

Quadro 3 - Tabela criada para o jogo Corrida de dados, em que jogam três pessoas

Em seguida, pedimos que, jogando o *Racing game with two dice*, do CD-ROM *Navigating through Probability* 6-8, criassem uma regra para o jogo, em que quatro jogadores tivessem a mesma chance de ganhar. Uma das alunas respondeu prontamente que só precisava dividir 36 por 4, e cada um deveria ter 9 chances em 36. Solicitamos, a seguir, que criassem uma regra para o jogo, em que cinco jogadores tivessem a mesma chance de ganhar. As alunas responderam que seria impossível, já que não é possível dividir 36 por 5.

Depois, pedimos que montassem uma tabela, mostrando a probabilidade de acontecer cada um dos produtos dos dois dados em frações, em decimal e em porcentagem. A construção da tabela por uma das alunas, conforme mostra a Figura 6, revelou que as atividades desenvolvidas tiveram uma grande contribuição para a construção desse conhecimento.

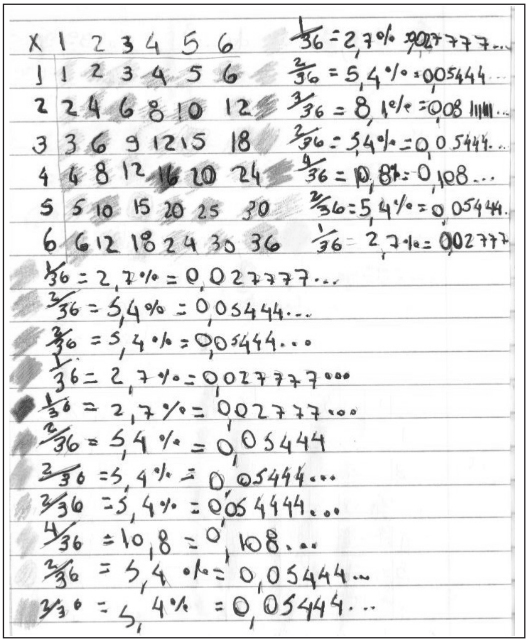

Figura 6 – Construção da tabela com as chances de cada soma acontecer

4 Considerações finais

No decorrer de toda essa atividade ficou nítido que a ferramenta computacional foi uma grande aliada na aquisição e na construção dos novos conhecimentos, porém, é fundamental que as atividades estejam interligadas com a prática e com simulações reais e que sejam feitas constantes intervenções pelos professores. Sem estas, e sem um bom planejamento de aula, seria impossível para o aluno autoestimular-se a utilizar jogos como esses e buscar neles informações pertinentes ao estudo da Probabilidade.

É notável que, durante todo o desenvolvimento das atividades, os alunos enfrentaram o dilema: seriam os jogos justos ou não? Ganhar seria pura questão de sorte? Isso causou desconfiança, o que estimulou o aprendizado.

Ao final, o grupo percebeu que existem chances diferentes para cada soma ou multiplicação e, inclusive, expressou, através de porcentagem, qual a chance de cada uma. O fato é que, mesmo tendo chances diferentes, a probabilidade só se mostra eficaz com a observação de várias amostras, trazendo muita dúvida aos alunos, principalmente nessa idade. No final, os alunos perceberam que as somas 2 e 12 têm chances bem menores de acontecer do que a soma 7. Mas eles continuaram, por um tempo, acreditando que acontecer ou não uma das somas depende de sorte e que, quanto mais vezes sair a soma 2 ou 12, maior será sua sorte, porque as chances são menores.

Os dois softwares utilizados ajudaram muito: com eles fizemos as simulações de várias amostras, economizando um tempo precioso de aula e ajudando os alunos a praticar na máquina aquilo que seria impossível fazer na prática. Quanto mais eram lançados os dados, mais o número que tinha mais chances de soma se distanciava dos outros. Isso aconteceu tanto no histograma quanto na tabela de anotação dos alunos.

Por várias vezes, os alunos argumentaram que os resultados apresentados pelo computador não eram aleatórios e, sim, programados por alguém, o que não tornava o jogo confiável; além disso, demonstraram desconfiança durante algumas simulações. Percebemos, em algumas das falas dos alunos, que eles julgam que os dados devem ser lançados para conferir qual dos números aconteceria mais vezes. Sendo assim, o computador é uma ferramenta muito útil, mas o seu trabalho precisa ser referendado.

Em Souza (2009), durante todo o projeto os alunos apresentaram significativas habilidades relativas à resolução de problemas. Destacaram-se, em relação às categorias emergentes consideradas para a análise: simulação; interação e resolução de problemas; capacidade para criar métodos de coleta de dados, aplicá-los, tabulá-los e interpretá-los, usando os recursos tecnológicos. É provável que tais atividades pudessem ter sido desenvolvidas sem o uso desses recursos, de forma que os alunos construíssem os gráficos e simulassem as atividades manualmente, porém acreditamos que, nesse caso, perder-se-ia a oportunidade da construção dos diferentes tipos de gráficos e o processo de interação. Ficou evidenciado, nesta pesquisa, que, através das quatro atividades desenvolvidas, conseguimos levar os alunos à construção e à simulação dos dados, de forma que viabilizamos, também, desenvolver um trabalho com estatística e probabilidade, em que prevaleceu a análise crítica, em detrimento de uma construção mecânica, em que não há espaço para o pensamento estocástico.

Pudemos perceber, em várias falas dos alunos, principalmente uma desconfiança constante com relação aos resultados que os simuladores traziam. Esse fato evidenciou a importância da simulação para a educação estocástica, já que os alunos questionaram todo o tempo o que havia por trás da máquina e indagavam se os resultados realmente eram aleatórios.

A comparação da simulação real com a simulação feita no computador, junto com a interação no grupo, possibilitou-lhes enxergar que os recursos tecnológicos são ferramentas que podem auxiliá-los na tomada de decisões, porém os computadores não são os donos da verdade, e seus métodos podem e devem ser questionados. Conseguimos mostrar aos alunos que o pensamento estatístico deve prevalecer sobre os resultados, e não o contrário.

Esta pesquisa evidenciou que os computadores podem ser nossos grandes aliados na busca do conhecimento probabilístico, mas as atividades de ensino-aprendizagem que o envolvem jamais poderão prescindir das intervenções pontuais do professor. Segundo Vygotsky (1991), a criança e o seu aparato biológico não seriam suficientes para que se internalizassem novos conhecimentos. Neste caso, tanto a intervenção do professor quanto a relação com o seu grupo social foram de extrema importância para que os alunos avançassem em conceitos que ainda não haviam sido compreendidos.

Referências

BALL, D. L. Bridging practices: intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. **Journal of Teacher Education,** Washington, US, v. 51, n. 3 , p. 241-247, May/June, 2000. Disponível em http://www-personal.umich.edu/~dball/articles/BallBridgingPractices.pdf. Acesso em: 15 jul. 2011.

BATANERO, C. Los retos de la cultura estadística. In: JORNADAS INTERAMERICANAS DE ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA, 1., 2002, Buenos Aires. **Conferência inaugural**. Buenos Aires: IASI, 2002. p. 1-11. http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/CULTURA.pdf. Acesso em 15 jul. 2011.

BATANERO, C. et al. Using simulation to bridge teacher's content and pedagogical knowledge in probability. In: INTERNATIONAL COMISSION ON MATEMATHICS INSTRUCTION STUDY, 15th, 2005, Águas de Lindóia, Brazil. **Proceedings…**Águas de Lindóia: ICMI, 2005. p.1-6. http://www.ugr.es/~batanero/. Acesso: em 15 jul. 2011.

CAÑIZARES, M. J. et al. Children's understanding of fair games. In: CONFERENCE OF EUROPEAN RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION (CERME), 3rd, 2003, Bellaria, Itália. **Proceedings...** Bellaria: CERME, 2003. p.1-9. http://www.ugr.es/~batanero/. Acesso em: 15 jul. 2011.

CHANCE, B; ROSSMAN, A. Using simulation to teach and learn Statistics. In: INTERNATIONAL CONFERENCE IN TEACHING STATISTICS (ICOTS), 7th, 2006, Salvador, Bahia, Brazil. **Proceedings…** Salvador: IASE and ISI, 2006. p. 1-6. http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/17/7E1_CHAN.pdf. Acesso em: 15 jul. 2011.

ENGEL, J.; VOGEL, M. Mathematical problem solving as modeling process. In: HENN, W. (Ed.). **International Commission on Mathematical Instruction.** Study 14. Pre-Conference. Germany: Universität Dortmund, p. 83-88, 2004.

ESTEPA, A. Stochastic education in the ibero-american countries. In: INTERNATIONAL CONFERENCE IN TEACHING STATISTICS (ICOTS), 6th, 2002, Cape Town. **Proceedings**… Cape Town: IASE and ISI, 2002. p. 49-52. Disponível em: <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/1/9c2_este.pdf>. Acesso em: 11 jul. 2011.

HEITELE, D. An epistemological view on fundamental stochastic ideas. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v.6 , n. 3 , p.187-205, 1975.

KAUFMAN, E.; BOLITE, J. The emergence of statistical reasoning in Brazilian school children. In: PEREIRA-MENDOZA, L. et al. (Ed.). In: INTERNATIONAL CONFERENCE IN TEACHING STATISTICS (ICOTS), 5th, 1998, Singapore. **Proceedings**… Singapore: IASE and ISI, 1998. p. 49-52.

LOPES, C. E. **A Probabilidade e a Estatística no Ensino Fundamental:** uma análise curricular. 1998. 139 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998.

LOPES, C. E. **O conhecimento profissional dos professores e suas relações com Estatística e Probabilidade na Educação Infantil**. 1998. 290 f. Tese (Doutorado em. Educação) — Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas , 2003.

LOPES, C. E.; MORAN, R. C. A estatística e a probabilidade através das atividades propostas em alguns livros didáticos brasileiros recomendados para o ensino fundamental. In: CONFERÊNCIA INTERNACIONAL "EXPERIÊNCIAS E EXPECTATIVAS DO ENSINO DE ESTATÍSTICA – DESAFIOS PARA O SÉCULO XXI", 2., 1999. Florianópolis, **Anais…** Florianópolis: Editora Atas 1999. p. 167-174.

MAHER, C. Is this game fair? The emergence of statistical reasoning in young children. In: INTERNATIONAL CONFERENCE IN TEACHING STATISTICS (ICOTS), 5th, 1998, Singapore. **Proceedings**… Singapore: IASE and ISI, 1998. p. 54-59. (PEREIRA-MENDOZA, L. et al. (Ed.)).

MARTIGNON, L.; KURZ-MILCKE, E. Educating children in stochastic modeling: games with stochastic urns and colored tinker-cubes. In: INTERNATIONAL CONFERENCE IN TEACHING STATISTICS (ICOTS), 7th, 2006, Salvador. **Proceedings…** Salvador: IASE and ISI, 2006. p.1-4.

MELETIOU-MAVROTHERIS, M.; LEE, C. Teaching students the stochastic nature of statistical concepts in an introductory statistics course. **Statistics Education Research Journal.** Auckland , v. 1, n. 2, Dec. 2002. Disponível em: <www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ1(2).pdf>. Acesso em: 08 nov. 2010.

SOUZA, L. O. **A Educação Estatística no Ensino Fundamental e os recursos tecnológicos.** 2009. 192 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) — Instituição Educacional São Miguel Paulista, Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2009.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. 4**.** ed. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

WATSON, J. M.; COLLINS, K. F. Multimodal functioning in understanding chance and data concepts. In: PME CONFERENCE, 18th, 1994, Lisbon. **Proceedings…** Lisbon: University of Lisbon, 1994. p. 369-376. (PONTE, J. P.; MATOS, J. P. (Ed.)).

Submetido em Junho de 2010.
Aprovado em Outubro de 2010.

ISSN (versão impressa) 0104-9739
ISSN (versão online) 2176-2988

GEPEM

GRUPO DE ESTUDOS E PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

REEDIÇÃO DO ARTIGO
Epistemologia dos Números Relativos
Georges Glaeser

Boletim Gepem

JUL. / DEZ. 2010

57

ANO XXXIV
RIO DE JANEIRO – RJ
P. 1 – 128
JUL. / DEZ. 2010

2010