ISSN 0103-636X

Razonamiento Geométrico y Visualización Espacial desde el Punto de Vista Ontosemiótico

An Onto-Semiotic Approach to Geometrical Reasoning and Spatial Visualization

Teresa Fernández Blanco*
Juan Díaz Godino**
José Antonio Cajaraville Pegito***

Resumen

En el marco de una investigación sobre evaluación y desarrollo de capacidades de visualización y razonamiento espacial, presentamos el análisis de una tarea propuesta a una muestra de 400 estudiantes de magisterio. El análisis se realiza aplicando la noción de configuración de objetos y procesos introducida en el *enfoque ontosemiótico* del conocimiento y la instrucción matemática, la cual aporta posibilidades analíticas complementarias respecto de otras nociones cognitivas. La identificación de las redes de objetos intervinientes y emergentes en la resolución de la tarea permite formular hipótesis sobre conflictos potenciales de significado de los sujetos y explicar las dificultades en términos de los conocimientos y procesos de interpretación requeridos.

* Doctora en Matemáticas por la Universidad de Santiago de Compostela (USC). Profesora de Didáctica de la Matemática, Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Santiago de Compostela (USC), Santiago de Compostela, España. Dirección postal: Avenida Xoán XXIII s/n, Campus Norte, 15782. Santiago de Compostela, A Coruña, España. *E-mail:* teref.blanco@usc.es.

** Doctor en Matemáticas por la Universidad de Granada (UGR). Catedrático de Didáctica de la Matemática, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada (UGR), Granada, España. Dirección postal: Facultad de Educación. Campus de la Cartuja 18071. Granada, España. *E-mail:* jgodino@ugr.es.

*** Doctor en Matemáticas por la universidad de Santiago de Compostela (USC). Profesor de Didáctica de la Matemática, Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Santiago de Compostela (USC), Santiago de Compostela, España. Dirección postal: Avenida Xoán XXIII s/n, Campus Norte, 15782. Santiago de Compostela, A Coruña, España. *E-mail:* ja.cajaraville@usc.es.

Palabras-clave: Visualización. Razonamiento Espacial. Cognición Matemática. Enfoque Ontosemiótico.

Abstract

As part of an investigation on the evaluation and development of visualization skills and spatial reasoning, we present the analysis of a task used with a sample of 400 student teachers. The analysis is carried out applying the notion of configuration of objects and processes introduced in the “onto-semiotic approach” to mathematical knowledge and instruction, which provides complementary analytical possibilities with respect to other cognitive tools. The identification of the networks of intervening and emergent objects in the resolution of the task allows us to formulate hypothesis on potential subjects’ conflicts of meaning and to explain the difficulties in terms of the required knowledge and processes of interpretation.

Keywords: Visualization. Spatial Reasoning. Mathematical Cognition. Onto-Semiotic Approach.

1 Introducción

La visualización espacial ha recibido mucha atención como tema de investigación en Educación Matemática (BISHOP, 1989; CLEMENTS; BATTISTA, 1992; HERSHKOWITZ; PARZYSZ; DORMOLEN, 1996; GUTIÉRREZ, 1996; BATTISTA, 2007; PRESMEG 2006). Se trata de evaluar los procesos y capacidades de los sujetos para realizar ciertas tareas que requieren *ver* o *imaginar* mentalmente los objetos geométricos espaciales, así como relacionar los objetos y realizar determinadas operaciones o transformaciones geométricas con los mismos.

La mayor parte de las investigaciones se orientan a describir estilos y estrategias cognitivas, así como la evolución de las capacidades mentales de los sujetos ante tareas que requieren visualización espacial; se trata, por tanto, de trabajos con una orientación básicamente cognitiva, usando nociones como imagen mental, imagen visual, imagen conceptual, representaciones internas y externas, etc.

Existe, sin embargo, controversia acerca de estas nociones cognitivas. Algunos psicólogos defienden la existencia, en la memoria a largo plazo, de imágenes visuales que contienen información dispuesta de manera bi o tridimensional y que puede ser inspeccionada por un mecanismo perceptivo interno. En cambio, otros niegan que tales imágenes mentales estén guardadas en la memoria en un formato figurativo diferente del formato proposicional: la imagen visual no está archivada en la memoria como tal, sino que se produce al recuperar y codificar en formato gráfico, el formato proposicional guardado en la memoria. Aceptando la existencia de imágenes mentales en la memoria sensorial inmediata, la polémica es si existe la *imagen visual* archivada en la memoria a largo plazo como una fotografía o un dibujo y no si existe la función que permite formar imágenes mentales. En didáctica de las matemáticas se ha intentado precisar el término *representación* para estudiar el papel que juegan las diferentes representaciones en el proceso de comprensión de los objetos matemáticos (JANVIER, 1987; KAPUT, 1991; DUVAL, 1995; BROWN, 1996). Parece haber acuerdo en que las representaciones matemáticas externas – ostensivas – influyen en el tipo de representaciones internas – no ostensivas – que construye el sujeto y, recíprocamente, el tipo de representaciones internas que posee una persona determina el tipo de representación ostensiva que puede generar o utilizar (FONT, 2001).

Clement y Battista (1992, p. 420) describen la geometría escolar como el:

> [...] estudio de los objetos espaciales, relaciones, y transformaciones que han sido formalizadas (o matematizadas) y los sistemas axiomáticos matemáticos que se han construido para representarlos. En cambio, el razonamiento espacial consiste en el conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y manipulan representaciones, relaciones y transformaciones mentales de los objetos espaciales.

En esta descripción se mencionan objetos de naturaleza bien diferente como ingredientes que constituyen la geometría escolar. Por una parte, están los objetos espaciales, que se deben entender como los cuerpos físicos que nos rodean, sus posiciones en el espacio físico; por otra, se mencionan las representaciones mentales de tales objetos, relaciones y transformaciones (entidades psicológicas); y, finalmente, los sistemas axiomáticos matemáticos (entidades institucionales o culturales) que se han construido para representar los objetos físicos (y los mentales).

En este trabajo[1] vamos a explorar la variedad de objetos y conocimientos

[1] Trabajo realizado parcialmente en el marco del proyecto de investigación, SEJ2007-60110/EDUC, financiado por el Ministerio de Educación y Ciencia y los Fondos Europeos de Desarrollo Regional (MEC-FEDER).

que se ponen en juego ante tareas que requieren visualización y razonamiento espacial, usando las herramientas teóricas que Godino y colaboradores vienen desarrollando desde hace varios años y que describen como *Enfoque Ontosemiótico* (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática (GODINO 2002; GODINO; BATANERO, 1994; GODINO; BATANERO; FONT, 2007).

Consideramos que esta aproximación puede complementar las aportaciones realizadas desde otras perspectivas teóricas. En el EOS se introducen categorías de objetos que ayudan a distinguir entre las entidades mentales (objetos personales) y las institucionales (sociales o culturales). Además, la matemática se concibe desde tres puntos de vista complementarios: como actividad de solución de problemas (extra o intramatemáticos), lenguaje y sistema conceptual socialmente compartido.

El EOS puede proporcionar un punto de vista complementario para identificar la diversidad de conocimientos que se ponen en juego en la realización de tareas de visualización y razonamiento espacial, lo que puede permitir explicar las dificultades de los estudiantes en la realización de este tipo de tareas.

En la sección 2 presentamos una síntesis de las nociones teóricas usadas en los estudios sobre visualización. En la sección 3 resumimos algunas de las herramientas introducidas en el EOS para el análisis de los conocimientos institucionales y personales que intervienen en la resolución de tareas matemáticas. Estas herramientas son utilizadas en las secciones 4, 5 y 6 para analizar una tarea de visualización espacial (FERNÁNDEZ; CAJARAVILLE; GODINO, 2007). Esto nos permitirá concluir, en la sección 7, que las nociones de configuración epistémica y cognitiva aportan una visión complementaria sobre los procesos de visualización y razonamiento espacial.

2 Nociones cognitivas usadas en los estudios sobre visualización y razonamiento espacial

La noción de *imagen mental* juega, para muchos autores, un papel central en el estudio del razonamiento espacial. Clements y Battista (1992, p. 446) definen las imágenes mentales como “representaciones holísticas internas de objetos o escenas, que son isomorfas a sus referentes y pueden ser inspeccionadas y transformadas”.

Según Bishop (1989, p. 177), las imágenes visuales o mentales, son aquellos objetos que se manipulan en la actividad de la visualización. Esa manipulación se realiza según dos tipos de procesos: el *procesamiento visual* (no ostensivo), que es el proceso de conversión de información abstracta o no figurativa en imágenes visuales, y el proceso de transformación de unas imágenes visuales ya formadas en otras. La *interpretación de información figurativa* hace referencia al proceso de interpretación de representaciones visuales para extraer la información que contienen. Esto incluye la manipulación y transformación de representaciones e imágenes visuales, que se pueden hacer ostensivas. Este proceso sería inverso del anterior.

La noción de *imagen visual* es definida por Presmeg (1986, p. 42) como un esquema mental (no ostensivo) que representa información visual o espacial (ostensiva). Además, señala que tales imágenes visuales se pueden tener en presencia del objeto perceptible o en su ausencia. Su definición también permite la posibilidad de que los símbolos matemáticos, verbales o numéricos, se puedan disponer espacialmente, de forma ostensiva o no ostensiva (por ejemplo, los patrones numéricos).

La distinción entre las imágenes mentales de objetos perceptibles y las entidades geométricas, y el reconocimiento de las relaciones dialécticas entre las mismas, es abordada con nitidez por Fischbein (1993, p. 143) con la noción de *concepto figural*. La principal tesis del trabajo de Fischbein es que la geometría trata con entidades mentales (las así llamadas figuras geométricas) que poseen simultáneamente características conceptuales y figurales. "Los objetos de investigación y representación en el razonamiento geométrico son por tanto entidades mentales, llamadas por nosotros conceptos figurales, que reflejan propiedades espaciales (forma, posición, tamaño), y al mismo tiempo, poseen cualidades conceptuales – como idealidad, abstracción, generalidad, perfección". Afirma Fischbein que, en las teorías cognitivas actuales, los conceptos y las imágenes se consideran básicamente como dos categorías distintas de entidades mentales.

Para Goldin (1998) las representaciones internas (constructos de simbolización personal de los estudiantes, las asignaciones de significado a las notaciones matemáticas) incluyen, también, el lenguaje natural del estudiante, su imaginación visual y representación espacial, sus estrategias y heurísticas de resolución de problemas, y también sus afectos en relación a las matemáticas.

La interacción entre las representaciones externas e internas es fundamental para la enseñanza y el aprendizaje. El interés primario del proceso de instrucción se centra sobre la naturaleza de las representaciones internas en proceso de desarrollo por los estudiantes. Las conexiones entre representaciones se pueden basar en el uso de analogías, imágenes y metáforas, así como semejanzas estructurales y diferencias entre sistemas de representación.

Las representaciones internas son siempre inferidas a partir de sus interacciones con, o su discurso sobre, la producción de representaciones externas. Se considera útil pensar que lo externo representa lo interno y viceversa. Un concepto matemático se ha aprendido y se puede aplicar en la medida en que se han desarrollado una variedad de representaciones internas apropiadas, junto con las relaciones funcionales entre ellas.

3 El modelo epistémico – cognitivo del EOS

Los postulados o supuestos básicos del EOS se relacionan principalmente con la antropología, la ontología y la semiótica, pero también se articulan de manera coherente supuestos socioculturales y psicológicos. La matemática se concibe como una actividad humana, intencionalmente orientada a la solución de cierta clase de situaciones-problemas, realizada en el seno de instituciones o comunidades de prácticas; dicha actividad está mediatizada y apoyada por los recursos lingüísticos y tecnológicos disponibles. De los sistemas de prácticas realizadas para resolver los problemas emergen dos categorías primarias de entidades: institucionales (sociales, relativamente objetivas) y personales (individuales o mentales); de esta manera, se asume que la matemática es, además de una actividad, un complejo de objetos culturales (institucionales), axiomática y deductivamente organizado. Se atribuye un papel esencial al lenguaje (en sus diversas modalidades), que tiene una función no sólo representacional, sino también instrumental o constitutiva de los objetos matemáticos.

Para hacer operativos estos principios, el EOS propone como herramientas analíticas el par de nociones, *sistema de prácticas operativas y discursivas* y *configuración ontosemiótica*, ambas en la doble versión personal e institucional. A continuación, describimos brevemente estas nociones, que usaremos en el análisis de una tarea geométrica espacial.

3.1 Sistemas de prácticas operativas y discursivas ligadas a campos o tipos de problemas

En el trabajo sobre *significado institucional y personal de los objetos matemáticos,* Godino y Batanero (1994) introdujeron las nociones de práctica personal, sistema de prácticas personales y objeto personal como las herramientas útiles para el estudio de cognición matemática individual. De manera dual, el sistema de prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas, y compartidas en el seno de una institución, y los objetos institucionales emergentes de tales sistemas se proponen como nociones útiles para describir la cognición en sentido institucional o epistémico. De estas nociones se derivan las de *significado de un objeto personal* y *significado de un objeto institucional*, que se identifican con los sistemas de prácticas personales o institucionales, respectivamente.

3.2 Configuraciones de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas

En las prácticas matemáticas intervienen objetos materiales (símbolos, gráficos etc.) - ostensivos - y mentales - abstractos, no ostensivos - (que evocamos en la actividad matemática) y que son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual. De los sistemas de prácticas matemáticas emergen nuevos objetos, que provienen de las mismas y dan cuenta de su organización y estructura (tipos de problemas, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentaciones).

La noción de *sistema de prácticas* es útil para ciertos análisis de tipo macrodidáctico, especialmente cuando se trata de comparar la forma particular que adoptan los conocimientos matemáticos en distintos marcos institucionales, contextos de uso o juegos de lenguaje. Para un análisis más fino de la actividad matemática es necesario introducir los seis tipos de entidades primarias: situaciones, procedimientos, lenguajes, conceptos, propiedades y argumentos. En cada caso, estos objetos estarán relacionados entre sí, formando *configuraciones*, definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos.

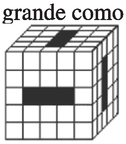
Una de las expectativas de nuestra investigación es que las herramientas EOS permitirán describir e interpretar los hechos cognitivos ligados a la solución de tareas de visualización desde una perspectiva complementaria. La visualización y el razonamiento espacial serán interpretadas como unas prácticas matemáticas específicas, operativas y discursivas, que se ponen en juego ante determinados tipos de tareas. En tales sistemas de prácticas intervienen y emergen unos objetos matemáticos específicos (lenguaje, definiciones, proposiciones, procedimientos) que caracterizan este campo de actividad; las redes formadas por tales objetos y las relaciones entre los mismos constituyen *configuraciones* mediante las cuales se describen los sistemas de prácticas.

Consideramos que la epistemología y ontología que propone el EOS puede ayudar a superar una visión parcial y sesgada hacia el cognitivismo en las investigaciones didácticas, según la cual el conocimiento matemático se reduce, básicamente, a conceptos y procedimientos, entendidos como entidades mentales. No se distingue el papel específico de las proposiciones y argumentaciones y, sobre todo, no se explicita el papel clave de las situaciones – problemas, como origen y razón de ser de tales entidades, cuya construcción está, además, mediada por los recursos lingüísticos y tecnológicos disponibles.

4 Configuración epistémica asociada a una tarea de visualización y razonamiento espacial

En esta sección vamos a realizar, a título de ejemplo, el análisis de los conocimientos (tipos de objetos y relaciones entre los mismos) puestos en juego en la resolución de una tarea por un sujeto ideal (experto). En el marco del EOS esto equivale a elaborar la configuración epistémica asociada a la resolución de dicha tarea. Esta configuración se usará como referencia para estudiar las configuraciones cognitivas de los sujetos y formular potenciales conflictos de significado. Se identifican los objetos y relaciones primarias (lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos puestos en juego), lo que podemos describir como un análisis semántico.

Se hacen túneles que atraviesan un cubo grande como se indica en la figura.



¿Cuántos cubos pequeños quedan? a) 88 b) 80 c) 70 d) 96 e) 85

Figura 1 - Enunciado de la tarea: volumen de un cubo perforado

4.1 Solución experta

1) La forma de proceder será calcular el volumen total del cubo grande y restarle el volumen ocupado por los tres túneles.

2) El volumen del cubo grande es 125 unidades, ya que dicho volumen se obtiene elevando al cubo la longitud de su arista: (5 x 5 x 5 = 125)

3) El volumen de cada túnel (ortoedro) es 15 unidades (3 x 5 x 1 = 15)

4) Existen intersecciones entre los tres cubos, por lo que si restamos a

125 el volumen de los tres túneles, descontamos varias veces algunos cubos pequeños. Es necesario visualizar cuáles son esas intersecciones.

5) El primer túnel considerado requiere restar 15 unidades; el segundo 15 menos 3 que ya habían sido restados con el primer túnel, o sea, 15 – 3 =12.

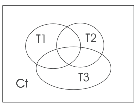
6) El tercer túnel requiere restar 15 menos 3 que ya habían sido restados del primer túnel y otros 3 del segundo. Pero con este cálculo restamos dos veces el cubo intersección de los tres; luego para el tercer túnel hay que restar 15 – 3 – 3 + 1 = 10

7) Por tanto, el volumen de los tres túneles será 15 + 12 + 10 = 37, y el volumen del cubo con los túneles será 125 – 37 = 88.

4.2 Objetos y relaciones primarias

En el Cuadro 1 resumimos los objetos y relaciones primarias que intervienen en la solución de la tarea (Figura 1), tanto previos como emergentes.

LENGUAJES:
Ordinario (Términos y expresiones):
túneles, atraviesan, cubos, arista, "se hacen túneles que atraviesan un cubo grande" , ortoedro, unidades, intersecciones
Gráfico (Icónico):
Dibujo de un cubo formado por 125 cubitos y tres túneles que lo atraviesan"



Simbólico (notaciones):
5 x 5 x 5 = 125
3 x 5 x 1 =15
15 – 3 =12
15 – 3 – 3 + 1 = 10
15 + 12 + 10 = 37
125 – 37 = 88
med(C) = med(Ct) + med(T1 ∪ T2 ∪ T3) – med(T1∩T2) – med (T1∩T3) – med(T2∩T3) + med(T1∩T2∩T3)

Expresa

Ayuda

SITUACIONES/ PROBLEMAS:
Enunciado del problema y sus generalizaciones

Motivan

Resuelven

CONCEPTOS/ DEFINICIONES:
Previos:
Cubo; cara, vértice, arista, volumen; unidad de volumen; medida
Emergentes:
Volumen de un sólido perforado

PROPIEDADES/ PROPOSICIONES:
Previos:
El volumen de un cubo se determina elevando al cubo la longitud de su arista.
El volumen de cada túnel se calcula multiplicando su anchura por su profundidad.
Aditividad de la medida
Número de elementos de la unión de conjuntos no disjuntos
Emergentes:
- En las condiciones del enunciado el volumen del sólido es 88

PROCEDIMIENTO:
Operaciones aritméticas elementales (suma, resta y multiplicación)

Justifican

ARGUMENTO:
Deductivo:
El cubo grande está formado por 125 cubitos. Hay tres túneles, cada túnel ocupa 15 cubitos. Se producen intersecciones de los túneles dos a dos y entre los tres. Teniendo en cuenta el volumen de un cubo y el de un ortoedro, y las intersecciones de los túneles, se deduce que el volumen del cubo perforado es de 88 unidades.

Cuadro 1 - Objetos y relaciones primarias en el problema del cubo perforado

El esquema de la configuración epistémica anterior tiene por objeto visualizar la red de relaciones entre los distintos tipos de objetos primarios. El lenguaje constituye el soporte de expresión de todas las demás entidades, ayudando a hacer ostensivos los restantes objetos puestos en juego en la resolución de la tarea. Las situaciones promueven la actividad matemática que moviliza relacionalmente los conocimientos previos y hace emerger, potencialmente, conocimientos nuevos. Los argumentos deben explicar y validar las propiedades y procedimientos puestos en juego.

Podríamos generalizar la tarea introduciendo modificaciones en el enunciado de la misma, como suponer que el cubo tiene una arista de longitud L unidades, dejando los túneles de igual ancho, o cambiándolos a túneles de anchura variable y no iguales entre sí.

La regla general (no ostensiva) que da la solución es una propiedad característica de ese cuerpo que se puede expresar de manera simbólica: 125 – 15 – 12 – 10 = 88. La visualización de las intersecciones de los túneles es no ostensiva, aunque se puede favorecer mediante representaciones pictográficas. *El carácter no ostensivo de los túneles puede ser un factor explicativo de la dificultad de esta tarea. La explicación verbal o gráfica (ostensiva) del número de unidades a restar por las intersecciones comunes no visibles es previsiblemente difícil para los estudiantes a los que se plantea el problema* (hipótesis H1).

La tarea requiere poner en juego las nociones de cubo, volumen de un cuerpo, unidad de medida de volumen. En el caso de la noción de cubo, pensar en este objeto en términos de los elementos que lo constituyen (caras, vértices, aristas) puede dificultar la resolución de la tarea. *El significado personal puede tener limitaciones sobre las nociones de cubo, de volumen y unidad de medida del volumen*, *siendo previsible que los sujetos manifiesten errores en sus respuestas a esta tarea* (hipótesis H2).

La expresión del problema, mediante un dibujo en perspectiva, sin señalar las intersecciones interiores ni las salidas ocultas de los túneles (¿atraviesan los túneles completamente al cubo?) *es otro factor de dificultad potencial* (hipótesis H3). El cubo perforado debe ser descompuesto en partes (forma un sistema). Si simbolizamos, respectivamente, por Ct, el cubo tunelado, C, el cubo original, T1, T2, T3 cada uno de los tres túneles, el nuevo objeto emergente de esta situación se puede expresar mediante:

$\mathrm{med}(C) = \mathrm{med}(Ct) \cup \mathrm{med}(T1 \cup T2 \cup T3) - \mathrm{med}(T1 \cap T2) - \mathrm{med}(T1 \cap T3) - \mathrm{med}(T2 \cap T3) + \mathrm{med}(T1 \cap T2 \cap T3)$.

La representación conjuntista refiere metafóricamente a los conjuntos de puntos interiores al cubo y a los túneles, así como a las operaciones realizadas. Las relaciones que se establecen entre las diferentes partes del sistema y el sistema son determinantes para la resolución de la tarea.

5 Configuración cognitiva: estudio de un caso

En este apartado analizamos los conocimientos que pone en juego una estudiante para maestra (Sara) al resolver la tarea. En el EOS, se corresponde con la elaboración de la configuración cognitiva asociada a la resolución de la tarea. Su comparación con la configuración epistémica, descrita en la sección anterior, nos permitirá detectar coincidencias o discrepancias entre significados personales e institucionales, conjeturando sus posibles causas.

5.1 Solución de una estudiante a la tarea del cubo perforado

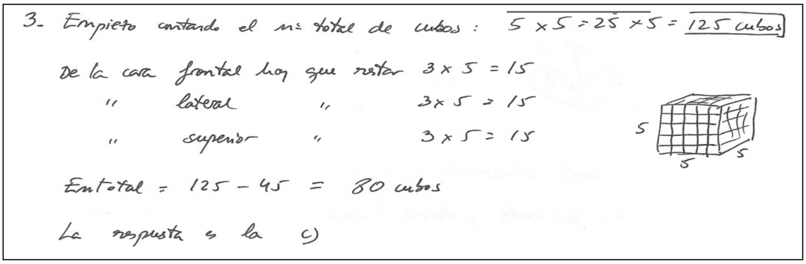


Figura 2 - Respuesta de Sara

5.2 Objetos y relaciones primarias

En el Cuadro 2 resumimos los objetos y relaciones primarias que ha puesto en juego Sara en la solución de la tarea

LENGUAJES:
Ordinario (Términos y expresiones):
Contar; número total de cubos, cara lateral, cara frontal, cara superior, túnel

Gráfico (Icónico):
Dibujo de un cubo formado por 125 cubitos

Simbólico (notaciones):
Números y operaciones aritméticas
5x5=25x5 = 125
3x5 = 15
125 – 45= 80

Expresa

Ayuda

SITUACIONES/ PROBLEMAS:
Problema del cubo perforado

Motivan

Resuelven

CONCEPTOS/ DEFINICIONES:
Previos:
Cubo; volumen, unidad de medida de volumen
Emergentes:
Volumen de un sólido perforado

PROPIEDADES/ PROPOSICIONES:
Previos:
Propiedad asociativa de la multiplicación.
El volumen de cada túnel se calcula multiplicando su anchura por su profundidad.
Aditividad de la medida.
Conservación del volumen.
Emergentes:
- En las condiciones del enunciado el volumen del sólido es 80.

PROCEDIMIENTO:
Operaciones aritméticas elementales
Cálculo mental (15+15+15=45)

Justifican

ARGUMENTO:
Deductivo (informal):
El lado del cubo grande está formado por 5 cubitos.
El número total de cubos es 125.
El número de cubos de cada túnel es 15.
El número de cubos de los tres túneles es 45.
El número de cubos que queda es el total menos la suma de los tres túneles.
Quedan 80 cubos.
El argumento es incorrecto al no tener en cuenta las condiciones del problema (intersecciones de los túneles).

Cuadro 2 - Configuración cognitiva de Sara sobre el problema del cubo perforado

La solución dada correspondería al caso en que los túneles no tuvieran intersecciones, lo que podría ocurrir, pero no en el caso propuesto. El proceso seguido es deductivo (informal) sobre el caso particular, calculando el volumen del cubo y descontando los ortoedros sin tener en cuenta sus intersecciones.

El estudiante recuerda las reglas generales (definiciones) del volumen del cubo y los ortoedros y las aplica correctamente al caso particular dado. Utiliza un dibujo para señalar las dimensiones del cubo, no consiguiendo representar los túneles ni visualizar (lo que resulta esencial) las intersecciones. Su representación no ostensiva (mental) de la situación no tiene en cuenta que hay que descartar los cubos comunes a los tres túneles.

El estudiante reconoce el cubo y el ortoedro como entidades unitarias a las cuales es capaz de atribuir un volumen, y hallar su medida. También sabe lo que es medir y la noción de unidad de medida. Pero el objeto *cubo perforado* es un sistema que hay que descomponer en sus elementos. No es suficiente con imaginar mentalmente (visualizar) que hay unas intersecciones entre los túneles; hay que cuantificar (medir) el tamaño de un objeto no ostensivo, para lo cual hay que descomponerlo, *verlo* como un sistema formado de partes relacionadas de manera específica.

A pesar de que la tarea no ha sido resuelta correctamente, el estudiante ha sabido interpretar una buena parte de la misma, atribuyendo significados a expresiones tales como, *túneles que atraviesan el cubo grande*, a términos como *cubos pequeños*, como unidades de medida, y a la pregunta, ¿Cuántos cubos pequeños quedan?, como indicación de hallar la medida del cubo perforado. El significado atribuido a unidad de medida y a medida por parte del estudiante se encuentra a nivel operatorio y no discursivo, como puede observarse en su respuesta.

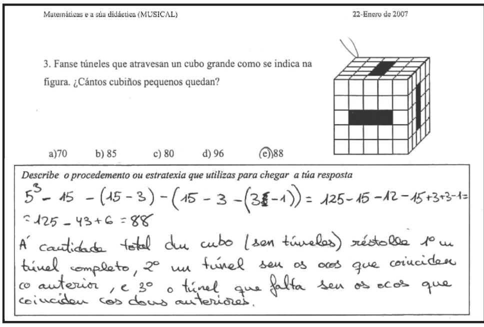
Esta tarea ha resultado difícil para este estudiante. La información que tenemos sobre el marco institucional en que realiza sus estudios nos permite afirmar que esta tarea es *atípica* entre las que habitualmente se proponen en las clases de geometría recibidas. Tampoco se han propuesto actividades que requieran hacer secciones planas de sólidos, o intersecciones entre conjuntos, por lo que estos procedimientos no forman parte de su práctica matemática habitual.

6 Tipos de configuraciones cognitivas asociadas al cubo perforado

Presentamos, en este apartado, el análisis de las respuestas a la tarea del cubo perforado, dadas por 400 estudiantes para maestro de la Universidad de Santiago de Compostela (España). El tipo de análisis que realizamos es, fundamentalmente, de carácter cualitativo, utilizando la noción de configuración cognitiva descrito anteriormente y caracterizando mediante ésta noción las categorías de respuestas que se han detectado en la experiencia realizada.

A continuación se describen cada uno de los seis tipos de configuraciones cognitivas que se han manifestado y se muestra para cada una de ellas una respuesta prototípica.

Configuración cognitiva 1 (CC1): Uso de procedimientos extractivos. Cálculo del volumen del cubo completo y, a continuación, sustracción del volumen de los túneles, considerando las intersecciones de los mismos: 125-(15+12+10)=125-37=88.



Transcripción:

$5^3 - 15 - (15 - 3) - (15 - 3 - (3 - 1)) = 88$
$= 125 - 15 - 12 - 10 = 88$

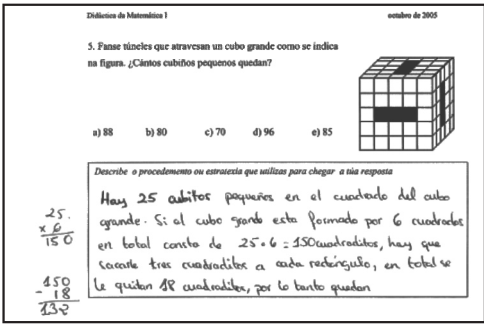
A la cantidad total de un cubo (sin túneles) le resto: 1º: un túnel completo; 2º: un túnel sin los huecos que coinciden con el anterior; y 3º: el túnel que falta sin los huecos que coinciden con los dos anteriores.

Figura 3 - Ejemplo de respuesta de la configuración cognitiva 1

La configuración cognitiva del estudiante, cuya respuesta presentamos en la figura 3, coincide, básicamente, con la configuración epistémica de referencia (ver sección 4 para los elementos primarios), utilizando, de manera informal, la propiedad:
med(C) = med(Ct) $\cup$ med(T1 $\cup$ T2 $\cup$ T3) – med(T1$\cap$T2) – med(T1$\cap$T3) – med(T2$\cap$T3) + med(T1$\cap$T2$\cap$T3).

El argumento aportado justifica adecuadamente el procedimiento seguido y el sentido de las operaciones aritméticas realizadas.

Configuración cognitiva 2 (CC2). Volumen como espacio vacío. El cubo está formado sólo por sus capas exteriores. En esta categoría los cálculos se realizan teniendo en cuenta sólo la parte exterior de la figura, es decir, las caras. La idea que subyace es el volumen como capacidad de un recipiente, como espacio vacío (Figura 4).



Transcripción:

Hay 25 cubitos pequeños en el cuadrado del cubo grande. Si el cubo grande está formado por 6 cuadrados, en total consta de 25.6=150 cuadraditos, hay que sacarle tres cuadraditos a cada rectángulo, en total se le quitan 18 cuadraditos, por lo tanto quedan: 25 x 6= 150; 150 - 18 =132.

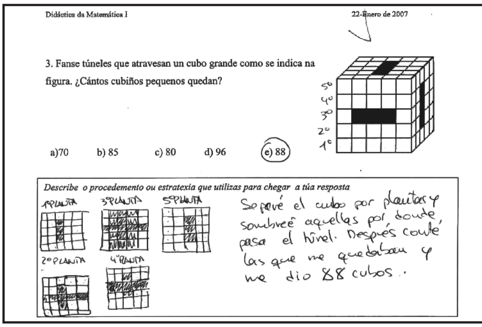
Figura 4 - Ejemplo de respuesta de la configuración cognitiva 2

Se observa una profunda confusión entre: a) superficie lateral y volumen de un cubo y de un ortoedro; b) confusión de conceptos y propiedades, mezclando dos magnitudes distintas: *un cubo tiene 6 cuadrados* en lugar de *un cubo tiene 6 caras cuadradas de igual tamaño*; *hay 25 cubitos en el cuadrado de un cubo (de arista 5 unidades de longitud)* en lugar de *en un cubo de arista 5 unidades, cada cara lateral es un cuadrado de 25 cuadraditos*.

Podemos conjeturar que este estudiante, en general, no distingue entre superficie y volumen, lo que representa un conflicto más profundo que no distinguir entre superficie lateral y volumen de un sólido tridimensional. Los objetos puestos en juego en esta configuración, algunos de los cuales se usan de manera implícita, son los siguientes:

- Lenguaje*: cubitos*, *cuadrado del cubo grande, el cubo está formado por 6 cuadrados*, *cada cuadrado está formado por 25 cubitos, hay que sacarle tres cuadraditos a cada rectángulo*. Notaciones: 25x6=150; 150-18=132.
- Conceptos: cubo, cuadrado, rectángulo, unidades de medida de superficie y volumen, sustracción (*sacar*, *quitar*).
- Propiedades. a) Un cubo está formado por 6 cuadrados (identificando cuadrado con cara); b) En cada cuadrado (cara) de un cubo de arista 5 cubitos, hay 25 (5x5) cubitos; c) un cubo (de arista 5) consta de 150 cuadraditos; d) En cada cara del cubo, 3 cuadraditos están ocupados por los túneles d) Propiedad emergente: en las condiciones del enunciado, la solución es 132 (errónea).
- Procedimientos*:* a) cálculo de la superficie lateral de un cubo de arista 5 unidades: 25x6=150 unidades (25=5x5 lo hace mentalmente); b) cálculo (mental) del total de las unidades que hay que suprimir: 18; c) cálculo de las unidades de superficie que quedan: 150-18=132 (que no coincide con ninguna de las opciones de respuesta ofrecidas).
- Argumentos (argumentación deductiva): *Como cada cubo está formado por 6 cuadrados (caras) de 25 unidades (cubitos), en total hay 150 (25x6) (cuadraditos), y hay que sacarle 3 cuadraditos en cada rectángulo cara (los que ocupan los túneles). En total se quitan 18 cuadraditos, por lo tanto quedan 150-18=132*.

Configuración cognitiva 3 (CC3). Descomposición ortogonal por capas. Se descompone la figura en capas siguiendo un esquema ortogonal (horizontal o vertical) por niveles, para después contar las unidades de cada capa y sumarlas (Figura 5). Esta técnica se basa implícitamente en una primera idea de *integral*.



Transcripción:

Separé el cubo por plantas y sombreé aquellas por donde pasa el túnel. Después conté las que me quedaban y me dio 88 cubos.

Nota: Los dibujos que muestra conducen a la operación aritmética:

22+18+8+18+22=88

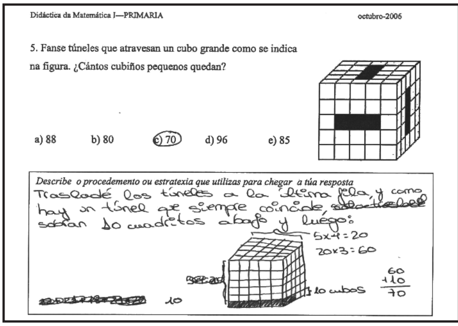
Figura 5 - Ejemplo de respuesta de la configuración cognitiva 3

Este procedimiento alternativo refleja la capacidad para la descomposición ortogonal de un objeto tridimensional y para visualizar las diferentes capas del cubo original, identificando las unidades de volumen ocupadas por los túneles en cada capa. Las diversas posibilidades de la descomposición en capas, da lugar a distintas combinaciones de operaciones aritméticas, cualquiera de las cuales, si no se cometen errores, lleva a la respuesta correcta. Los objetos puestos en juego en esta configuración, algunos de los cuales se usan de manera implícita, son los siguientes:

- Lenguaje: Se utilizan registros semióticos gráficos y textuales, con uso adecuado de términos como *separar*, *planta*, *sombrear*, *contar*, así como de representaciones gráficas de las cinco capas del cubo que se obtienen descomponiéndolo ortogonalmente en capas de afuera hacia adentro.
- Conceptos: cubo, ortoedro (túnel), planta (capa, corte, nivel), unidad de medida de volumen.
- Propiedades*:* a) un cubo de arista *a* (*a* entero), se puede descomponer en *a* ortoedros de dimensiones $a \times a \times 1$; b) aditividad de la medida: b1) En cada ortoedro, el número de unidades de volumen (*cubitos*) que quedan es el resultado de descontar (restar) del número de unidades total del ortoedro, las unidades que forman parte de los túneles; b2) El número total de unidades de volumen que quedan es el resultado de sumar las unidades que quedan en cada uno de los *a* ortoedros resultantes; *propiedad emergente*: en las condiciones del enunciado, la solución es 88.

- Procedimiento: a) Imaginar y representar geométricamente la proyección plana de cada una de las capas del cubo; b) realizar el recuento de las unidades no ocupadas por los túneles en cada una de las capas y sumar los resultados.
- Argumento: De tipo gráfico y textual, justificando la descomposición en capas como procedimiento adecuado para alcanzar la solución a la tarea propuesta (Figura 5).

Configuración cognitiva 4 (CC4): Traslado de túneles. Se trasladan los túneles de manera que queden todos en torno a un vértice (Figura 6). Podría usarse este procedimiento justificándolo mediante un argumento que considera el volumen como un todo global (procedimiento sustractivo) o por partes (procedimiento sumativo).



Transcripción:

Trasladé los túneles a la última fila y, como hay un túnel q ue siempre coincide, sobran 10 *cuadritos* abajo y luego:

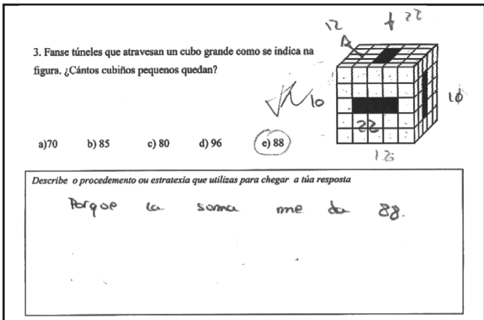
$5 \times 4 = 20; \quad 20 \times 3 = 60; \quad 60 + 10 = 70$

Figura 6 - Ejemplo de respuesta de la configuración cognitiva 4

Aparte de la confusión entre unidades de superficie y volumen (*cuadrito* y *cubito*), este ejemplo muestra errores de procedimiento en el *traslado* de los tres túneles a la capa inferior del cubo original, lo que lleva a este estudiante a una respuesta incorrecta (además, sólo cuenta 3 capas *libres de túneles* en lugar de las 5 – en realidad son 4, ya que representa una capa de más – que representa geométricamente). No detecta que las unidades ocupadas por los tres túneles, no caben en una sola capa. Este estudiante, además, tiene problemas para interpretar el concepto de *coincidencia*, a la hora de contar una sola vez las unidades de volumen que incluyen los tres túneles (con intersecciones comunes). Se trata de un procedimiento complejo (aunque ingenioso y válido si se ejecuta con precisión) para visualizar las unidades de volumen ocupadas por los tres túneles, teniendo en cuenta, además, sus intersecciones. Los objetos puestos en juego en esta configuración, algunos de los cuales se usan de manera implícita, son los siguientes:

- Lenguaje: Se utilizan registros textuales, destacando el uso de términos como *traslación de túneles a la última fila*, *coincidencia*, *cuadritos*, *sobrar*, así como la representación gráfica (incorrecta) de 6 filas (capas horizontales) de un cubo de arista 5. Símbolos y operaciones aritméticas: 5x4=20; 20x3=60; 60+10=70.
- Conceptos: ortoedro (túnel), traslación, fila (capa, corte, nivel), cuadrado (*cuadrito*), sobrar (resto, residuo).
- Propiedades*:* a) la medida de una magnitud es invariante a traslaciones; b) aditividad de la medida; c) Las unidades de medida sólo pueden contarse una vez; d) Propiedad emergente: en las condiciones del enunciado, la solución es 70 (errónea).
- Procedimiento: a) Imaginar y representar geométricamente (de forma errónea) la traslación de los tres túneles a la fila (capa) inferior del cubo original; b) realizar (erróneamente) el recuento de las unidades de volumen ocupadas por los tres túneles una vez trasladados, mediante operaciones aritméticas. no congruentes con el registro gráfico.
- Argumentos: *Porque si trasladamos los tres túneles a otra zona del cubo original, para facilitar el recuento, el resultado no varía, y además [razonamiento erróneo] hay un túnel que siempre coincide.*

Configuración cognitiva 5 (*CC5*). *Descomposición del cubo en secciones de afuera-adentro***.** Se descompone la figura en secciones de afuera hacia dentro (o a la inversa). Se pueden tomar distintas combinaciones



Transcripción:

Además de los números que coloca sobre cada dimensión del cubo, escribe:

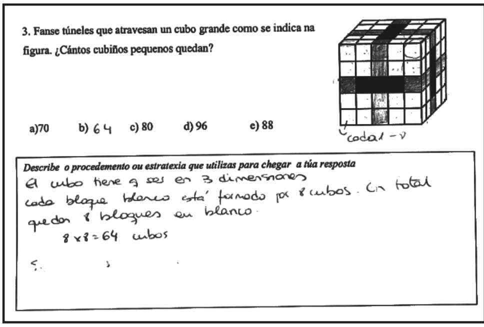
"porque la suma me da 88"

Figura 7 - Ejemplo de respuesta de la configuración cognitiva 5

Este estudiante realiza un estudio detallado del cubo y de los túneles, sobre las unidades de volumen que los componen respectivamente. Es parco en sus manifestaciones ostensivas, quizás porque realiza una buena parte del proceso de forma mental, utilizando como apoyo ostensivo la representación gráfica que se le ofrece en el enunciado de la tarea, pero se deduce fácilmente su razonamiento implícito, a partir del recuento que hace de los *cubitos* blancos que quedan en cada capa o sección en que descompone el cubo. Pone de manifiesto sus capacidades de visualización espacial. Los objetos puestos en juego en esta configuración, algunos de los cuales se usan de manera implícita, son los siguientes:

- Lenguaje*: La suma me da 88*, 22, 12, 10.
- Conceptos: cubo, secciones de un cubo, unidad de medida de volumen.
- Propiedades: a) Aditividad de la medida; b) Un cubo de arista 5u se puede descomponer en 2 ortoedros 5×5×1(frontal y posterior); 2 ortoedros 3×5×1 (superior e inferior) y 1 ortoedro 3x3x5 (lateral e interior), que totalizan 50+30+45=125 u^2; c) El número de unidades que hay que descontar en los túneles es 4x3 unidades (cubitos) en los ortoedros frontal, exterior, superior e inferior y 3×5+(3×2)+(2×2) unidades en el ortoedro centro-lateral, lo que totalizan 12+15+6+4=37 u^2; d) La solución es 125-37=88.
- Procedimiento. Descomposición del cubo en secciones, coherente con las propiedades anteriores, descontando directamente los túneles en cada ortoedro, lo que conduce al resultado final 22+22+12+12+10+10= 88 cubitos.
- Argumento (implícito): *Descompongo el cubo en ortoedros disjuntos y en cada uno de ellos descuento los cubitos ocupados por los túneles, lo que me da, respectivamente 22 cubitos en los ortoedros frontal y posterior, 12 cubitos en los ortoedros superior e inferior y (6+4)+(6+4) cubitos en el ortoedro centro-lateral*.

Configuración cognitiva 6 (CC6): Extracción de las piezas complementarias a los túneles. Se trata de un procedimiento sumativo sobre el complemento de los túneles (Figura 8). Se puede hacer el recuento de cada tipo de estructura o bien hacer uso de la simetría de la figura.



Transcripción:

El cubo tiene que ser en 3 dimensiones, cada bloque blanco está formado por 8 cubos. En total quedan 8 bloques en blanco.

8x8=64 cubos

Figura 8 - Ejemplo de respuesta de la configuración cognitiva 6

Mediante un procedimiento sumativo, razona sobre el complemento de los túneles. Destacamos específicamente este procedimiento (los investigadores ni siquiera lo habían imaginado cuando elaboraron la configuración epistémica) por simple y elegante. Además, evita la complejidad del cálculo de las intersecciones. Los objetos puestos en juego en esta configuración, algunos de los cuales se usan de manera implícita, son los siguientes:

- Lenguaje*: el cubo tiene 3 dimensiones*, *bloque* - *cada bloque en blanco está formado por 8 cubos*. Notaciones: 8x8=64. Gráficos: Marcado de las capas del cubo que incluyen a los túneles.
- Conceptos: cubo, dimensión, bloque (como sólido compacto tridimensional), unidad de volumen.
- Propiedades*:* a) (formulada en registro geométrico). En un cubo de arista 5u, si suprimimos sus tres capas (ortoedros 5x5x1) centrales (según cada eje de un triedro referencial), nos quedan 8 bloques en forma de cubo 2x2x2; b) Propiedad emergente: en las condiciones del enunciado, la solución es 64.
- Procedimiento*:* Se suprimen las tres capas centrales del cubo original (una según cada eje) (Figura 9). Los túneles quedan incluidos en las capas suprimidas, quedando 8 bloques en forma de cubo 2x2x2, por tanto el número de *cubitos* total de los 8 bloques que quedan es 8x8= 64 cubitos... (procedimiento no terminado por el estudiante, que se completaría con: quedan, además 12 ortoedros 2x1 que no forman parte de los túneles, en total 12x2=24 cubitos. En conclusión, el número de cubitos que quedan serán 64+24=88 cubitos)[2].

[2] En el epígrafe Procedimiento hemos colocado, entre corchetes, la parte que permitiría alcanzar, con éxito, la solución del problema, y que el estudiante ha dejado pendiente.

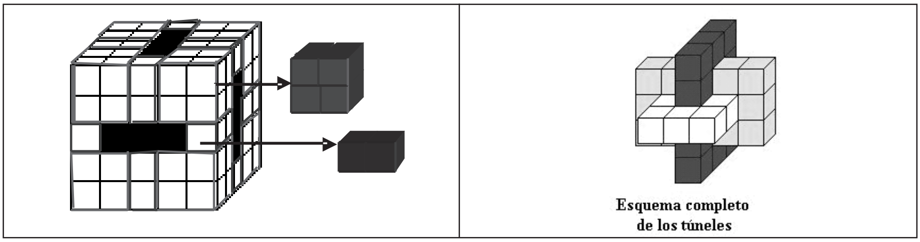


Figura 9 - Explicación del procedimiento asociado a la configuración cognitiva 6

- Argumento*:* Argumento deductivo incompleto: *Como un cubo tiene tres dimensiones; si le quitamos las tres capas sombreadas (razonamiento representado mediante un dibujo), quedan 8 bloques en blanco, formado, cada uno, por 8 cubos. En total quedan 8x8=64 cubos*. Esta justificación conduce a una solución falsa por olvidarse de descontar los 12 ortoedros 2x1, que sombrea junto con los túneles.

6.1 Análisis cuantitativo de las configuraciones cognitivas

En la tabla 1 se muestra el porcentaje de estudiantes que pusieron en juego cada tipo de configuración cognitiva en la muestra de 400 estudiantes a los cuales se les pidió que resolvieran la tarea del cubo perforado. Las opciones NC y NE corresponden a aquellas repuestas en las que no se evidencia argumento alguno o se declara, explícitamente, no poder interpretar el enunciado del ítem. El tipo de configuración cognitiva que aporta la mayoría de los estudiantes es la CC1, que hace referencia al volumen como un todo global. Se destaca que, casi la cuarta parte del alumnado (24,25%), responde a una configuración cognitiva CC2: realizar cálculos teniendo en cuenta sólo el exterior del cubo (la mitad de estas respuestas dan como resultado el valor 88, valor correcto pero con justificaciones no pertinentes). Como se puede observar en la tabla, el sorprendente tipo de configuración CC6, sólo fue insinuado por un alumno, siendo, sin embargo, el único razonamiento que no requiere el cálculo del valor de las intersecciones, lo que facilita en gran medida la resolución de la tarea.

Tabla 1 - Frecuencia y porcentaje de los tipos de configuraciones

Tipo de configuración cognitiva	Descripción	Frecuencia	Porcentaje
CC1	Uso de procedimientos extractivos	168	42,00
CC2	Volumen como espacio creado (vacío).	97	24,25
CC3	Descomposición ortogonal por capas	27	6,75
CC4	Descomposición del cubo en secciones de afuera-adentro	2	0,50
CC5	Traslado de túneles	1	0,25
CC6	Extracción de las piezas complementarias a los túneles.	1	0,25
NC	No argumentar la opción elegida o dejar la respuesta en blanco	89	22,25
NE	No entiende	15	3,75
Total		400	100,00

Hay que hacer constar, además, que sólo el 21,25% de los sujetos resuelve la tarea y la valida correctamente, lo que contrasta con los que eligen la opción correcta 88 (34%). Esto pone de manifiesto carencias cognitivas, así como dificultades para hacer ostensivos razonamientos mentales (carencias argumentativas).

7 Reflexiones finales

En este trabajo hemos aplicado la herramienta configuración de objetos y procesos del *enfoque ontosemiótico* al análisis de una tarea cuya resolución requiere poner en juego capacidades de visualización y razonamiento geométrico. Esta herramienta la hemos aplicado al texto que se genera en la resolución esperada o experta de la tarea, obteniendo la configuración que denominamos epistémica (ya que constituye un modelo de referencia), y a la resolución dada por un estudiante (configuración cognitiva). La tarea fue presentada, además, a una muestra de 400 estudiantes, lo que ha permitido identificar seis tipos de configuraciones cognitivas con las cuales se pueden asociar las configuraciones personales de cada estudiante.

Desde una perspectiva de resolución de problemas, las respuestas a la tarea se pueden clasificar teniendo en cuenta la *estrategia cognitiva* utilizada, la cual puede ser interpretada como el tipo de procedimiento utilizado. Además de la estrategia *extractiva* (que se corresponde con la configuración epistémica de referencia), hemos descrito otras cinco: *volumen como espacio vacío*, *descomposición ortogonal por capas*, *traslado de túneles*, *descomposición del cubo en secciones fuera - dentro* y *extracción de las piezas complementarias a los túneles*. El análisis de las respuestas en términos de estrategias se revela limitado cuando se reconoce que alrededor de cada estrategia se ponen en juego una trama de objetos y procesos matemáticos que son determinantes para la correcta interpretación de las condiciones de realización de la tarea, así como su efectiva ejecución y argumentación.

La noción de configuración de objetos y proceso que propone el EOS amplía el campo de visión sobre el papel de las representaciones externas (procesos de materialización) y las representaciones internas (procesos de idealización y reificación) en la resolución de problemas. Los constructos cognitivos *imagen mental*, *imagen visual*, *concepto figural*,... se corresponden con la noción de *objeto personal no ostensivo*, y, sin duda, se ponen en juego en la actividad cognitiva de los sujetos. Pero junto a estos *objetos* es necesario tener en cuenta la intervención sistémica de las entidades que propone el EOS como componentes de las configuraciones: conceptos-definición, proposiciones, procedimientos, argumentaciones, elementos lingüísticos y situacionales.

El análisis a priori de la tarea, realizado en términos de configuración epistémica, nos permitió formular algunas hipótesis sobre conflictos de significado que potencialmente podrían manifestar los estudiantes. Así, las dificultades y errores asociados a la justificación verbal o gráfica del número de unidades a restar por las intersecciones comunes no visibles (16,25%), confirman la hipótesis H1 formulada: El carácter no ostensivo de los túneles puede ser un factor explicativo de la dificultad de esta tarea. La explicación verbal o gráfica (ostensiva) del número de unidades a restar por las intersecciones comunes no visibles es previsiblemente difícil para los estudiantes a los que se plantea el problema.

Los datos obtenidos confirman que un porcentaje elevado de estudiantes (30%) han tenido dificultades con las nociones de cubo, volumen (confundiendo volumen y superficie) y unidad de medida del volumen, tal y como se aventuraba en la hipótesis H2.

La expresión *los túneles atraviesan el cubo*, del enunciado de la tarea, no es interpretada adecuadamente por el 24,25% de los casos (configuración CC2). Las limitaciones de la representación plana de un objeto tridimensional provocan malentendidos en el contenido que los estudiantes atribuyen a dicha expresión, lo que supone la existencia de un conflicto semiótico de relevancia porcentual, tal y como se postula en la hipótesis H3.

Referencias

BATTISTA, M. The development of geometric and spatial thinking. In: LESTER JR, F. (Ed.). **Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning***:* a project of the National Council of Teachers of Mathematics, Greenwich, CT: Information Age Publishing, Inc., & NCTM, 2007. p. 843-909.

BISHOP, A. J. Review of research on visualisation in mathematics education. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, Framingham, Mass., US , v. 11, n. 1, p. 7 - 16, Win-Spr. 1989.

BROWN, T. The phenomenology of the mathematics classroom. **Educational Studies in Mathematics,** Dordrecht, v. 31, n.1-2, p. 115 - 150, Sept. 1996.

CLEMENTS, D. H.; BATTISTA, M. Geometry and spatial reasoning. In: GROUWS, D. A. (Ed.) **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. New York, NY: NCTM, Macmillan, P. C. 1992, p. 161 - 204.

DUVAL, R. **Sémiosis et penseé humaine**. Berna: Peter Lang S.A., 1995.

FERNANDEZ, T.; CAJARAVILLE, J. A.; D. GODINO, J. Configuraciones epistémicas y cognitivas en tareas de visualización y razonamiento espacial. In: BOLEA, P. ; CAMACHO, M.; FLORES, P. (Eds.). **Investigación en Educación Matemática**. Tenerife: SEIEM, 2007. p. 189 - 197.

FISCHBEIN, E. The theory of figural concepts. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 24, n. 2, p. 139 - 162. 1993.

FONT, V. Algunos puntos de vista sobre las Representaciones en Didáctica de las Matemáticas. **Philosophyof Mathematics Education Journal,** Exeter, U.K., n. 14, p. 1 - 35. 2001.

GODINO, J. D. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. **Recherches en Didactique des Mathématiques***,* Grenoble, v. 22, n. 2/3, p. 237 - 284. 2002.

GODINO, J. D. ; BATANERO, C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 14, n. 3, p. 325 - 355. 1994.

GODINO, J. D. ; BATANERO, C. ; FONT, V. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. **ZDM. The International Journal on Mathematics Education**, Karlsruhe , v. 39 n . 1 - 2, p. 127 - 135, Jan. 2007.

GOLDIN, G. Representations and the psychology of mathematics education: part II. **The Journal of Mathematical Behaviour**, Norwood, NJ, v. 17 n. 2, p. 135 - 165. 1998.

GUTIÉRREZ, A. Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In: PME CONFERENCE, 20th, 1996, Valencia. **Proceedings...** Valencia: Universidad de Valencia, 1996. p. 3 - 19.

HERSHKOWITZ, R.; PARZYSZ, B.; DORMOLEN, J. V. Space and shape. In: BISHOP, A. J. et al. (Eds). **International Handbook of Mathematics Education**. Dordrecht: Kluwer A. P., 1996. p. 161 - 201.

JANVIER, C. Translation processes in mathematics education. In: JANVIER, C. (Ed.). **Problems of representation in the teaching and learning of mathematics**. Hillsdale,New Jersey: Lawrence Erlbaum A.P., 1987. p. 27 - 32.

KAPUT, J. Notations and representations as mediators of constructive processes. In: GLASERSFELD, E.Von (Ed.). **Radical constructivism in mathematics education**. Dordrecht: Kluwer A. P., 1991. p. 53 - 74.

PRESMEG, N. C. Visualisation in high school mathematics. **For the Learning of Mathematics**, Montreal , v. 6, n. 3, p. 42 - 46, Nov. 1986.

PRESMEG, N. C. Research on visualization in learning and teaching mathematics. In: GUTIÉRREZ, A.; BOERO, P. (Eds.). **Handbook of research on the psychology of mathematics education***:* Past, present and future. Rotterdam,The Netherlands: Sense Publishers, 2006. p. 205 - 235.

Submetido em Novembro de 2010.
Aprovado em Março de 2011.

zetetiké

ISSN 0104-4877