ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a12

Dificultades para Codificar, Relacionar y Categorizar Problemas Verbales Algebraicos: dos estudios con estudiantes de secundaria y profesores en formación

Difficulties in Codifying, Relating, and Sorting Algebraic Verbal Problems: two studies with secondary students and pre-service teachers

Carlos B. Gómez-Ferragud*
Juan José Solaz-Portolés**
Vicente Sanjosé***

Resumen

En resolución de problemas verbales por transferencia, la activación de problemas ya conocidos que sirvan de guía, depende de las analogías percibidas entre éstos y el problema a resolver. Se desarrollan dos estudios relacionados para analizar en qué características se basan los estudiantes para codificar problemas y detectar sus analogías, en tareas de categorización (*sorting*). Se utilizaron técnicas cuantitativas y cualitativas combinadas. Primero se analizó cómo los estudiantes de secundaria son influidos por diferentes variables características de problemas de ciencias. Una gran proporción de sujetos no fue capaz de percibir las analogías y diferencias adecuadas entre problemas. El segundo estudio trató de avanzar una explicación de estos resultados. El nivel académico y la familiaridad con las temáticas fueron factores significativos, pero los futuros profesores participantes mostraron demasiadas dificultades, alertando sobre la conveniencia de revisar algunos supuestos instruccionales habituales.

Palabras clave: Resolución de Problemas Verbales Algebraicos. Superficie y Estructura de problemas. Familiaridad con la temática. Analogías entre Problemas. Categorización de problemas.

Abstract

Solving verbal problems by transfer implies the activation of other, previously solved problems by means of the analogies perceived between these and the 'target problems'. Two related studies are conducted to analyse what features students focus on to codify problems and to build analogies among them when sorting tasks are proposed. Quantitative and qualitative techniques were used in the analysis. First, we analysed how different science problem characteristics influence secondary students' task performance. A high proportion of participants were not able to perceive suitable analogies and differences among problems. The second study tried

* Doctor en Didáctica de las Ciencias Experimentales por la Universitat de València. Profesor de Didáctica de las Ciencias Experimentales en Florida Universitaria, Valencia, España. Dirección Postal: Calle Rei en Jaume I, n. 2, CP 46470, Valencia, España. *E-mail:* cagomez@florida-uni.es.

** Doctor en Química por la Universitat de València. Profesor Asociado de Didáctica de las Ciencias Experimentales en la Universitat de València, España. Dirección Postal: Avenida de los Naranjos n. 4, CP: 46022, Valencia, España. *E-mail:* Joan.Solaz@uv.es.

*** Doctor en Física por la Universitat de València. Profesor Titular de Didáctica de las Ciencias Experimentales en la Universitat de València, España. Dirección Postal: Avenida de los Naranjos n. 4, CP: 46022, Valencia, España. *E-mail:* vicente.sanjose@uv.es.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a12

to look for explanations. The Academic level and the Familiarity with the problems topic were significant factors. However, our grade participants, in a pre-service post-grade course to be mathematics teachers, found more difficulties than expected, indicating that some usual instructional assumptions should be reconsidered.

Keywords: Algebraic Verbal Problem Solving. Problem Surface and Structure. Familiarity with the subjetc. Analogies among Problems. Problem sorting.

1 Introducción

La resolución de problemas verbales es una tarea clásica en el aprendizaje de las ciencias y las matemáticas. Un enunciado permite conectar situaciones en el mundo real con las abstracciones propias de las matemáticas, dándoles sentido y haciendo útil este conocimiento. En el proceso de resolución de un problema, Polya (1957) diferenció 4 fases distintas: comprensión, elaboración de un plan, ejecución del plan y comprobación. En Educación Secundaria un modo frecuente de instruir para abordar esas cuatro fases se basa en la *transferencia analógica* (GÓMEZ-FERRAGUD; SOLAZ-PORTOLÉS; SANJOSÉ, 2012; BERNARDO, 2001): típicamente, el profesor resuelve un conjunto de problemas basados en algún procedimiento, principio, ley o teorema y, a continuación propone problemas análogos a aquellos para que los estudiantes intenten resolverlos. En este proceso es muy importante que los estudiantes sean capaces de codificar adecuadamente los problemas para poder, luego, construir vínculos analógicos entre ellos (GENTNER, 1983). Por un lado, la activación del esquema mental apropiado para resolver un problema dependerá de los vínculos entre éste y otros problemas ya resueltos. Por otro lado, la elaboración de esquemas mentales, para su uso posterior, dependerá de los vínculos establecidos entre los problemas ya resueltos. Tal es su importancia, que la búsqueda y activación de problemas relacionados con el propuesto ha sido considerada por algunos autores como una fase diferenciada del resto, por considerar que en toda resolución hay que activar conocimiento previo en forma de esquemas resolutivos previamente elaborados (QUEIROZ; LINS, 2011)

El propósito del presente trabajo es estudiar cómo diferentes características definitorias de los problemas verbales, afectan a su codificación y a las analogías entre ellos percibidas por estudiantes de distinto nivel académico. Consideraremos problemas cuya resolución exige el uso de estructuras algebraicas correspondientes a dos funciones lineales, que tienen múltiples aplicaciones en el mundo real y desempeñan un papel relevante en la comprensión de temas matemáticos y científicos (BIRGIN, 2012).

2 El proceso de Transferencia

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a12

Transferir significa aplicar el conocimiento aprendido en determinadas situaciones y contextos, a nuevas situaciones o contextos diferentes. Aunque sus mecanismos cognitivos no son bien conocidos, desde la Teoría de los Componentes Idénticos de Thorndike (THORNDIKE; WOODWORTH, 1901), se acepta que uno de los elementos esenciales de este proceso es el reconocimiento de elementos comunes entre las situaciones conocidas y la nueva. Desde hace mucho, se ha estudiado la transferencia en resolución de problemas verbales algebraicos (GICK; HOLYOAK, 1980; REED; DEMPSTER; ETTINGER, 1985). Se ha estudiado, sobre todo, el aprendizaje inicial de ejemplos relevantes y su comparación, para favorecer la abstracción de *esquemas de problema* que puedan ser usados después (JONASSEN, 2003; GOLDSTONE; SAKAMOTO, 2003; LOEWENSTEIN; THOMPSON; GENTNER, 1999; GICK; HOLYOAK, 1983).

El análisis del proceso de transferencia ha llevado a diferentes autores a distinguir distintas fases constituyentes del mismo (HUMMEL; HOLYOAK, 1997; SALOMON; PERKINS, 1987). Chen y Klahr (2008) distinguen cuatro fases que podemos aplicar a la resolución de problemas:

a) Codificación de las características del problema propuesto (o *diana*) durante la fase de Comprensión del problema, (POLYA, 1957; NEWELL; SIMON, 1972). Previamente, se debe haber codificado un problema ya conocido (o *fuente*) que va a ser usado como análogo posteriormente.

b) Acceso a la información de un análogo *fuente*. Las *señales de recuperación* de un determinado análogo desde la memoria a largo plazo del resolutor deben ser, por hipótesis, algunos de sus rasgos característicos que el sujeto percibe comunes con el problema diana. Esta fase implica el establecimiento de vínculos analógicos entre el problema diana y alguno de los problemas ya estudiados, y se sitúa en la fase que Polya llamó Planificación de la resolución.

c) *Mapping* o correspondencia entre el problema diana y análogo fuente, aún dentro de la fase de Planificación. Las características percibidas de ambos problemas son relacionadas explícitamente. Una vez establecido este *mapping*, el resolutor decide que el análogo recuperado es útil o no (VANLEHN, 1998). Esta correspondencia implica la utilización de los vínculos analógicos ya establecidos entre ambos problemas en la fase anterior.

d) Ejecución de estrategias para llegar a la solución del problema diana (fase de Ejecución de la resolución, de Polya), navegando por el *espacio del problema* (NEWELL; SIMON, 1972). Cuando el análogo recuperado se considera apropiado tras el *mapping*, el resolutor

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a12

debe realizar las inferencias necesarias para que ciertas (todas o parte) relaciones estructurales del problema fuente se puedan usar para el problema diana, *mutatis-mutandis.*

Las tres primeras fases constituyen lo que Vergnaud (1982) denomina *calculo relacional* y preceden a la resolución del problema propiamente dicha, de *cálculo numérico*. La pregunta es, ¿sobre qué rasgos se puede codificar y construir analogías entre problemas con enunciado?

3 Factores Característicos de un Problema Verbal

Se han descrito dos componentes básicos para los problemas verbales: la *Superficie* y la *Estructura* (HOLYOAK, 1984). La Superficie describe la historia o situación problemática en un contexto del mundo ordinario. Son elementos superficiales:

a) La situación problemática descrita, con sus personajes, objetos y eventos del mundo ordinario involucrados, y sus atributos.

b) Las variables lingüísticas implicadas en el texto que constituye el enunciado. El modo en que se redacta un enunciado puede hacer que dos situaciones similares se perciban diferentes, dificultando la transferencia, o que dos situaciones estructuralmente idénticas se perciban diferentes (CERDÁN, 2008; PUIG; CERDÁN, 1988; VALENTÍN; CHAP-SAM, 2005; CARPENTER; HIEBERT; MOSER, 1981).

c) Los valores numéricos de las cantidades explicitadas como datos. En problemas multiplicativos se ha observado que los estudiantes cambian la operación elegida cuando se les presentan, sucesivamente, problemas que sólo difieren en términos numéricos (BELL; SWAN; TAYLOR, 1981).

La Estructura de un problema algebraico está determinada por “cómo se relacionan las cantidades unas con otras, más que por cuáles son esas cantidades” (NOVICK, 1988, p.511). Obviamente, el acceso a la estructura de un problema es decisivo para su comprensión y resolución correcta. Para ello es necesario que el resolutor conecte las representaciones mentales semántica y referencial del problema (o *Modelo de la Situación*) (KINTSCH, 1998), con la representación abstracta, matemática (o *Modelo del Problema*) (KINTSCH; GREENO, 1985; NATHAN; KINTSCH; YOUNG, 1992). Esto puede hacerse mediante el proceso conocido como *traducción* (PUIG, 1998) o mediante transferencia analógica, aprovechando una traducción ya realizada en otro problema.

En el caso de problemas de ciencias, la temática particular del problema puede influir tanto en la superficie como en la estructura de un problema. Por un lado, un tema científico

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a12

contiene determinadas situaciones, entidades y fenómenos específicos con sus magnitudes particulares. Estos elementos están incluidos en la Superficie. Por otro lado, las leyes y principios propios de esa temática de la ciencia forman parte de la Estructura, pues implican ciertas relaciones entre magnitudes (que, a su vez, contienen cantidades). Una temática poco familiar para un estudiante podría dificultar la representación mental de la situación descrita y, con ello, dificultar también la activación de esquemas abstractos apropiados para resolver correctamente un problema.

La pregunta o incógnita de un problema influye directamente en la dificultad del problema y condiciona el proceso de resolución (HIEBERT, 1982; VERGNAUD, 1982). Hay evidencia de que los estudiantes con bajo conocimiento previo y pericia focalizan su atención en la incógnita, e incluso, es frecuente el uso de la estrategia de trabajar *hacia atrás* (CHI; GLASER; REES, 1982), comenzando por la incógnita y retrocediendo paso a paso hasta encontrar los datos del problema. Es de esperar que las relaciones entre la incógnita y el resto de cantidades afecten la resolución de un problema, ya que ello configura la estructura del mismo. Sin embargo, el nombre concreto de la incógnita, su posición concreta dentro de un enunciado (CASTRO et al., 1991), o su rol matemático (como x o como y en ecuaciones, o como numerador o denominador en razones etc.) pueden también afectar la percepción de un problema por los resolutores no expertos.

En resumen, en este trabajo consideraremos 3 factores característicos de un problema verbal algebraico: a) su superficie (incluyendo la familiaridad con la temática); b) su estructura algebraica; c) su incógnita.

4 La tarea de Agrupación de Problemas y las Analogías

En resolución de problemas verbales, los expertos y los novicios parecen diferenciarse, precisamente, por el tipo de características en que se basan para codificarlos y relacionarlos con otros, antes de resolverlos. Chi, Feltovich y Glaser (1981) propusieron a expertos y estudiantes novicios una tarea sencilla de agrupación de problemas algebraicos de física, a partir de la lectura de su enunciado (sin resolverlos explícitamente). Este tipo de tarea parece explorar las 3 primeras fases del proceso de resolución por transferencia señaladas antes: la codificación o indexación del problema diana, la recuperación de análogos *fuente* y el establecimiento de un *mapping* entre problemas. La investigación mencionada reveló que el nivel de conocimientos afecta el modo en que la información específica se codifica en la memoria a largo plazo (indexación). Los expertos basaron las similitudes entre problemas de

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a12

física en elementos estructurales, y definieron las clases de problemas construidas a partir de ello (por ejemplo, problemas que implican la tercera ley de Newton, problemas que implican el principio de conservación de la energía etc.). Sin embargo, los principiantes se basaron en elementos superficiales de los problemas (problemas de planos inclinados, problemas de movimiento circular, problemas de poleas etc.). Sanjosé, Solaz-Portolés y Valenzuela, (2009) utilizaron la tarea de agrupación de problemas de física con enunciado para replicar los resultados de Chi, Feltovich y Glaser (1981), encontrando que una gran proporción de estudiantes de Secundaria, únicamente establecía vínculos temáticos entre problemas (problemas de cinemática, de electricidad, de termodinámica etc.). Esto tal vez sea un producto de la enseñanza, ya que los materiales y procedimientos instruccionales en ciencias suelen agrupar los problemas de la misma temática. En cualquier caso, los resultados de Chi, Feltovich y Glaser (1981), muestran que los expertos logran superar este condicionante.

En resumen, si se toman colecciones adecuadas de problemas, la tarea de agrupación a partir de la lectura de sus enunciados puede ser utilizada para evaluar si los resolutores son capaces de categorizar problemas según su estructura, como hacen los expertos, o no pueden ir más allá de sus características superficiales.

5 Objetivos

A partir del propósito general de esta investigación expuesto en la introducción, y de los fundamentos teóricos explicitados, nos planteamos los siguientes objetivos:

1. Estudiar las analogías entre problemas verbales que los estudiantes de secundaria son capaces de percibir en tareas de agrupación de problemas de ciencias con estructura algebraica.
2. Analizar el efecto de diferentes caracteres constitutivos de los problemas, superficie, estructura e incógnita, sobre la codificación y percepción de analogías entre problemas de ciencias.
3. Explorar las causas, es decir, hasta qué punto las dificultades de los estudiantes en el establecimiento de analogías estructurales, son debidos a su nivel de conocimiento y pericia, a la escasa familiaridad con los temas de ciencias, o a una instrucción que presta poca atención a los procesos de codificación y clasificación de problemas.

Los dos primeros objetivos se abordarán en el estudio 1, mientras el objetivo 3 será abordado en el estudio 2 de este trabajo.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a12

6 Método

6.1 *Diseño*

En los dos estudios realizados la tarea propuesta fue la de agrupar colecciones de problemas según el modo en que se resuelven. Se siguió una metodología mixta en dos fases: análisis cuantitativo (descriptivo y contrastes pertinentes) y análisis cualitativo (entrevistas semiestructuradas).

En el estudio 1 las variables consideradas fueron las características de los problemas suministrados, todos ellos de ciencias. En el estudio 2 se consideraron los efectos de una mayor o menor familiaridad de los resolutores con el contexto de los problemas, y también los efectos del nivel académico, ligado al conocimiento previo y la experiencia resolviendo problemas. La Familiaridad (Baja/Alta) fue un factor intra-sujetos, mientras que el Nivel Académico (Secundaria/Máster) fue un factor entre-sujetos. En ambos estudios, la variable objetivo fue el tipo de características en que se basaron los estudiantes para definir conjuntos de problemas que se resolvieran con las mismas ecuaciones.

6.2 Participantes

En el primer estudio participaron 109 estudiantes españoles de ambos sexos, en 9º y 10º grados de Secundaria[1] (14-16 años), de dos centros educativos situados en poblaciones entre 10.000 y 20.000 habitantes. En el segundo estudio participaron 118 estudiantes españoles de ambos sexos. De ellos, 69 pertenecían a 3 grupos intactos, dos de 9º y uno de 10º grado, de dos centros educativos distintos en dos poblaciones de más de 20.000 habitantes. El resto fueron 49 graduados universitarios, futuros profesores de Matemáticas en formación docente inicial[2]. Aunque se trató de una muestra de conveniencia, ésta no presentó ninguna característica diferencial con el resto de sus poblaciones.

6.3 Materiales empleados

[1] En España se corresponden con 3º y 4º de ESO (Educación Secundaria Obligatoria).
[2] La formación docente inicial de los profesores de Secundaria, en España, se realiza a través del Máster Universitario en Profesor de Educación Secundaria. A este máster se accede después de obtener un Grado universitario adecuado a cada especialidad.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a12

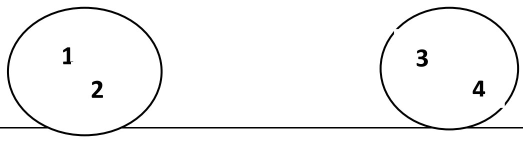
Se diseñaron dos colecciones, cada una de 8 enunciados de problemas algebraicos, cuya resolución implica un sistema de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas en todos los casos. En una colección, las superficies implicaron temáticas científicas consideradas de Baja Familiaridad para los estudiantes. En estos problemas se procuró reducir al mínimo las diferencias entre problemas, escogiendo objetos y eventos de fácil representación mental para los estudiantes (globos que se hinchan o se deshinchan mediante bombas que inyectan o extraen gas o calor), de modo que las diferencias superficiales se concentrasen en las magnitudes implicadas al tratar como fenómenos dichos eventos. Esta colección se utilizó en ambos estudios 1 y 2.

En la otra colección, los enunciados de los problemas incluyeron objetos, eventos y situaciones de la vida diaria, es decir, contextos de Alta Familiaridad (piscinas que se llenan o se vacían) para los estudiantes. Esta colección se utilizó sólo en el estudio 2.

Los 8 problemas de cada colección se configuraron a partir de un diseño factorial 2x2x2 con 3 factores: a) Superficie (temática): mecánica/térmica o piscinas/ahorros); b) Estructura: *encontrar* o *alcanzar*[3]; y c) Incógnita del problema. Otros elementos importantes, como las cantidades dadas como datos, y las variables sintácticas, fueron fijados para minimizar su impacto. Las colecciones de problemas pueden verse en el Anexo.

Se elaboraron dos cuadernillos, uno para Alta y otro para Baja Familiaridad. Cada cuadernillo incluyó, por orden, las instrucciones, un ejemplo de práctica y los 8 enunciados de los problemas para realizar la tarea. Los alumnos debían dibujar diagramas de Venn con los problemas correspondientes en su interior, identificados por su número en el listado suministrado. El ejemplo consistió en un ejercicio sencillo de práctica de la tarea principal. El Cuadro 1 muestra este ejemplo.

Extracto del cuadernillo proporcionado a los estudiantes
EJEMPLO DE PRÁCTICA Imagina que te pedimos agrupar estos 4 problemas según el modo en que se resuelven: 1. Calcular el área de una moneda cuyo radio es 2cm 2. Calcula el perímetro de una moneda cuyo radio es 3cm 3. ¿Cuál será el área de un disco cuyo radio vale 3 cm? 4. Calcula el perímetro de un disco de 2 cm de radio. Podríamos realizar varias agrupaciones diferentes: Esta es una de esas posibilidades → (Fíjate que usamos el número de cada problema para identificarlo dentro del



---

[3] Se consideraron dos estructuras correspondientes a dos ecuaciones que se pueden representar por dos rectas que se cortan, con pendientes del mismo signo o de distinto signo. Desde ahora, denominamos estas estructuras *Alcanzar* y *Encontrar* respectivamente, en reconocimiento a los clásicos problemas de móviles que, bien circulan por la misma ruta y en el mismo sentido y uno alcanza al otro en un punto, o bien se mueven en sentidos opuestos y se encuentran (cruzan) en un punto de la ruta.

conjunto)

	Problemas de Monedas	***Problemas de Discos***
Otra posibilidad es : →	1 3	2 4
	Problemas con: $A = \pi r^2$	***Problemas con: $L = 2\pi r$***
Aún hay más formas de agruparlos**:** →	1 4	3 2
¿Tú cómo lo harías?	***Problemas con dato= 2 cm***	***Problemas con dato= 3 cm***

Cuadro 1 - Ejemplo para practicar la tarea de agrupación de problemas según su modo de resolución

Se controló el conocimiento mínimo necesario para acometer la tarea propuesta, en ambos estudios, mediante una prueba consistente en 5 problemas sencillos, cuya solución exigía plantear un sistema de ecuaciones lineales. El Cuadro 2 muestra uno de ellos.

Extracto de la Prueba de Conocimientos necesarios para abordar la tarea
5 camisas y 3 suéteres cuestan 65 euros en total. El precio total de una camisa y un suéter son 17 euros. ¿Cuánto cuesta un suéter? Las ecuaciones que solucionan correctamente este problema son:
a) 5x + 3y = 65 / x + y = 17   b) x + y = 17 / 5x + 65 = 3y   c) x + y =65 / 5x – 3y = 17

Cuadro 2 - Uno de los ejercicios de la prueba de conocimientos necesarios

Se excluyeron de los análisis los cinco participantes de Secundaria que resolvieron menos de 3 problemas en esta prueba.

6.4 Análisis: posibles analogías entre problemas

El Cuadro 3 muestra los resultados previstos para las agrupaciones en la condición de baja familiaridad si los alumnos utilizan criterios basados en las características constitutivas consideradas de los problemas. Cada criterio conduce a un resultado distinto, por lo que se puede asociar unívocamente un criterio a una agrupación determinada.

criterios simples Estructurales	**criterios compuestos Estructurales**	
A. Según la Estructura	**B. Según Estructura X Rol de la Incógnita**	
Estructura-Alcanzar → {2, 4, 5, 7}	Alcanzar x Rol-x →{1, 8}	Encontrar x Rol-x →{4, 5}
Estructura-Encontrar → {1, 3, 6, 8}	Alcanzar x Rol-y →{3, 6}	Encontrar x Rol-y→ {2, 7}

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a12

criterios simples Superficiales	**criterios compuestos Superficiales**	
C. Según la Temática	**E. Según Temática X Nombre de la Incógnita**	
Contexto Mecánico → {2, 3, 5, 8}	Térmico x Calorías →{1, 4}	Termod. x Litros → {6, 7}
Contexto Termodinámico → {1, 4, 6, 7}	Mecánico x Litros → {2, 3}	Mecánico x Gramos → {5, 8}
D. Según el Nombre de la Incógnita		
Volumen (litros) → {2, 3, 6, 7}		
Masa (gramos) → {5, 8}		
Calor (calorías) → {1, 4}		
Otros criterios simples	**Otros criterios compuestos**	
F. Según el Rol de la Incógnita	**G. Según Estructura X Temática**	
Rol de Incógnita es x → {1, 4, 5, 8}	Alcanzar x Termod. → {4, 7}	Alcanzar x Termod. → {4, 7}
Rol de Incógnita es y → {2, 3, 6, 7}	Alcanzar x Mecánico→ {2, 5}	Alcanzar x Mecánico→ {2, 5}
	H. Otros criterios inidentificables	
	Respuestas incompletas, incoherentes o inidentificables	

Cuadro 3 - Relación entre agrupaciones y criterios vinculados con los distintos factores característicos de los problemas. Ejemplo para Familiaridad Baja.
El número de cada problema corresponde al que tiene asignado en el listado del Anexo

Para validar los materiales, la codificación y el procedimiento, se utilizó un grupo de 7 profesores universitarios, todos ellos expertos matemáticos. Primero, 2 de ellos analizaron los materiales y propusieron algunas modificaciones que afectaron variables sintácticas de los problemas y la forma de la pregunta en algunos de ellos. Una vez atendidas esas sugerencias, otros 5 expertos realizaron la tarea de agrupación. Todos ellos utilizaron como único criterio el de la estructura algebraica de los problemas (criterio A en el Cuadro 3).

6.5 Procedimiento

Para acceder éticamente a los participantes de Secundaria, se obtuvo el permiso de profesores, tutores y padres. La actividad se presentó como una investigación dedicada a mejorar la instrucción en resolución de problemas. En el estudio 1 se usaron 2 sesiones. En la primera se realizó el test de conocimientos mínimos (15 min). A continuación se repartieron los cuadernillos, se leyeron las instrucciones en voz alta, se explicó la tarea de agrupación, y se realizó y discutió el ejemplo de práctica (10 min) junto con los estudiantes. Luego los alumnos realizaron, sin ayuda, la tarea de agrupación y la entregaron en la hoja correspondiente (25 min).

Una segunda sesión se dedicó a entrevistar un conjunto de estudiantes de Secundaria. Estas entrevistas se realizaron 4-5 días después de la tarea de agrupación, de modo individual, y en un espacio del centro educativo con privacidad. Las entrevistas fueron grabadas con permiso para su posterior transcripción y análisis. Se siguió un procedimiento semi-estructurado consistente en: a) Recordatorio de la agrupación de problemas ya realizada y objetivos de la misma; b) Entrega de la agrupación realizada por el sujeto entrevistado; c) Demanda de revisión, confirmación o rectificación, explicación y clarificación de la respuesta final, con especial énfasis en el criterio empleado para construir grupos de problemas que se resuelven con las mismas ecuaciones. No se limitó el tiempo de la entrevista y se procuró la total explicitación de las analogías entre problemas percibidas por cada alumno. En ningún caso se proporcionó la respuesta correcta ni se emitió juicio alguno sobre la ejecución del alumno.

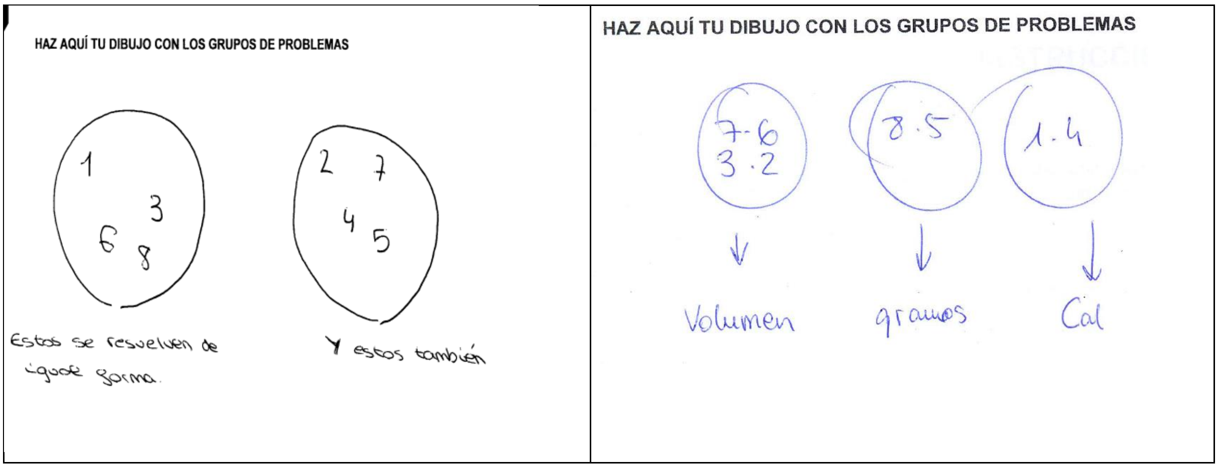
En el estudio 2 fueron necesarias también 2 sesiones, una para agrupar problemas de Baja Familiaridad y otra para agrupar los de Alta Familiaridad. Se siguió idéntico procedimiento que en el estudio 1, aunque en la segunda sesión no se requirió la prueba de conocimientos mínimos ni la realización del ejemplo de práctica, por lo que su duración fue menor en promedio. El orden en que se repartieron los cuadernillos de Familiaridad Baja/Alta se contrabalanceó entre los participantes.

7 Resultados y Discusión

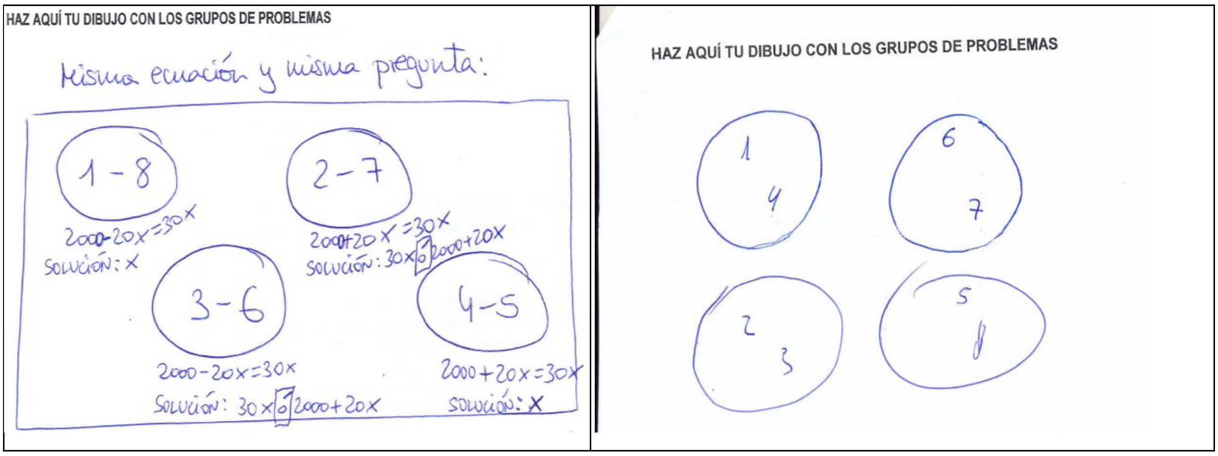
7.1 Estudio 1: Percepción de analogías entre problemas de ciencias por estudiantes de Secundaria

Primero se analizaron las posibles diferencias entre los estudiantes de 3º y 4º de ESO en la tarea. Distintas pruebas □^{2} mostraron que no hubo ninguna asociación significativa entre curso y criterio de agrupación ($p > .40$ en todos los casos). Por ello, se colapsaron ambos cursos en todos los análisis posteriores.

El Cuadro 4 muestra ejemplos de producciones de estos estudiantes.



ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a12



Cuadro 4 - Ejemplos de agrupaciones elaboradas por los participantes

La Figura 1 muestra el porcentaje de estudiantes de Secundaria que usaron los criterios del Cuadro 3 en la tarea de agrupación.

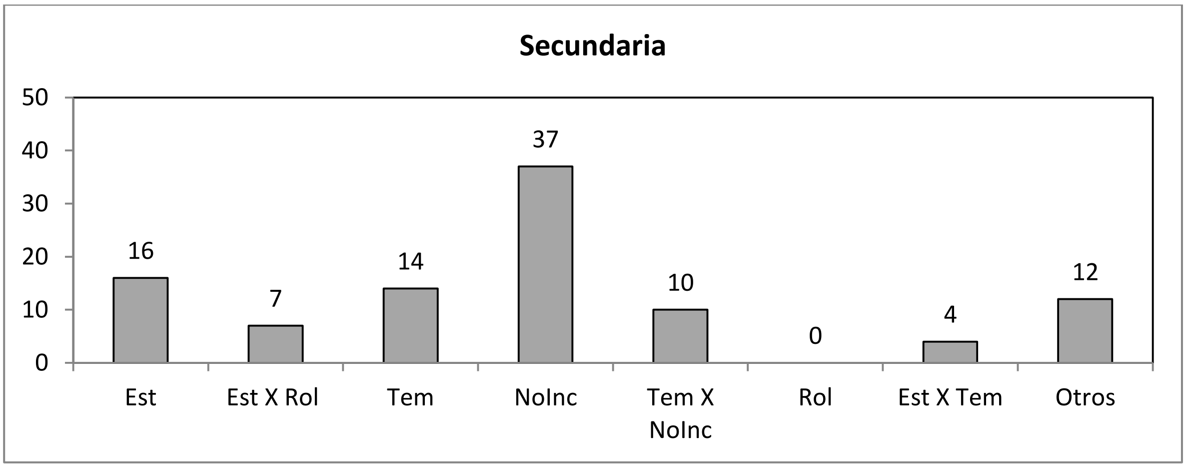


Figura 1 - Porcentaje de estudiantes de secundaria participantes que utilizaron diferentes criterios para agrupar problemas. *Est* alude a *estructura*, *Rol* al rol, *x* o *y* de la incógnita en las ecuaciones, *Tem* abrevia la palabra *temática*, y *NoInc* significa *nombre de la incógnita*

El diseño de la colección de problemas permitió, en un porcentaje elevado de casos, asociar unívocamente el uso de los criterios predichos (Cuadro 3), con las producciones de los estudiantes. El criterio basado sólo en el rol de la incógnita del problema no fue utilizado por ningún estudiante de Secundaria. Sin embargo, el criterio basado solamente en el nombre de la incógnita, claramente superficial, fue usado por el 37% de estos participantes. El criterio basado en la temática científica de los problemas, también superficial, fue usado por un grupo significativo de estudiantes, el 14%. En resumen, un porcentaje del 61% de estos estudiantes de secundaria guio sus agrupaciones por criterios basados únicamente en características superficiales de los problemas (criterios C, D y E del Cuadro 3). Tan sólo el 27% usaron criterios que implicaron la estructura de los problemas (criterios A, B y G en Cuadro 4), entre los cuales el 16% utilizó el criterio A, basado sólo en la Estructura, tal como hicieron los expertos. Un 12% de estudiantes usaron criterios indescifrables, incoherentes, mal definidos,

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a12

incompletos y difícilmente asimilables a los factores característicos de los problemas. Fueron asignados a la categoría *Otros criterios inidentificables* (H en Cuadro 3).

Para aumentar la fiabilidad de nuestra interpretación sobre los criterios utilizados por los estudiantes, se realizaron entrevistas semi-estructuradas a un subconjunto de 40 estudiantes representativos de distintos modos de agrupación. El Cuadro 5 muestra fragmentos de entrevistas realizadas a dos de ellos como ejemplo. Algunos estudiantes propusieron varias alternativas en sus agrupaciones. Entonces la entrevista sirvió para explicar de nuevo la tarea y pedirles que escogieran aquella que les parecía la apropiada. En todos los casos se alentó a los estudiantes a re-pensar su agrupación y se esperó a que estabilizaran su criterio. La Figura 1, anterior, recoge los resultados obtenidos después de las entrevistas.

Segmentos de información de entrevistas
Caso #3. I: Hola, Buenos días. [*El entrevistador entrega la agrupación*]. ¿Podrías intentar recordar tu respuesta? S: Si… [*El estudiante repasa el cuadernillo*] I: Voy a intentar ayudarte a recordar. La tarea os pedía que agruparais los problemas en función de si se resolvían del mismo modo, es decir, con idénticas ecuaciones. ¿Puedes volver a pensar en ello y explicármelo para que yo comprenda bien? S: Si no he entendido mal, ¿te he de decir qué problemas se resuelven con las mismas ecuaciones? I: ¡Exactamente! S: Bien! … [*El sujeto relee de nuevo sus respuestas*….] Ya lo tengo claro: los problemas que preguntan por *gramos* tendrán las mismas ecuaciones y así igual con las *calorías* y el *volumen*. (…)
Caso #6. I: Hola, ¿qué tal? [*El entrevistador entrega la agrupación y solicita aclaración*]. No he entendido bien tu respuesta. Primero indicas que hay unos problemas de cm^3/g y otros problemas de cm^3/cal [*criterio basado en la temática*]. Luego expresas que hay unos problemas donde dos globos aumentan de volumen y otros problemas donde un globo aumenta y el otro disminuye [*que tiene que ver con la estructura*]. Finalmente realizas la agrupación en función de si la pregunta se refería a los *gramos*, a las *calorías* o al *volumen* [*nombre de la incógnita*]. ¿Recuerdas? S: Si, lo recuerdo bien I: Veo que has reconocido varias características que diferencian los problemas, pero lo que yo necesito saber es cuál crees que hace que los problemas de un mismo grupo se resuelvan igual, con las mismas ecuaciones. S: Entonces, ¿he de elegir sólo un criterio? I: ¡Sí, exacto! Te dejo un tiempo para que vuelvas a pensar en la tarea y recuerda que lo que pretendo es que los agrupes en función de si se resuelven exactamente con las mismas ecuaciones. S:[*El estudiante repasa sus respuestas*] Yo creo que lo importante para que sean las mismas ecuaciones es que los dos globos aumenten o que uno aumente y el otro disminuya…[*se decide finalmente por el criterio estructural*]

Cuadro 5 - Ejemplos de entrevistas realizadas tras la tarea de agrupación para clarificar su codificación y las analogías encontradas entre problemas

El porcentaje elevado de estudiantes que fueron incapaces de establecer analogías estructurales entre problemas de ciencias permite aventurar dificultades cuando tengan que resolver nuevos problemas por transferencia. Aunque la ejecución de la resolución puede modificar el plan inicial, la activación de análogos inapropiados (que comparten características superficiales, pero no estructurales con el problema propuesto) supone un obstáculo a salvar para el éxito en la resolución.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a12

Los resultados obtenidos en el estudio 1 no son tan buenos como los profesores desearían, e invitan a formular conjeturas o hipótesis para explicarlos. Una primera conjetura es, naturalmente, que los rasgos superficiales, explícitos y de naturaleza ontológica concreta, son mucho más fáciles de reconocer que los abstractos, implícitos, como ya señalaron Reeves y Weisberg (1994). En otros estudios se encontró apoyo empírico a esta afirmación (GÓMEZ-FERRAGUD; SOLAZ-PORTOLÉS; SANJOSÉ, 2013). Un conocimiento previo elevado y una cierta experiencia resolviendo problemas podrían ser necesarios para salvar el *efecto de apantallamiento* que los rasgos superficiales de los problemas producen sobre los estructurales (CHI; FELTOVICH; GLASER, 1981).

Otra posibilidad para explicar los resultados se asociaría con la dificultad en construir una representación mental adecuada de la situación descrita en el enunciado cuando los contextos son poco familiares para el resolutor, como es el caso de muchos problemas de ciencias. Comprender el enunciado de un problema implica la construcción de representaciones mentales con distinto grado de abstracción (KINTSCH, 1998; GREENO, 1989). Disponer de poco conocimiento previo sobre la situación descrita en el enunciado puede dificultar la representación concreta (no abstracta) de la situación y, con ello, obstaculizar la representación matemática del problema.

Finalmente, no se puede excluir la posibilidad de que la instrucción recibida por los estudiantes no atienda suficientemente a las analogías y diferencias, superficiales y estructurales, entre problemas. Los materiales instruccionales en ciencias suelen estar secuenciados según las temáticas, mientras que en matemáticas suelen estar secuenciados por las estructuras subyacentes. Además, las historias de los problemas de matemáticas suelen pertenecer a la vida diaria, y son de gran familiaridad para los estudiantes. En todo caso, muchos profesores suponen que las analogías estructurales entre problemas son fácilmente percibidas por sus estudiantes, cuando no es así (OLIVA, 2004), pero esto puede significar que no trabajen suficientemente con sus alumnos las tres fases que preceden a la ejecución de una resolución: codificación del problema, activación de análogos-fuente y *mapping*.

El estudio 2, que sigue, intentó realizar una primera contrastación de estas hipótesis, para explorar su verosimilitud.

7.2 Estudio 2: efectos de la Familiaridad y del Nivel educativo sobre las dificultades para construir analogías entre problemas

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a12

Como se dijo antes, en el estudio 2 participaron alumnos de Secundaria (ninguno de ellos participó en el estudio 1), y también graduados universitarios en formación docente inicial, especialidad de Matemáticas (alumnos de Máster). Se utilizaron dos colecciones de problemas, una con contextos temáticos de Baja Familiaridad (los mismos del estudio 1) y otra con contextos de Alta Familiaridad para los estudiantes (ver Anexo). La tarea y los análisis (las descripciones estadísticas y las entrevistas) fueron idénticos a los del estudio 1. Un subconjunto de 15 estudiantes de ambos niveles educativos fue entrevistado sobre cada una de las agrupaciones realizadas en ambos niveles de Familiaridad. El Cuadro 6 muestra fragmentos de entrevistas realizadas a dos estudiantes del Máster sobre la tarea en Baja Familiaridad.

Segmentos de información de entrevistas
Caso #4. I: Hola, Buenos días. [*El entrevistador entrega la agrupación*]. ¿Recuerdas como clasificaste los problemas? S: … [*El estudiante repasa su agrupación*] I: Recuerda que la tarea pedía agrupar los problemas en función de si estos se resuelven con idénticas ecuaciones o no… S: Yo me fijé en cómo se resolvía el problema, en que el problema se resolviera igual independientemente de si el problema me preguntaba por *volúmenes* o por *gramos*… Lo hice así: [*El sujeto utiliza el criterio de agrupación basado en la Estructura X el Rol de la incógnita; B en el Cuadro 4*]. I: Muy bien, muchas gracias.
Caso #11. I: Hola, ¿qué tal? [*El entrevistador entrega la agrupación*]. Me gustaría que recordaras la tarea que hiciste. S: Claro, aunque creo recordarla bastante bien…[*El estudiante repasa su agrupación*]… Si, ya lo recuerdo… Agrupé los problemas según preguntaban por *volumen*, por calorías o por la cantidad de *gramos*…... I: Y, ahora que puedes volver a pensarlo, ¿sigues pensando lo mismo? S: [*El estudiante repasa la tarea*]…. quizá con el *volumen* se pueda calcular la cantidad de *calorías* pero yo en aquel momento no recordaba cómo se calculaba un *volumen*... [*El estudiante piensa*]….Al final aquí lo que es importante es que pregunta por el *volumen* [*El estudiante insiste en el criterio Superficial basado en el nombre de la Incógnita*]

Cuadro 6 - Ejemplos de entrevistas realizadas a los estudiantes del Máster tras la tarea de agrupación para clarificar las analogías que establecieron entre los problemas de Baja Familiaridad

La Figura 2 muestra, y permite comparar, los porcentajes de estudiantes de Secundaria y de Máster cuyas agrupaciones en Baja y Alta Familiaridad, pueden asociarse con cada uno de los criterios expuestos en el Cuadro 3.

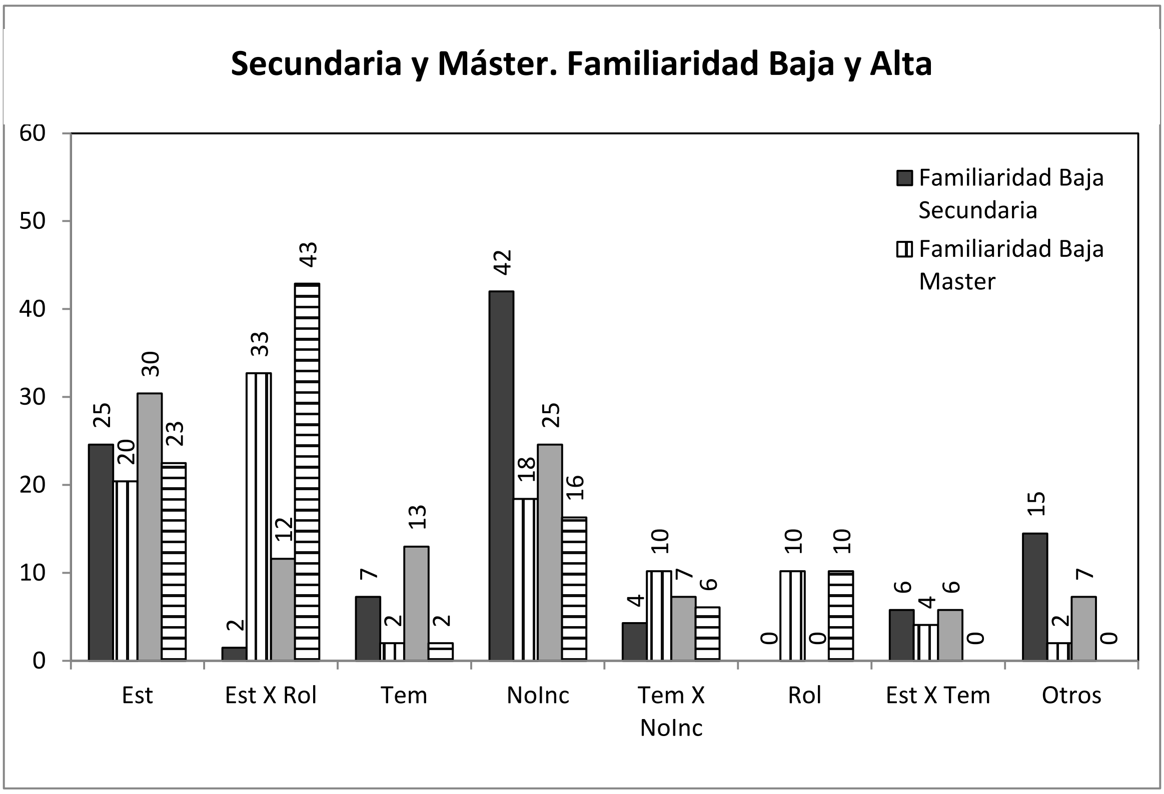


Figura 2 - Porcentaje de participantes que utilizaron cada uno de los criterios para agrupar problemas. *Est* alude a *estructura*, *Rol* al rol, x o y de la incógnita, *Tem* abrevia la palabra *temática* y *NoInc* significa *nombre de la incógnita*

Los porcentajes de alumnos de Máster que usaron el *criterio experto* (criterio A en Cuadro 3) no son muy diferentes de los de Secundaria, tanto en Baja como en Alta Familiaridad, e incluso son menores. Sin embargo, más estudiantes del Máster usaron el criterio Rol X Est, (criterio B en Cuadro 3), que no es el elegido por los expertos, pero que puede considerarse correcto. En efecto, este criterio puede suponer una aplicación más estricta del significado se resuelven igual al incluir no sólo las ecuaciones, sino también el modo en que éstas se resuelven para obtener el valor de la incógnita (despejando la variable *x* o la *y*). Si se colapsan estos dos criterios considerados correctos de acuerdo con la tarea propuesta, encontramos el resultado mostrado en la Tabla 1:

Tabla 1 - Porcentaje de alumnos en cada nivel educativo que utilizaron un criterio estructural correcto para agrupar problemas de baja y alta Familiaridad

% alumnos	Secundaria	Máster
Baja Fam	26,1	53,1
Alta Fam	42,0	65,4

Como muestra la Tabla 1, en Familiaridad Alta los porcentajes de estudiantes que son capaces de establecer analogías estructurales correctas entre problemas son significativamente mayores que en Familiaridad Baja (McNemar[4]: $X^2(1)$= 6,919; p= ,009). También el nivel académico es importante y se asocia significativamente con un criterio correcto, tanto en Familiaridad Baja ($X^2(1)$= 7,799 con corrección de Yates; p= ,005), como en Alta ($X^2(1)$= 5,320 con corrección de Yates; p= ,021).

También analizamos el uso de criterios de clasificación basados solamente en rasgos superficiales, como la temática, o el nombre de la magnitud incógnita, o su combinación (criterios C, D y E en Tabla 3). La Tabla 2 recoge los porcentajes de alumnos de cada nivel que usaron este tipo de criterios en ambas Familiaridades.

Tabla 2 - Porcentaje de alumnos en cada nivel educativo que utilizaron un criterio superficial incorrecto para agrupar problemas de baja y alta Familiaridad

% alumnos	**Secundaria**	**Máster**
Baja Fam	53,6	30,6
Alta Fam	44,9	24,4

Hubo significativamente más estudiantes que utilizaron un criterio basado en rasgos superficiales en Familiaridad Baja, que en Alta (McNemar: X^2= 6,323; p= ,012). El nivel educativo también tuvo influencia, ya que un porcentaje significativamente menor de alumnos de Máster que de Secundaria, usaron criterios superficiales en ambos niveles de Familiaridad, Baja ($X^2(1)$= 13,090 con corrección de Yates; p< ,001), o Alta ($X^2(1)$= 7,989 con corrección de Yates; p= ,005).

Los resultados del estudio 2 permiten substanciar algunas de las hipótesis formuladas tras el estudio 1. El mejor desempeño en la tarea de los estudiantes de mayor conocimiento previo, en ambos niveles de Familiaridad (problemas con temáticas de la vida diaria o científicas), indica que establecer analogías estructurales entre problemas, más allá de los rasgos superficiales explícitos en sus enunciados, resulta una tarea de especial dificultad para los estudiantes menos expertos. De nuevo se encuentra, empíricamente, que el grado de experiencia es importante para poder salvar el *apantallamiento* que los rasgos superficiales producen sobre los rasgos estructurales en resolución de problemas (REEVES; WEISBERG, 1994). Sin embargo, los porcentajes de estudiantes de Máster (entre 35% y 45%) que no fueron capaces de establecer analogías estructurales, o que utilizaron criterios superficiales en este estudio 2 (entre 25% y 30%) son inquietantes, especialmente al tratarse de futuros profesores de matemáticas en Secundaria. Estrictamente hablando, sólo entre el 20% y el 23% utilizaron un *criterio experto*, basado sólo en la estructura algebraica de los problemas para

[4] A partir de una tabla 2x2 (Fam Alta/Baja) X (Analogía correcta/ incorrecta), esta prueba contrasta la hipótesis nula de *no-diferencias* entre ambos niveles de familiaridad, que es un factor intra-sujeto. Los niveles educativos fueron colapsados para este cálculo.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a12

codificarlos y clasificarlos. Estos bajos porcentajes suscitan la duda de si estos futuros profesores serán capaces de instruir a sus estudiantes de una forma eficaz en resolución de problemas verbales.

Se encontraron diferencias significativas debidas al nivel de Familiaridad en ambos niveles académicos. Esto apoya la hipótesis de que cuando los resolutores tienen más dificultad en construir una representación mental concreta, como en el caso de los problemas de ciencias comparado con los problemas de la vida diaria, se obstaculiza alcanzar la representación matemática. En la Figura 2, las diferencias entre Alta y Baja Familiaridad en el uso de criterios correctos, fueron especialmente visibles entre los estudiantes de Secundaria. Eso sugiere que el *apantallamiento* de los rasgos abstractos por parte de los concretos les afecta más que a los alumnos con mayor conocimiento y experiencia. Sin embargo, vuelve a ser preocupante que los alumnos de Máster, supuestos expertos y futuros profesores, sean tan sensibles a la Familiaridad, que en este estudio tuvo carácter superficial.

8 Conclusiones

Aunque las muestras de conveniencia utilizadas en los dos estudios expuestos no permiten generalizar o concluir de modo general, podemos subrayar algunos aspectos que merecen especial atención desde la didáctica de las matemáticas. En primer lugar, el establecimiento de analogías durante el aprendizaje parece más complejo y dificultoso de lo que los profesores esperan, como otros investigadores han señalado (OLIVA, 2004). Por ello, las fases previas a la resolución de un problema por transferencia analógica deberían recibir más atención durante la instrucción. Estas fases implican: a) el reconocimiento de características constitutivas del problema propuesto; b) su clasificación dentro de una clase de problemas, y c) la activación, bien de un esquema resolutivo de cierta generalidad, previamente elaborado (relacionado con el *transfer vertical* de Rebello et al. (2007) o bien de un análogo previamente aprendido y almacenado en la memoria del resolutor (relacionado con un *transfer horizontal* (REBELLO et al., 2007). Que un alumno atienda a rasgos superficiales o estructurales para activar un análogo (o un esquema abstracto), es un aspecto muy importante para el éxito o fracaso en la resolución de problemas. Los resultados encontrados en los estudios 1 y 2 aconsejan a los profesores abordar explícitamente las analogías y diferencias entre problemas atendiendo no sólo a sus estructuras matemáticas, sino también a sus temáticas y las magnitudes implicadas, para diferenciarlas claramente de las relaciones entre cantidades, que es el foco importante de atención. Atravesar las barreras

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a12

entre temas en las clases de ciencias, o incluir contextos científicos en las clases de matemáticas, parece conveniente para ayudar a los estudiantes menos expertos a ir más allá de los rasgos superficiales y crear vínculos más profundos entre problemas.

Finalmente, las propuestas recientes en formación inicial de los futuros profesores de matemáticas, que ayudan a promover el conocimiento necesario para una mejor enseñanza en resolución de problemas (RIVAS; GODINO; CASTRO, 2012), deberían considerarse con urgencia. El rendimiento de nuestros participantes en particular, aunque fue mejor que el de los estudiantes de Secundaria, no es el esperado en quienes podrían estar instruyendo a otros estudiantes inexpertos, en poco tiempo.

Agradecimientos: Los autores agradecen al profesor Bernardo Gómez sus comentarios y sugerencias que han ayudado a mejorar este trabajo.

Referencias

BELL, A.; SWAN, M.; TAYLOR, G. Choice of operation in verbal problems with decimal numbers. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 12, n. 4, p. 399-420, Nov. 1981.

BERNARDO, A.B.I. Analogical problem construction and transfer in mathematical problem solving. **Educational Psychology**, London, v. 21, n. 2, p. 137-150, Dec. 2001.

BIRGIN, O. Investigation of Eighth-Grade Students' Understanding of the Slope of the Linear Function**. Bolema**, Rio Claro, v. 26, n. 42, p. 139-162, Abr. 2012.

CARPENTER, T.; HIEBERT, J.; MOSER, J. Problem structure and first grade children's initial solution processes for simple addition and subtraction problems. **Journal for Research in Mathematics Education**, Normal, v. 12, n. 1, p. 27-39, Jan. 1981.

CASTRO, E.; RICO, L.; BATANERO, C.; CASTRO, E., Dificultad en problemas de comparación multiplicativa. En: PME CONFERENCE, 15th., 1991, Assisi, Italy. **Proceedings…**Assisi, Italy: PME, 2001, p.192-198.

CERDÁN, F. Estudios sobre la familia de problemas aritmético-algebraicos**.** 2008, 736f. Tesis (Doctorado en Didáctica de la Matemática)-Facultad de Magisterio, Universitat de Valencia: Servicio **de Publicaciones de la Universitat de València**, 2008.

CHEN, Z.; KLAHR, D. Bridging the gap: Remote transfer of problem-solving and scientific reasoning strategies in children. In R. Kail (Ed.), **Advances in child development and behavior**, Burlington, MA: Academic Press. p. 419-470, 2008

CHI, M.T.H.; FELTOVICH, P.J.; GLASER, R. Categorization and representation of physics problems by experts and novices. **Cognitive Science**, Malden, v. 5, n. 2, p. 121-152, Apr, 1981.

CHI, M.T.H.;GLASER, R.; REES, E. Expertise in problema solving**.** In: STERBERGN R. J. (Ed.). **Advances in the psychology of human intelligence**. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1982. P. 07-75.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a12

GENTNER, D. Structure-mapping. A theoretical framework for analogy**. Cognitive Science**, Malden, v. 7, n.2, p. 155-170, Apr./Jun. 1983.

GICK, M.L.; HOLYOAK, K.J. Analogical problem-solving. **Cognitive Psychology**, Acess in: 09-06-2013, v. 15, n. 3, p. 306-355, Jul. 1980. Disponible en: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0010028580900134> Acess in: 09 jun. 2013.

GICK, M. L.; HOLYOAK, K. J.Schema induction and analogical transfer. **Cognitive Psychology**, Amsterdam, v. 15**,** n.1, p. 1-38, Jan. 1983.

GOLDSTONE, R. L.; SAKAMOTO, Y. The Transfer of Abstract Principles Governing Complex Adaptive Systems. **Cognitive Psychology**, Amsterdam. v. 46, n. 4, p. 414-466, Jun. 2003.

GÓMEZ-FERRAGUD, C.B.; SOLAZ-PORTOLÉS, J.J.; SANJOSÉ, V. Una revisión de los procesos de transferencia para el aprendizaje y enseñanza de las ciencias. **Didáctica de las ciencias experimentales y sociales**. Valencia. v.1, n. 26, p. 199-227, Dec. 2012.

GÓMEZ-FERRAGUD, C.B.; SOLAZ-PORTOLÉS, J.J.; SANJOSÉ, V. Analogy Construction and Success in Mathematics and Science Problem-Solving: a Study with Secondary Students. **Revista de Psicodidáctica**, Bilbao, v. 18, n. 1, p. 81-108, Jan. 2013.

GREENO, J.G. Situations, Mental Models, and Generative Knowledge, In: D. KLAHR Y K. KOTOVSKY (Ed.). **Complex Information Processing**: The Impact of Herbert Simon, Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1989, p. 285-318.

HIEBERT, H. The position of the unknown set and children's solutions of verbalproblems, **Journal for Research in Mathematics Education,** Normal, v. 13, n. 5, p. 341-349, Jan./Apr. 1982.

HOLYOAK, K.J. Analogical thinking and human intelligence. In: R.J. Sternberg (ed.). **Advances in the psychology of human intelligence**. Vol. 2. Hilsdale, NJ: Erlbaum, 1984. P. 199-230.

HUMMEL , J. E.; HOLYOAK , K. J. Distributed representations of structure: A theory of analogical access and mapping. **Psychological Review,** Washington, v. 104, n. 3, p. 427-466, Jan./Jun. 1997. Disponible en: http://courses.media.mit.edu/2004spring/mas966/hummel_and_holyoak%201997.pdf. Acess in: 08 mar. 2012.

JONASSEN, D.H. Using cognitive tools to represent problems. **Journal of Research on Technology in Education**, Eugene, v. 35, n. 3, p. 362-381, Jan./Jul. 2003.

KINTSCH, W.; GREENO. J. Understanding and solving word arithmetic problems. **Psychological Review,** Princeton, v. 92, n. 1, p.109-129, Jan./Mar. 1985.

KINTSCH, W. **Comprehension**: a paradigm for cognition. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1998.

LOEWENSTEIN, J.; THOMPSON, L.; GENTNER, D. Analogical encoding facilitates knowledge transfer in negotiation. **Psychonomic Bulletin and Review**, Irvine, v. 6, n. 4 p. 586-597. Dec.1999.

NATHAN, M.; KINTSCH, W.; YOUNG, E. A Theory of Algebra-Word- Problem Comprehension and Its Implications for the Design of Learning Environments. **Cognition and Instruction**, New York, v. 9, n. 4, p.329-389, Sep./Nov. 1992.

NEWELL, A.; SIMON, H.A: Human Problem Solving. **Englewood Cliffs,** NJ: Prentice-Hall, 1972.

NOVICK, L. Analogical transfer, problem similarity, and expertise. **Journal of Experimental Psychology:** Learning, Memory and Cognition, Washington, vol. 14, n. 3 p. 510-520, Jul. 1988.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a12

Disponible en: <http://psycnet.apa.org/index.cfm?fa=search.displayRecord&uid=1988-31644-001 > Acess in: 03 abr 2011.

OLIVA, J. M. El pensamiento analógico desde la investigación educativa y desde la perspectiva del profesor de ciencias. **Revista electrónica de Enseñanza de las Ciencias,** Barcelona, v. 3, n. 3, p.363-384, Mar. 2004.

POLYA, M. **How to solve it.** 2nd .Ed. New York: Doubleday, 1957.

PUIG, L.; CERDÁN, F. **Problemas aritméticos escolares.** Madrid: Síntesis, (edición conmemorativa 20º aniversario), 1988.

PUIG, L. **Poner un problema en ecuaciones**, 1998. Disponible en: <http://www.uv.es/puigl/ppe.pdf>. Acess in: 11 jun. 2013.

QUEIROZ, S.; LINS, M. A aprendizagem de matemática por alunos adolescentes na modalidade educação de jovens e adultos: analizando as dificultades na resolução de problemas de estrutura aditiva**. Bolema**, Rio Claro, v. 24, n. 38, p. 75-96, Apr. 2011 .

REBELLO, N. S.; CUI, L.; BENNET, A. G.; ZOLLMAN, D. A.; OZIMEK, D. J. Transfer of learning in problem solving in the context of mathematics and physics. En: D. Jonassen (Ed**.). Learning to solve complex scientific problems**. Hillsdale, N. J.: Lawrence Earlbaum, 2007. P. 217-250.

REED, S. K., DEMPSTER, A.; ETTINGER, M. Usefulness of analogous solutions for solving algebra word problems. **Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, & Cognition**, Washington, v. 11, n. 1, p. 106-125, Feb. 1985.

REEVES, L. M.; WEISBERG, R. W. The role of content and abstract information in analogical transfer. **Psychological Bulletin**, Champaign , v. 115, n. 3, p. 381-400, 1994. Disponible en: doi: 10.1037//0033-2909.115.3.381

RIVAS, M. A.; GODINO, J.D.; CASTRO, W. F. Desarrollo del Conocimiento para la Enseñanza de la Proporcionalidad en Futuros Profesores de Primaria. **Bolema,** Rio Claro (SP), v. 26, n. 42B, p. 559-588, Apr. 2012.

SALOMON, G.; PERKINS, D. N. Transfer of cognitive skills from programming: When and how? **Journal of Educational Computing Research**, New York, v. 3, n. 2, p.149-169, Apr./Jun. 1987.

SANJOSÉ, V.; SOLAZ-PORTOLÉS, J. J.; VALENZUELA, T. Transferencia inter-dominios en resolución de problemas: una propuesta instruccional basada en el proceso de “traducción algebraica”. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 27, n. 2, p. 169-184, Marzo. 2009. Disponible en:< http://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/download/132235/332866> Acess in: 10 mar 2013.

THORNDIKE, E.L.; WOODWORTH, R.S. The influence of improvement in one mental function upon the efficiency of other functions. **Psychological Review**, Washington, v. 8, n. 3, p. 90-127, May. 1901.

VALENTIN, J.D.; L. CHAP-SAM. Roles of semantic structure of arithmetic word problems on pupils’ ability to identify the correct operation. **International Journal for Mathematics Teaching and Learning (electronic journal)**, May. 2005. Disponible en:<http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/; (Valentin.pdf) > Acess en: 13 jun. 2013.

VANLEHN, K. Analogy Events: How Examples are Used During Problem Solving. **Cognitive Science**, Malden, v. 22, n. 3, p347-388, Apr. 1998.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a12

VERGNAUD, G. A. classification of Cognitive Tasks and Operations of thought Involved in Addition and Subtractions Problems. In: CARPENTER, T., MOSER, J.; ROMBERG, **T. Addition and Subtraction:** a cognitive perspective. New Jersey: Ed. Lawrence Erlbaun Hillsdale, USA, 1982. p. 39-59.

Submetido em Setembro de 2013.
Aprovado em Dezembro de 2013.

8. ANEXO: Problemas de Baja y Alta Familiaridad utilizados

Baja Familiaridad

1. **Enunciado**: Consideremos dos globos de diferente tamaño A y B. Inicialmente el globo A tiene un volumen de 2000 cm^3 y el globo B está vacío. Entonces se conectan a la vez dos bombas térmicas idénticas, una que extrae calor de A y lo introduce en un acumulador y otra que extrae calor del acumulador y lo introduce en B. El globo A va disminuyendo su volumen a razón de 20 cm^3/cal y el globo B va aumentando su volumen a razón de 30 cm^3/cal.
Pregunta: ¿Cuántas calorías se habrán transferido de A a B, cuando sus volúmenes sean iguales?

2. **Enunciado**: Consideremos dos globos de diferente tamaño A y B. Inicialmente el globo A tiene un volumen de 2000 cm^3 y el globo B está vacío. Entonces se conectan a la vez dos bombas neumáticas idénticas, que extraen gas de un depósito y se lo introducen a cada globo. El globo A va aumentando su volumen a razón de 20 cm^3/g de gas y el globo B va aumentando su volumen a razón de 30 cm^3/g de gas.
Pregunta: ¿Qué volumen habrá en A y en B cuando sus volúmenes sean iguales?

3. **Enunciado**: Consideremos dos globos de diferente tamaño A y B. Inicialmente el globo A tiene un volumen de 2000 cm^3 y el globo B está vacío. Entonces se conectan a la vez dos bombas neumáticas idénticas, una que extrae gas de A y lo introduce en un depósito y otra que extrae gas del

5. **Enunciado:** Consideremos dos globos de diferente tamaño A y B. Inicialmente el globo A tiene un volumen de 2000 cm^3 y el globo B está vacío. Entonces se conectan a la vez dos bombas neumáticas idénticas, que extraen gas de un depósito y se lo introducen a cada globo. El globo A va aumentando su volumen a razón de 20 cm^3/g de gas y el globo B va aumentando su volumen a razón de 30 cm^3/g de gas.
Pregunta: ¿Cuantos gramos se habrán transferido a A y a B cuando sus volúmenes sean iguales?

6. **Enunciado**: Consideremos dos globos de diferente tamaño A y B. Inicialmente el globo A tiene un volumen de 2000 cm^3 y el globo B está vacío. Entonces se conectan a la vez dos bombas térmicas idénticas, una que extrae calor de A y lo introduce en un acumulador, y otra que extrae calor del acumulador y lo introduce en B. El globo A va disminuyendo su volumen a razón de 20 cm^3/cal y el globo B va aumentando su volumen a razón de 30 cm^3/cal.
Pregunta: ¿Qué volumen habrá en A y en B cuando sus volúmenes sean iguales?

7. **Enunciado:** Consideremos dos globos de diferente tamaño A y B. Inicialmente el globo A tiene un volumen de 2000 cm^3 y el globo B está vacío. Entonces se conectan a la vez dos bombas térmicas idénticas, que extraen calor de un acumulador y se lo introducen en cada globo. El globo A va

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a12

depósito y lo introduce en B. El globo A va disminuyendo su volumen a razón de 20 cm^3/g de gas, y el globo B va aumentando su volumen a razón de 30 cm^3/g de gas.
Pregunta: ¿Qué volumen habrá en A y en B cuando sus volúmenes sean iguales

4. **Enunciado:** Consideremos dos globos de diferente tamaño A y B. Inicialmente el globo A tiene un volumen de 2000 cm^3 y el globo B está vacío. Entonces se conectan a la vez dos bombas térmicas idénticas, que extraen calor de un acumulador y se lo introducen en cada globo. El globo A va aumentando su volumen a razón de 20 cm^3/cal y el globo B va aumentando su volumen a razón de 30 cm^3/cal.
Pregunta: ¿Cuántas calorías se habrán transferido a A y a B cuando sus volúmenes sean iguales?

aumentando su volumen a razón de 20 cm^3/cal y el globo B va aumentando su volumen a razón de 30 cm^3/cal.
Pregunta: ¿Qué volumen habrá en A y en B cuando sus volúmenes sean iguales?

8. **Enunciado:** Consideremos dos globos de diferente tamaño A y B. Inicialmente el globo A tiene un volumen de 2000 cm^3 y el globo B está vacío Entonces se conectan dos bombas neumáticas idénticas, una que extrae gas de A y lo introduce en un depósito, y otra que extrae gas del depósito y lo inyecta en B. El globo A va disminuyendo su volumen a razón de 20 cm^3/g de gas, y el globo B va aumentando su volumen a razón de 30 cm^3/g de gas.
Pregunta: ¿Cuantos gramos se habrán transferido de A a B, cuando sus volúmenes sean iguales?

Los problemas de Alta Familiaridad se diseñaron sobre las mismas estructuras que los de Baja Familiaridad, pero con temáticas de la vida diaria: llenado/vaciado de piscinas con el tiempo, y aumento/disminución de dinero en cuentas de ahorro con el tiempo. Por ejemplo, el problema 1 de esa colección sería el siguiente:

Alta Familiaridad
1. Enunciado: Consideremos dos piscinas de diferente tamaño A y B. Inicialmente la piscina A tiene un volumen de 2000 litros y la piscina B está vacía. Entonces se conectan a la vez dos bombas hidráulicas idénticas, una que extrae agua de A y la introduce en un depósito, y otra que extrae agua del depósito y la introduce en B. La piscina A se vacía a razón de 20 litros/día y la piscina B se llena a razón de 30 litros/día.   **Pregunta:** ¿Cuánto tiempo habrá pasado cuando las dos piscinas tengan la misma cantidad de agua?

El resto puede deducirse fácilmente.