

Aspectos Epistemológicos, Históricos y Didácticos del Conocimiento Profesional del Profesorado Universitario de Probabilidad

Epistemological, Historical, and Didactic Aspects of University Teaching Faculty Professional Knowledge of Probability

José I. Barragués*

Adolfo Morais**

Jenaro Guisasola***

Resumen

La investigación Educativa ha señalado la necesidad de una mayor investigación acerca de los componentes del conocimiento del profesorado, que deben ir más allá del mero conocimiento del contenido matemático. El denominado Conocimiento Profesional del Profesorado incorporaría aspectos relacionados con la propia enseñanza de la disciplina, las perspectivas de los profesores, la historia, las dificultades de los estudiantes etc. Este trabajo aborda los siguientes temas de investigación: Conocimiento Profesional del profesorado sobre Probabilidad, Epistemología e Historia de la Teoría de la Probabilidad y Didáctica de la Teoría de la Probabilidad. Se aborda en primer lugar el problema de identificar los componentes de este Conocimiento Profesional que serán de utilidad al profesorado universitario de Teoría de la Probabilidad para el diseño de secuencias de enseñanza-aprendizaje; y, en segundo lugar, se estudia en qué medida tales componentes son tenidos en cuenta en la enseñanza universitaria. Se ha realizado un análisis fenomenológico de la Teoría de la Probabilidad, incluyendo la fenomenología histórica, y se han estudiado, mediante un cuestionario escrito y entrevistas personales, las propuestas de enseñanza de un grupo de profesores universitarios de estudios de Ingeniería. El análisis ha identificado los siguientes aspectos que deben formar parte del Conocimiento Profesional: el planteamiento de situaciones problemáticas para la introducción de los conceptos; la discusión de las diferentes formulaciones conceptuales de la Probabilidad y sus problemáticas históricas; las implicaciones entre la Ciencia, la Técnica y la Sociedad destinadas a mejorar el interés de los estudiantes; y la toma en consideración de las concepciones alternativas de los estudiantes. El estudio de las propuestas de enseñanza revela una ausencia de estos componentes en el Conocimiento Profesional de los profesores investigados, lo cual evidencia la necesidad de programas de formación que presten atención a los resultados de la investigación en Educación Matemática.

* Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad del País Vasco (UPV/EHU). Profesor Titular de Matemática Aplicada de la Universidad del País Vasco (UPV/EHU), San Sebastián, España. Dirección postal: Escuela Politécnica de San Sebastián (EPD), Departamento de Matemática Aplicada, Plaza de Europa, 1, 20018, San Sebastián, España. E-mail: joseignacio.barragues@ehu.es

** Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad del País Vasco (UPV/EHU). Profesor Titular de Matemática Aplicada de la Universidad del País Vasco (UPV/EHU), San Sebastián, España. Dirección postal: Escuela Politécnica de San Sebastián (EPD), Departamento de Matemática Aplicada, Plaza de Europa, 1, 20018, San Sebastián, España. E-mail: a.morais@ehu.es

*** Doctor en Ciencias Físicas por la Universidad del País Vasco (UPV/EHU). Profesor Titular de Física Aplicada de la Universidad del País Vasco (UPV/EHU), San Sebastián, España. Dirección postal: Escuela Politécnica de San Sebastián (EPD), Departamento de Física Aplicada I, Plaza de Europa, 1, 20018-San Sebastián, España. E-mail: jenaro.guisasola@ehu.es

Palabras clave: Probabilidad. Conocimiento didáctico del contenido. Formación de Profesores. Epistemología e Historia de las Matemáticas.

Abstract

Educational research has highlighted the need for further research into the knowledge base of university teaching faculty, which needs to go beyond a mere familiarity with mathematical content. What is termed University Teaching Faculty Professional Knowledge would include aspects related to the current teaching of the discipline, such as the perspectives of teachers, the history and difficulties encountered by students, etc. This work addresses the following research topics: professional knowledge of Probability of the teaching staff; Epistemology and History of Probability Theory; and Didactics of Probability Theory. The focus of this study is, firstly, to address the problem of identifying the constituents of this Professional Knowledge, which will be useful to the university teaching faculty delivering lessons of Probability Theory in order to design teaching-learning sequences; and secondly, we look into what extent these constituents are taken into account in university teaching. We conduct a phenomenological analysis of Probability Theory, including historical phenomenology, and we study teaching proposals of a group of university teaching faculty of engineering studies by means of a written questionnaire and face-to-face interviews. Our analysis identifies the following aspects which should be part of the Professional Expertise: setting out scenarios to introduce concepts; discussing various conceptual formulations of Probability and its historical problems; the implications for Science, Technology and Society for raising the interest level of students; and taking into account students' alternative conceptualizations. The study of the teaching proposals reveals that these constituents are lacking in the Professional Knowledge of the teaching faculty studied, which shows the need for training programs that take on account the research-based evidence on the Mathematics Education.

Keywords: Probability. Pedagogical Content Knowledge. Teacher Training. Epistemology and History of Mathematics.

1 Introducción

Actualmente se considera esencial la competencia Estadística para ciudadanos capaces de orientarse en un entorno de fuertes interdependencias sociales, políticas y económicas, donde con frecuencia las decisiones con impacto social se toman sobre la base de estudios estadísticos. Como indican Artigue, Batanero y Kent (2007), el desarrollo actual de la Estadística ha ampliado el rango de procesos en los que los usuarios pueden utilizar los métodos estadísticos, y ello puede explicar el crecimiento en la demanda de educación estadística en Ingeniería, Psicología, Educación, Ciencias de la Salud, negocios etc.

Sin embargo, la investigación didáctica está mostrando las dificultades que tienen los estudiantes para aprender, de forma significativa, los conceptos relacionados con el azar, la Probabilidad y la Estadística (BOROVNICK; BENTZ; KAPADIA, 1991; BATANERO; NAVARRO-PELAYO; GODINO, 1997). A este respecto, se ha mostrado cómo los estudiantes que han recibido una enseñanza universitaria basada en la clase expositiva tradicional, fracasan al tratar de resolver situaciones probabilísticas que requieran una comprensión profunda de los significados (GUISASOLA; BARRAGUÉS, 2002; SALCEDO; MOSQUERA, 2008; VENTURIELLO, 2008; ATTORRESI; GARCÍA; PRALONG, 2008).

Dado el importante papel que los profesores juegan en el aprendizaje de la Probabilidad, Shaughnessy (1992) señaló la necesidad de aumentar la investigación acerca del conocimiento y las creencias que los profesores tienen sobre las concepciones probabilísticas de sus alumnos. No obstante, la respuesta a la petición de Shaughnessy ha sido limitada, según muestra la revisión de trabajos de Stohl (2005). Según Jones, Langrall y Mooney (2007) y Fast (1999), hay actualmente necesidad de trabajos de investigación destinados a analizar estrategias de enseñanza específicas para la enseñanza de la Probabilidad. De modo similar, Ortiz, Batanero y Contreras (2012), en su trabajo acerca del *conocimiento común del contenido* de los futuros profesores de Probabilidad, resaltan en sus conclusiones la necesidad de continuar la investigación sobre los diversos componentes del conocimiento profesional del profesor, como paso necesario para mejorar su formación. Como contribución en esta dirección, en primer lugar se han identificado determinados aspectos epistemológicos, históricos y didácticos de la Teoría de la Probabilidad que el profesorado universitario debería tomar en consideración en la enseñanza. Y, en segundo lugar, se analiza la enseñanza universitaria de la probabilidad en relación con las características definidas. Con el objetivo de analizar esta enseñanza en detalle y en situaciones reales de docencia, se analizan las secuencias de enseñanza de la Probabilidad que utilizan diez profesores de universidad. La enseñanza de la Probabilidad se ha analizado dentro de su contexto real, y por tanto encontramos que hay muchas más variables de interés que datos observacionales. Por eso se ha optado por un estudio cualitativo, basado en las evidencias que se desprenden de las ideas, opiniones, prácticas y justificaciones que los profesores investigados revelan. El objetivo no es establecer generalizaciones para toda la enseñanza universitaria de la Probabilidad, sino que intentamos proporcionar sustanciales y específicas aportaciones sobre las transposiciones didácticas de la Probabilidad con el propósito de informar a la enseñanza de la Probabilidad en su tarea de diseñar secuencias de enseñanza-aprendizaje (SHULMAN, 1986; BRYAN; ABEL, 1999; PORLAN et al., 2010; JONES; LANGRALL; MOONEY, 2007; HILL; BALL; SHILLING, 2008; DÍAZ et al., 2012).

Las preguntas que guiaron este estudio fueron:

1. ¿Qué aspectos epistemológicos, históricos y didácticos deberían ser tomados en consideración por parte del profesorado universitario para la enseñanza de la Teoría de la Probabilidad?
2. ¿Cuáles son los elementos de la epistemología de la Probabilidad que el profesorado utiliza al diseñar una secuencia de enseñanza?

3. ¿Cuál es la naturaleza del conocimiento didáctico del profesorado al diseñar la enseñanza de Probabilidad?

2 Marco teórico

2.1 Investigación acerca del Conocimiento Profesional del Profesorado

En los últimos años se ha prestado una atención cada vez mayor al modo en que las ideas, las concepciones, los conocimientos y los valores del docente influyen en las estrategias de enseñanza que utiliza en su actuación en clase. Tales concepciones, conocimientos y valores incluyen aspectos que van más allá del mero conocimiento de su disciplina. La investigación educativa ha aportado evidencias de que para enseñar contenidos no es suficiente dominarlos, sino que es necesario un conocimiento específico profesional. Este conocimiento viene siendo denominado de diferentes formas como Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC) o Conocimiento Práctico Profesional (CPP) (PORLAN et al., 2010; BRYAN; ATWATER, 2002). Como indica Schön (1992), el CPP no es una mera aplicación de la teoría en la acción educativa, sino que como cualquier otro conocimiento profesional surge de la investigación y resolución de problemas relevantes del ámbito disciplinar o profesional.

Dar sentido al conocimiento pedagógico en relación con la docencia de un área de conocimiento requiere un proceso complejo de reflexión en la acción, que lleva a establecer nuevas concepciones epistemológicas y un conocimiento diferenciado del pedagógico y del disciplinar para una problemática (la enseñanza de la disciplina) también diferenciada (PORLAN et al., 2010). Similarmente, Ortiz, Batanero y Contreras (2012) indican que la caracterización del *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) de Shulman (1986) habla, de una forma particular, del conocimiento del contenido que incorpora aspectos relacionados con la propia enseñanza de la disciplina, esto es, incluye, también, las formas de representar y formular el contenido para que sea comprensible a otros. Este PCK incluiría también las perspectivas de los profesores acerca de la relación con otras materias, la historia de las Matemáticas, el conocimiento del modo en que los estudiantes aprenden cierto contenido particular, sus dificultades, el currículo etc. Desde la propuesta inicial de Shulman se ha observado un creciente interés por el estudio del conocimiento del profesor, y, en las últimas décadas, ese interés ha tenido una incidencia considerable en el campo de la Educación Matemática (RIVAS; GODINO; CASTRO, 2012; DÍAZ et al., 2012). En este estudio se han

seleccionado dos aspectos del PCK: la epistemología y la didáctica de las Matemáticas que subyacen en las propuestas de los profesores para la enseñanza de la Probabilidad. Seguidamente se justifica esta elección.

2.2 Epistemología e Historia de la Teoría de la Probabilidad

Para analizar una propuesta de enseñanza es necesario explicitar, en primer lugar, qué se entiende por comprender los objetos matemáticos en cuestión. Como indica Godino (1996), debe estudiarse la estructura de tales objetos y los modos posibles de comprenderlos, los aspectos o componentes que es posible y deseable que determinados estudiantes, en determinadas circunstancias, aprendan. Todos los aspectos que han sido objeto de nuestro estudio epistemológico tienen cabida en el marco teórico fenomenológico (FREUDENTHAL, 1983). Como indica Puig (1997), el análisis fenomenológico de una estructura matemática consiste en describir cuáles son los fenómenos para los que dicha estructura sirve como medio de organización y qué relación tiene con ellos. La descripción de esta relación ha de mostrar de qué manera la estructura matemática actúa sobre los fenómenos como medio de organización y de qué poder nos dota sobre ellos.

Si bien esta descripción ha de tomar las Matemáticas en su desarrollo y uso actuales, Freudenthal (1983) se refiere también a una importante óptica de análisis: la fenomenología histórica. Se trata de la toma en consideración de los fenómenos para cuya organización históricamente se creó la estructura matemática y cómo esta organización se extendió a otros fenómenos. Jankvist (2009) establece diversas perspectivas acerca de los posibles beneficios de incrementar la investigación empírica en el uso de la historia en educación Matemática, donde la historia no solamente se considere una herramienta, sino que también sea un objetivo de aprendizaje. En el mismo sentido, Barona (1994) señala que la Historia de la Ciencia posee en sí una función didáctica acerca de la naturaleza del conocimiento científico que la convierte en una disciplina capaz de ejercer una función crítica y antidogmática. También Batanero, Godino y Roa (2004) y Fernandes, Fernandes de Carvalho y Correira (2011) consideran en el conocimiento profesional de los docentes una componente epistémica, que recoge no solo el significado matemático, sino también su desarrollo histórico y las controversias que tuvieron lugar, que pueden ayudar a comprender mejor las dificultades de los alumnos.

Este análisis fenomenológico nos permitió caracterizar qué concepción de la Probabilidad debe enseñarse para aprovechar su potencial en la práctica de la Ingeniería y qué

aspectos clave debíamos examinar en las propuestas de los profesores. De este modo, fueron tres los aspectos clave identificados.

El primer aspecto clave consiste en que la Teoría de la Probabilidad debe presentarse como un marco teórico para la construcción de modelos matemáticos útiles para intervenir con éxito en la realidad (MARTÍNEZ; REQUENA, 1986; MEYER, 1992; GNEDENKO, 1995). Los modelos deterministas se muestran insuficientes para proporcionar respuestas en muchas situaciones de interés práctico, y el cambio de estrategia que se adopta consiste en estudiar comportamientos medios en vez de comportamientos individuales. Se trata de un cambio significativo en lo que se entiende por solución, puesto que, ahora, se acepta que una parte de la población no se ajuste a las inferencias que se formulen.

En segundo lugar, la Teoría de la Probabilidad constituye una evidencia más de la naturaleza problemática del proceso de construcción del conocimiento científico y matemático. Y, en tercer lugar, la consideración histórica revela los saltos cualitativos y reformulaciones que tuvieron lugar en el desarrollo de la teoría (BARRAGUÉS; GUIASOLA, 2009). Tanto la naturaleza problemática como la existencia de saltos cualitativos se hacen muy visibles en un análisis histórico de la construcción de la Teoría de la Probabilidad (DAVID, 1962; BOROVCNIK; BENTZ; KAPADIA, 1991; DÍAZ; BATANERO; CAÑIZARES, 1996; BARRAGUÉS; GUIASOLA, 2009). Por ejemplo:

-La concepción clásica o Laplaciana de la Probabilidad, que ya desde sus inicios se encontró restrictiva en su ámbito de uso y circular en su definición, puesto que exige que todos los posibles resultados tengan *idéntica verosimilitud*, lo cual equivale a la equiprobabilidad de todos los sucesos elementales.

-La controvertida interpretación subjetivista, según el cual la Probabilidad es un grado de creencia personal acerca de un fenómeno impredecible, y, por tanto, es dependiente del sujeto.

-La difícil reconciliación entre la búsqueda de una conceptualización científica del azar y la visión profundamente determinista del mundo, predominante en la segunda mitad del siglo XVII.

Según lo expuesto en este apartado, el análisis epistemológico realizado selecciona como aspectos importantes los que se muestran en el Cuadro 1, y que responden a la primera pregunta que planteamos en esta investigación (apartado 1), en cuanto a la identificación de aspectos históricos y epistemológicos a tomar en consideración para el diseño de unidades didácticas.

- A1. Se plantean situaciones problemáticas con objeto de hacer ver la necesidad de introducir los nuevos conceptos.
- A2. Se muestran las diversas interpretaciones del significado de la probabilidad, abordando la problemática que generan, los saltos cualitativos, los cambios ontológicos y las reformulaciones conceptuales profundas que se realizaron al introducir conceptos de mayor poder explicativo.
- A3. Se incluyen referencias significativas a implicaciones técnicas, sociales y científicas que permitan despertar el interés de los estudiantes hacia la metodología científica y actitudes positivas hacia la Teoría de la Probabilidad.

Cuadro 1 - Aspectos Epistemológicos analizados

2.3 Didáctica de la Teoría de la Probabilidad

Se ha estudiado, también, en qué medida las propuestas de los profesores tomaban en consideración los resultados de la investigación en didáctica de la Probabilidad puesto que, como proponen Hill, Ball y Schilling (2008), el PCK incluye el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben o aprenden este contenido particular, el conocimiento de sus errores y dificultades, sus concepciones erróneas, las estrategias que utilizan y cómo evoluciona su razonamiento matemático. Naturalmente, el PCK también recoge la capacidad para construir procesos adecuados para ayudar a los estudiantes en sus dificultades y promover el aprendizaje comprensivo.

La investigación acerca de la comprensión, por parte de los estudiantes, de los conceptos relativos al azar y la Probabilidad es muy numerosa, y evidencia el uso de diversas estrategias no probabilísticas por parte de las personas cuando deben emitir algún juicio acerca de situaciones no deterministas. Muchas de esas estrategias son adquiridas a través de las experiencias de la vida cotidiana y proporcionan argumentos para tomar decisiones y enjuiciar, de modo que cuentan con un valor práctico para el individuo (SÁENZ, 1998; SERRANO et al., 1998; GUIASOLA; BARRAGUÉS, 2002; DÍAZ et al., 2012). Las investigaciones demuestran que los juicios probabilísticos de muchas personas están dirigidos por el uso sistemático de unos pocos patrones de inferencia o heurísticas que han sido descritos mediante un marco teórico conocido como Paradigma de heurísticos y sesgos (KAHNEMAN; SLOVIC; TVERSKY, 1982). Este paradigma describe, por ejemplo, la llamada *heurística de accesibilidad*, que conduce a estimar la probabilidad de un suceso por la facilidad con que pueden recordarse o generarse ejemplos en los que tal suceso ocurre; y también describe el denominado *sesgo de equiprobabilidad*, creencia de que todos los sucesos asociados a un experimento aleatorio son equiprobables. El problema es que tales estrategias informales alternativas pueden resultar para los estudiantes más plausibles que las estrategias probabilísticas, y, en consecuencia, pueden sesgar su utilización y dificultar su aprendizaje.

Como indican Batanero, Burrill y Reading (2011), los profesores encuentran en los estudiantes mayores dificultades en Estadística que en otros tópicos matemáticos, y no se consideran suficientemente preparados para ayudarles en sus dificultades. Estas razones muestran que uno de los criterios más importantes que se debe utilizar para evaluar la competencia probabilística, alcanzada tras la enseñanza, consiste en investigar la persistencia de este tipo de razonamientos (PEARL, 2008; KAPADIA, 2008).

Según lo expuesto en este apartado, se han seleccionado como aspectos importantes los que se muestran en el Cuadro 2, y que terminan de responder a la primera pregunta que planteamos en esta investigación (apartado 1), en cuanto a la identificación de aspectos didácticos que deben tomarse en consideración para el diseño de unidades didácticas.

A4. Se toman en consideración las posibles ideas previas, concepciones alternativas y dificultades de los estudiantes.
A5. Se toman en consideración los aspectos procedimentales y actitudinales.

Cuadro 2 - Aspectos Didácticos analizados

3 Método

3.1 Instrumentos

Una transformación significativa se produce cuando el conocimiento matemático (lo que se tiene que enseñar) llega al aula (conocimiento enseñado), un proceso que Chevallard (1991) denominó *la transposición didáctica*. En esta transformación, otros factores diferentes al conocimiento matemático, tales como objetivos educativos, concepciones/creencias/experiencia de los profesores y las ideas de los estudiantes, son agentes que ejercen influencia.

Para investigar la transposición didáctica, en el caso de la enseñanza de la probabilidad a nivel universitario, se han analizado las secuencias de enseñanza de diez profesores mediante un cuestionario escrito y una entrevista semiestructurada. Como indican Cohen, Manion y Morrison (2007), si bien el cuestionario escrito es un instrumento ampliamente usado para la recogida de datos, debe tenerse en cuenta el limitado alcance de los datos recogidos y la posible falta de flexibilidad en las respuestas. Por ello, hemos decidido complementar el cuestionario escrito con una entrevista personal, a lo largo de la cual el profesor tiene la oportunidad de desarrollar con mayor detalle sus respuestas al cuestionario previo escrito.

El cuestionario escrito consta de dos partes. En la primera parte el profesor debe describir los términos generales del modo en que justifica ante los estudiantes la secuenciación de contenidos que utiliza (aspectos epistemológicos, Cuadro 1). En la segunda parte se pide al profesor que explique el modo en que toma en consideración las dificultades de aprendizaje, las formas de razonamiento y las ideas previas de los estudiantes, la forma en que introduce los conceptos, así como la forma de evaluación que realiza (aspectos didácticos, Cuadro 2).

El Cuadro 3 recoge el guión de la posterior entrevista grabada, utilizada para profundizar en las respuestas que los profesores dieron al cuestionario escrito en los aspectos epistemológicos A1-A3 (parte I) y en los didácticos A4 y A5 (parte II). La parte I constituye la respuesta a la segunda pregunta que planteamos en esta investigación (apartado 1), en cuanto a la identificación de los elementos de la epistemología de la Probabilidad que el profesorado utiliza al diseñar una secuencia de enseñanza. La parte II responde a la tercera pregunta, que trata del conocimiento didáctico del profesorado.

Acerca de la utilidad de las entrevistas, Cohen, Manion y Morrison (2007) sostienen que la entrevista es una potente implementación para los investigadores, mediante la cual se pueden obtener respuestas explícitas y detalladas. El uso de entrevistas marca un distanciamiento respecto a la simple recogida de datos, hacia el conocimiento generado entre humanos a través de una conversación. Como indica Smith (1990), a medida que las entrevistas van progresando, los datos se van adecuando a un patrón, emerge una tendencia, en este caso acerca de lo que realmente están enseñando a sus alumnos los profesores investigados en sus clases de Probabilidad. Este estudio trata de describir dicha tendencia.

Para la planificación de la entrevista y su posterior análisis, se ha prestado atención a las fuentes más usuales de sesgo en este tipo de prueba, como pueden ser las actitudes, opiniones, expectativas y nociones preconcebidas del entrevistador (COHEN; MANION; MORRISON, 2007).

Parte I. Aspectos epistemológicos de la propuesta del profesor

I.1. ¿Qué criterios ha empleado para construir esa secuenciación de contenidos?

I.2. ¿Hace alguna introducción para explicar qué problemas que se van a tratar?

I.3. Supongamos que llega el momento de introducir un nuevo concepto. ¿Cómo lo hace exactamente?

I.4. ¿Cómo presenta ante los alumnos la probabilidad? ¿Modifica esta conceptualización a lo largo de las lecciones?

I.5. Además de comprender los conceptos, también es importante que los alumnos apliquen los procedimientos de cálculo probabilístico. ¿Cuál es, a su entender, la mejor forma de lograrlo?

I.6. ¿Qué podría aportar el estudio de la historia de los conceptos probabilísticos?

I.7. Señale algunos recursos concretos que utiliza para mostrar a los alumnos la utilidad de la Teoría de la Probabilidad.

Parte II. Aspectos didácticos de la propuesta del profesor

II.1. ¿Conoce algo acerca de las ideas previas de los alumnos sobre el azar y la probabilidad?

II. 2. Las ideas previas y las concepciones alternativas de los estudiantes resultan ser obstáculos para el aprendizaje de los alumnos. ¿Qué cree que se podría hacer para superarlos?

II.3. ¿Cómo hacer ver la necesidad de introducir el concepto de probabilidad?

II.4. ¿Cómo hacer interesante para el alumno la Teoría de la Probabilidad?

II.5. Proponga algunas preguntas concretas que podrían servir de examen para saber si el alumno ha comprendido qué significa la Probabilidad.

Cuadro 3 - Guión de la entrevista semiestructurada

3.2 Muestra de profesores y contexto

El diseño experimental que se ha descrito se aplicó para analizar las programaciones, estrategias y formas de evaluación utilizadas por un grupo de diez experimentados profesores (10-20 años de experiencia) de Escuelas de Ingeniería de Universidad del País Vasco (España). Estos profesores impartían la asignatura de Métodos Estadísticos para la Ingeniería en primer curso (alumnos de 18-19 años de edad), asignatura de 6 créditos ECTS (lo que equivale a 60 horas presenciales más 90 horas no presenciales) que incluye en su programa el cálculo de probabilidades, Estadística descriptiva, variables aleatorias, contraste de hipótesis y análisis de la regresión. La elección de estos diez profesores fue deliberadamente arbitraria, sin definir criterios de elección, excepto que impartieran la asignatura de Métodos Estadísticos. Como indican Cohen, Manion y Morrison (2007), esta forma de elegir la muestra es frecuente y perfectamente válida en un tipo de investigaciones que no pretenden ser a gran escala ni intentan generalizar los resultados obtenidos, sino obtener conocimiento de una o dos escuelas, dos o tres grupos de estudiantes o, como en este caso, un grupo particular de profesores. Nuestro objetivo no es derivar conclusiones generales sobre *el camino* usual en el que el tema es enseñado en la universidad, sino entender en profundidad cómo se tratan aspectos epistemológicos y didácticos importantes a la hora de hacer la transposición didáctica al aula.

Cada uno de los profesores de la muestra completó previamente un cuestionario escrito donde describió el modo en que justifica ante los estudiantes la secuenciación de contenidos que utiliza (aspectos epistemológicos), y el modo en que toma en consideración las dificultades de aprendizaje, las formas de razonamiento y las ideas previas de los estudiantes, la forma en que introduce los conceptos, así como la forma de evaluación que realiza (aspectos didácticos). Posteriormente, cada profesor fue entrevistado personalmente por los investigadores, según el guión del Cuadro 3, para ampliar o matizar sus respuestas.

Seguidamente se muestran los resultados obtenidos, que se ilustran con ejemplos significativos (los nombres de los profesores son figurados).

4 Resultados

1 ¿Qué aspectos epistemológicos tienen en cuenta los profesores?

A la hora de justificar la secuenciación de contenidos que proponen, todos los profesores hacen referencia a un *orden lógico* en el que cada concepto superior debe ir precedido de los conceptos básicos necesarios. Desde este punto de vista, las secuenciaciones aspiran a contar con rigor matemático. Pero no hemos encontrado ninguna referencia a una justificación problemática a la hora de construir las secuenciaciones propuestas, esto es, los conceptos no se van introduciendo según aparecen problemas que los justifican. Se pierde de vista, así, que todo conocimiento es la respuesta a un problema, como afirmara Bachelard (1938), y ello hace difícil captar la racionalidad del proceso matemático (aspectos epistemológicos A1 y A2, Cuadro 1).

Seis de los diez profesores investigados explican, en una introducción, qué problemática se va a tratar, empleando problemas sencillos con monedas y dados. Solo uno de ellos hace una referencia clara, explícita, a la insuficiencia de los modelos deterministas para describir fenómenos reales, a la ingenuidad que supone el tratar de explicar los fenómenos complejos mediante relaciones causa-efecto y al cambio de estrategia que supone el uso de modelos probabilísticos. Los restantes cinco profesores explican los términos aleatorio/determinista, pero en las explicaciones que ofrecen a sus alumnos aparece una fuente de dificultades: el intento de clasificar los fenómenos reales como *deterministas* o *aleatorios*. Uno de los profesores (Unai, profesor titular de Escuela Universitaria) lo explicaba del siguiente modo:

Unai: Un fenómeno determinista es aquél respecto del cual se conoce de antemano el resultado exacto. Por ejemplo las leyes de la Física que establecen las fórmulas de velocidad, de movimiento de una partícula (ley de Newton), de cálculo de intensidad de corriente eléctrica en un circuito RLC,...Un fenómeno aleatorio es aquél respecto del cual no se conoce de antemano el resultado exacto. Por ejemplo, extracción de una bola de urna de 50 bolas, juegos como la lotería.

Este tipo de explicación muestra a los alumnos que los fenómenos reales son intrínsecamente aleatorios o intrínsecamente deterministas, cuando, en realidad, el carácter determinista o aleatorio se refiere al modelo matemático utilizado, y surge del conjunto de hipótesis bajo las cuales se estudia el fenómeno real. Por ejemplo, Martínez y Requena (1986) señalan lo crucial de distinguir entre fenómeno real y modelo, y hablan de la amplísima

familia de modelos que pueden ser empleados, y entre ellos los modelos deterministas (modelos con ecuaciones analíticas) y los modelos probabilísticos (modelos con ecuaciones estocásticas). Esta cuestión podría reducirse a una mera cuestión terminológica, si se cuida de señalar suficientemente en clase que un fenómeno aleatorio es un fenómeno real que habitualmente se estudia empleando modelos probabilísticos, y que un fenómeno determinista es un fenómeno real que se estudia empleando relaciones deterministas.

Todos los profesores introducen las concepciones frecuencial, Laplaciana y axiomática. Solo un profesor introduce, además, la interpretación subjetiva (aspecto epistemológico A2). Se trata del único profesor en el que hemos encontrado una referencia suficiente a las problemáticas de las diferentes interpretaciones. El resto no analiza la problemática de cada conceptualización de la Probabilidad ni justifica la axiomática de un modo claro para los alumnos (aspectos epistemológicos A1 y A2). Como ejemplo Carla (profesora titular de Universidad), solo alude para justificar la axiomática, al problema matemático de contar con un punto a partir del cual derivar la teoría y a tratar de que el alumno piense en términos abstractos. Ninguna referencia aparece en su explicación, por ejemplo, hacia la necesidad de construir modelos probabilísticos generales con los que estudiar una amplia variedad de situaciones, o al porqué de la elección de esos axiomas determinados (aspecto epistemológico A2).

Entrevistador: ¿Cómo explica a los alumnos la importancia de la axiomática?

Carla: Fundamentalmente porque necesitamos un punto de partida y este punto de partida son los axiomas. Tampoco es necesario justificarlos de modo exagerado. En la práctica esos axiomas son muy de sentido común, empleamos la representación gráfica vinculándolo a la teoría de conjuntos. Cuando uno dibuja un diagrama de Venn en el que un suceso interseca con otro suceso, en ese momento hay un cambio mental, las operaciones de conjuntos tienen una referencia intuitiva, todo el mundo lo entiende. A partir de ahí todas las operaciones de conjuntos tienen una relación con los cálculos de probabilidad.

Entrevistador: Existen otras formas más intuitivas de introducir la probabilidad, la frecuencial por ejemplo. Entonces, ¿por qué introducir la probabilidad de modo abstracto, axiomático?

Carla: Yo creo que es importante esa abstracción, a mí me parece una manera bastante natural. Presentas toda la teoría de conjuntos sin vincularla a la probabilidad, la unión, la intersección, la complementación, la diferencia...todas las operaciones y una vez hecho eso, decimos que la probabilidad de un conjunto verifica los axiomas. Yo no creo que tengan problemas para entender la axiomática, al repetirlo la gente se va quedando con ello.

Ninguno de los profesores emplea, de forma sistemática, situaciones problemáticas estructurantes de las cuales surja la necesidad del nuevo concepto (aspecto epistemológico A1). Ahora bien, todos ellos aseguran emplear ejemplos para ilustrar cada nuevo concepto que va a ser definido, o bien muestran un ejemplo inmediatamente después de presentar formalmente el concepto. Como ejemplo, Gorka (Profesor titular de Escuela Universitaria), lo sostiene del siguiente modo:

Gorka: Depende de qué concepto, les pongo un ejemplo. Para la probabilidad condicionada, pido a los alumnos que calculen la probabilidad de elegir un alumno pero no del total sino de aquellos que son vecinos de Durango o que son chicas.

Entrevistador: Y la definición formal...

Gorka: La doy después. Si el concepto es sencillo, doy la definición sin ejemplo.

Los datos muestran que los profesores construyen una secuenciación para el bloque de Probabilidad, atendiendo como criterio general a una estructura lógica matemáticamente rigurosa; seguidamente colocan alrededor de cada concepto importante alguna situación ilustrativa simple. De este modo, el profesor procura justificaciones posteriores para mostrar que los conceptos no surgen de forma arbitraria. Ahora bien, en este esquema la situación problemática no es el motor que impulsa el proceso de construcción de los conceptos (aspecto epistemológico A1). El alumno no percibe situaciones que no pueden resolverse mediante el marco teórico que se conoce hasta el momento, no hay un proceso de acercamiento intuitivo y refinamiento del concepto que desemboque en su definición formal, ni se hace ver por qué dicho concepto es importante (aspectos epistemológicos A1 y A2).

El término *procedimiento* (cuestión I.5, Cuadro 3) fue interpretado de forma generalizada por los profesores como *conjunto de reglas de aplicación mecánica* (reglas de combinatoria, de la probabilidad total, de la probabilidad condicionada etc.). Sin embargo, existen contenidos procedimentales de mayor demanda cognitiva, como el análisis cualitativo de la situación, el establecimiento de hipótesis, la discusión/interpretación del valor probabilístico obtenido y la búsqueda de generalizaciones (aspecto epistemológico A3). No recogimos ninguna referencia hacia la participación de los alumnos en la construcción de los procedimientos. El objetivo que los profesores establecen es que los alumnos simplemente reproduzcan procedimientos ya elaborados para una variedad de situaciones prototípicas o enunciados-tipo (aspecto epistemológico A2). Los profesores se refirieron a tareas como la lectura atenta, la identificación de sucesos, la expresión formal etc. Por ejemplo, Fátima (profesora titular de Universidad) lo explica como sigue:

Entrevistador: ¿Qué procedimientos cree que son realmente importantes?

Fátima: Que lean el enunciado. Cuando leen un problema resuelto, lo entienden perfectamente. Pero si el papel está en blanco, es otra cosa. No saben. Les digo que definan la variable, la gente solo hace números, escribir qué representa cada variable, identificando los conceptos a través de las variables y luego que vean qué me están pidiendo a través de esas variables.

Entrevistador: ¿Hay algún procedimiento adicional que le parezca importante?

Fátima: Que se planteen si la probabilidad del suceso contrario es más fácil de calcular. Y a la hora de emplear uniones o intersecciones, relacionarlas con el lenguaje, que se planteen la independencia/incompatibilidad. Eso les ayuda mucho.

Todos los profesores reconocen la importancia del concepto de Probabilidad en las construcciones teóricas siguientes y señalan la importancia de que se comprenda su significado. Pero se le presta escasa atención y solo se evalúa el aprendizaje de la operativa de

cálculo de probabilidades. Los estudiantes no se enfrentan a auténticas situaciones problemáticas (aspectos epistemológicos A1-A3). Por ejemplo, veamos cómo lo explica Jesús María (profesor titular de Universidad):

Entrevistador: ¿Cómo evalúa el aprendizaje de la probabilidad?

Jesús María: Se dan una serie de probabilidades y que aplique la fórmula de Bayes para calcular probabilidades, se trata de poder identificar las probabilidades pedidas. Fundamentalmente problemas de identificar sucesos de una realidad cercana a la industria y calcular probabilidades. Es bastante sencillo, no ponemos grandes exigencias en el cálculo de probabilidades porque solo es el primer paso para ser capaces de inferir resultados en la estadística, nuestro objetivo no es la Probabilidad, nos basta que se comprenda bien el concepto.

El siguiente ejemplo muestra la opinión de Roberto (profesor Titular de Universidad), que reconoce el escaso interés de los estudiantes por la asignatura. Además, lo que él denomina *problema*, en realidad es un ejercicio en el que el estudiante debe reconocer una situación-tipo y aplicar cierto algoritmo:

Entrevistador. ¿Cómo realiza la evaluación del aprendizaje de la probabilidad?

Roberto. Solo ponemos problemas, aplicar el procedimiento y obtener la solución numérica.

Entrevistador. ¿Es partidario de preguntas en un formato abierto, en las que el alumno deba tomar decisiones, discutir estrategias, etc.?

Roberto. Por ahora no. Pero veo que cada vez les preocupa menos el concepto. Hacen los problemas, ante tal enunciado tal procedimiento. No estudian ni se preocupan, lo dejan para el último día. Dejamos los apuntes en los exámenes, con la intención de que no memoricen fórmulas y vayan al concepto, pero no sé si es un arma de doble filo. En temas abstractos, no soy partidario salvo en asignaturas optativas. No porque piense que no sea bueno, pero tenemos muchos alumnos, pocas horas...Profundizar en la Ciencia, hablar de paradojas, puede mencionarse o poner algún ejemplo, pero no podemos profundizar. El alumno medio solo está interesado en aprobar la asignatura.

La cuestión I.6 del Cuadro 3 buscaba una reflexión por parte del profesor acerca del interés de la Historia de los conceptos probabilísticos. Se trataba de revelar si el profesor estaba interesado en la Historia de las Matemáticas y consideraba importante mostrar a los alumnos los cambios cualitativos que se dieron en la teoría, una visión problematizada de su proceso de construcción, los enfoques erróneos que tuvieron lugar y las dificultades que hubieron de superarse, a fin de ofrecer al alumno una visión más ajustada de las Matemáticas, como una construcción humana falible que responde a problemas y que está sujeta a revisión (aspectos epistemológicos A1-A3).

Siete de los diez profesores encuentran algún interés en introducir la Historia de los conceptos en la enseñanza. Tres profesores creen que se trata solamente de cultura general que quizá interesaría a algún alumno, pero sólo uno de ellos lo encuentra absolutamente inútil en escuelas técnicas, en las cuales, según su opinión, únicamente es necesaria la versión actual del concepto.

Las razones de los profesores para considerar interesante el estudio de la historia de los conceptos probabilísticos son básicamente de dos tipos no excluyentes. El primero, usar la

anécdota histórica para ayudar a recordar conceptos y para lograr una clase distendida; el segundo, dar una versión de las Matemáticas en la que la teoría no se presenta como algo acabado sino que muestre los orígenes, por qué ha surgido, que responde a una necesidad. El siguiente ejemplo ilustra la opinión de Mikel (profesor titular de Escuela Universitaria), que encontraría interesante mostrar al alumno no solo la versión acabada de la teoría, sino también la génesis y evolución de los conceptos. Sin embargo, es consciente de su falta de conocimiento del tema y de otras limitaciones.

Entrevistador. ¿Encuentra algún interés en introducir notas históricas en clase?

Mikel. Sí, me encantaría, si tuviera tiempo, también la estudiaría yo, claro.

Entrevistador. ¿Para qué nos serviría, de cara al aprendizaje de los alumnos?

Mikel. Yo creo que sería interesante para ver la evolución, cómo surgió y las aplicaciones de la Probabilidad y la Estadística a lo largo del tiempo. Lo que pasa es que yo creo que eso sería como otra asignatura

Entrevistador. Esa visión de la ciencia, de controversia, de debate, la naturaleza de los problemas y los modos de enfocarlos, ¿Cree que podría servir al alumno?

Mikel. Yo creo que sí. Lo que pasa es que si hablamos de Estadística, de Probabilidad, de Historia de la Probabilidad... Yo creo que el alumno podría tener interés pero nosotros no tenemos tiempo para todo eso. Ni tiempo ni conocimiento. Yo personalmente no estoy formado en Historia de Ciencia y de la Matemática.

Respecto a las estrategias concretas para mostrar a los alumnos la utilidad de la Teoría de la Probabilidad (pregunta I.7, Cuadro 3), las propuestas de los profesores señalan, fundamentalmente, las aplicaciones de la Probabilidad y de la Estadística en las diferentes ramas técnicas y en la vida cotidiana, comprender gráficos estadísticos, la información técnica de encuestas de opinión etc. La aplicación práctica de una teoría puede, evidentemente, servir para señalar su importancia. No obstante, se descuida una visión de la Teoría de la Probabilidad en el marco general de la Ciencia, no se plantean reflexiones acerca de las posibles implicaciones sociales y científicas que podrían despertar el interés de los estudiantes hacia la metodología científica y matemática, y de generar actitudes positivas hacia la Ciencia en general (aspecto epistemológico A3).

2. ¿Qué aspectos didácticos tienen en cuenta los profesores?

Respecto a las dificultades de los alumnos para comprender los conceptos y procedimientos elementales de la Teoría de la Probabilidad, los profesores aluden a carencias en la comprensión de enunciados, y a prerequisites como la Combinatoria y la Teoría de conjuntos. Los profesores desconocen los estudios didácticos acerca de las preconcepciones de los estudiantes. Sin embargo, la práctica docente ha permitido a algunos de ellos detectar ciertas dificultades bien conocidas y estudiadas en la literatura (aspecto didáctico A4). Tomemos como ejemplo la respuesta de Marta (profesora titular de Escuela Universitaria):

Marta: En estimación, cuando se habla de datos de la población y datos de la muestra. Enunciados del tipo “se tiene una población de tantos elementos y se conoce la media que vale tanto y la desviación

desconocida. Se toman siete datos y se calcula la desviación”. Entonces para ellos la desviación de la población es la de la muestra.

Marta ha observado que sus alumnos atribuyen cierta propiedad de la muestra (el valor de la desviación típica) a la población completa, sin consideración alguna hacia el tamaño muestral (aspecto didáctico A4). Así pues, esta profesora ha detectado lo que se denomina *insensibilidad al tamaño de la muestra* en el ya citado paradigma de heurísticos y sesgos (Serrano et al., 1998), y que puede conducir a que los alumnos no tomen en consideración la importancia del número de ensayos en sus estimaciones frecuenciales de probabilidad.

Del mismo modo, dos profesores entrevistados detectan en los alumnos una tendencia a pensar en términos de causas y efectos a la hora de resolver problemas, y que ello se traduce en dificultades a la hora de comprender los conceptos relativos al azar y la probabilidad. El paradigma de heurísticos y sesgos describe, también, una forma de razonamiento según la cual los sujetos emplean esquemas causales como mecanismos de enjuiciamiento en situaciones en las que interviene el azar. Estos sujetos, por tanto, no estarían apreciando el carácter aleatorio, bajo las hipótesis establecidas, de las variables que intervienen en el fenómeno (BOROVČNIK; BENTZ; KAPADIA, 1991). Como indica Sáenz (1998), el sistema educativo tradicionalmente entrena el pensamiento causal, introduciendo desde los primeros años de escolarización una visión determinista del mundo (física Newtoniana, variables funcionalmente ligadas por una relación determinista...) en forma de leyes *de obligado cumplimiento*. De hecho, el Cálculo Infinitesimal, muy presente en los programas escolares, no es sino la herramienta matemática para tratar la complejidad del cambio y de la causalidad determinista. A nuestro entender, la interpretación determinista del azar es una posible dificultad de los alumnos a tomar muy en consideración. La historia de la Teoría de la Probabilidad muestra que esta misma actitud básica hacia el mundo fenomenológico se ha apuntado como posible explicación de la tardía conceptualización de la Probabilidad (DAVID, 1962; BARRAGUÉS; GUIASOLA, 2006). Veamos un ejemplo de respuesta en el que Nekane (profesora titular de Escuela Universitaria) apunta la dificultad que ha detectado en sus alumnos:

Nekane: Una dificultad añadida es un cambio de mentalidad, la de la incertidumbre, ellos están siempre en unas Matemáticas de la certidumbre. Son unas Matemáticas ciertas, en el sentido de que deben resolver ecuaciones y las cosas tienen una única solución. Aquí hay una incertidumbre, esa forma de trabajar en ese ambiente les cuesta algo.

Sin embargo, el diagnóstico de la totalidad de los profesores tanto acerca del origen de las dificultades como de la propuesta para solucionarlas (cuestión 1.2 del Cuadro 6) son ingenuos, lo cual no es de extrañar si no se conocen los estudios acerca de las dificultades de

aprendizaje de la Probabilidad. Los profesores creen que el uso de procedimientos probabilísticos formales por parte del alumno es suficiente para relegar las ideas previas incorrectas (aspectos didácticos A4 y A5). Solo uno de los profesores, Roberto (profesor Titular de Universidad), ha leído algún estudio acerca de las dificultades de los alumnos para comprender los conceptos estadísticos. Sin embargo, sus propuestas para superar las dificultades de los alumnos son también ingenuas (aspectos didácticos A4 y A5). Veamos un fragmento de su respuesta:

Entrevistador: ¿Cómo podemos ayudar a los alumnos a superar sus dificultades?

Roberto: En todo lo que he leído se coincide. El alumno debe estar interesado por la asignatura. Para el caso de nuestros alumnos, deben ver que se aplica al mundo de la Ingeniería. Esas relaciones son las que les interesan, por qué es tan importante para la empresa.

Entrevistador: El punto de partida debe ser la motivación, de acuerdo. Pero, a pesar de estar motivados, las dificultades están presentes. Por ejemplo, [a los estudiantes] les resulta inverosímil que el número de lotería 55555 salga con una frecuencia similar a la de cualquier otro número, tienen unas ideas preconcebidas acerca de lo que es o no es aleatorio.

Roberto: Sería interesante profundizar en los conceptos, pero no entramos. Busco que estudien, para que no se aprendan las recetas.

Entrevistador: Una vez que los estudiantes han estudiado y aprobado la asignatura, cuando han estudiado la versión formalizada y han hecho problemas. Esas ideas erróneas acerca del azar ¿Cree que han sido sustituidas por las ideas formales?

Roberto: Creo que sí, a nivel elemental. Distinguen lo que es imposible, lo que es más o menos probable, lo que es una variable aleatoria.

Los profesores investigados emplean, habitualmente, clases expositivas y resolución de ejercicios en la pizarra, a menudo relacionados con especialidad técnica de los estudiantes. También emplean enunciados con juegos de azar. Pero, fuera de las aplicaciones técnicas inmediatas, no se refieren a ninguna relación Ciencia/Técnica/Sociedad que contribuya a despertar el interés hacia la Teoría de la Probabilidad y atender a aspectos motivacionales de los estudiantes (aspecto didáctico A5).

5 Conclusiones

Este trabajo ha intentado contribuir a la definición del Conocimiento Práctico Profesional del profesorado universitario de Probabilidad y Estadística. Esta contribución ha consistido, primeramente, en identificar determinados aspectos epistemológicos, históricos y didácticos de la Teoría de la Probabilidad que el profesorado universitario debería tomar en consideración en la enseñanza. Y, en segundo lugar, se han analizado desde estas ópticas las estrategias de enseñanza de un grupo de profesores universitarios, buscando, con ello, aportar conocimiento para el diseño de secuencias de enseñanza-aprendizaje basadas en la investigación en Educación Matemática.

Como señalan Jones, Langrall y Mooney (2007), la investigación acerca de la enseñanza de la Probabilidad ha identificado los siguientes componentes clave del conocimiento del profesorado: el propio contenido probabilístico, el pedagógico y el cognitivo de los estudiantes. En este estudio se tienen en cuenta dos dimensiones del conocimiento del profesorado de Probabilidad: la epistemológica-histórica y la didáctica.

Ciertamente, los posibles aspectos epistemológicos, históricos y didácticos que podrían analizarse son muy numerosos. Este estudio ha justificado como aspectos epistemológicos e históricos: a) el planteamiento de situaciones problemáticas como punto de partida para la introducción de los conceptos; b) discusión de las diferentes formulaciones conceptuales de la probabilidad y sus problemáticas; c) las implicaciones Ciencia/Técnica/Sociedad que pudieran mejorar el interés de los estudiantes. Y, como aspectos didácticos, se ha justificado la necesidad de prestar atención a las concepciones alternativas de los estudiantes y a sus actitudes.

El estudio de estos aspectos en las propuestas de enseñanza del grupo de profesores investigado ha revelado significativas carencias en su *Conocimiento Profesional*. Como primer resultado obtenido, señalar que todas las carencias detectadas en las propuestas de los profesores son convergentes con los resultados de una investigación previa que realizamos sobre el análisis de las secuenciaciones de algunos de los libros de texto y de consulta más ampliamente usados y recomendados por el profesorado (BARRAGUÉS; GUIASOLA, 2006).

El análisis epistemológico de la secuenciación y organización de contenidos que los profesores entrevistados proponen para el bloque de Probabilidad revela una visión aproblemática de la construcción del conocimiento matemático, donde los conceptos se introducen atendiendo, exclusivamente, a una estructura formal en su versión actual y sin problemas estructurantes que los justifiquen. No se discuten las problemáticas de las diversas interpretaciones de la Probabilidad, no se justifica la axiomática salvo con razones que para el alumno pueden resultar lejanas (rigor, abstracción). No se desarrollan notas históricas que podrían servir, precisamente, para resaltar el carácter problemático de la construcción de conceptos. Tampoco se presta atención a contenidos procedimentales no rutinarios propios de la metodología matemática como puede ser el análisis cualitativo de los problemas, la formulación de hipótesis y su significado, el análisis del alcance de la solución propuesta, la búsqueda de soluciones más generales, el uso del modelo probabilístico para realizar predicciones y contrastarlas con observaciones reales, la reflexión acerca de las limitaciones del marco teórico etc. No se explicitan intentos de guiar el estudiante, desde su actual

concepción deductiva y algebraica de las Matemáticas, hacia una concepción inductiva y empírica, hacia el origen y reconstrucción del conocimiento matemático, lo que Balachef y Kaput (1996) denominan *penetración epistemológica*. Los resultados que se han obtenido para la enseñanza de la Teoría de la Probabilidad son convergentes con los que viene obteniendo la investigación en Educación Matemática, cuando se muestra que la realidad docente universitaria ha adoptado de forma generalizada un modelo ingenuo de lo que significa aprender, de las estrategias necesarias para lograrlo y del modo de evaluar el aprendizaje (FRANKE; KAZEMI; BATTEY, 2007; SPILLANE; ZEULI, 1999).

Por otra parte, el análisis didáctico de las propuestas muestra que los profesores desconocen la investigación sobre la problemática del aprendizaje de los conceptos probabilísticos, y, en consecuencia, no proponen actividades expresamente destinadas a que los alumnos superen sus dificultades. Los profesores no plantean situaciones problemáticas abiertas y, por tanto, los alumnos no tienen oportunidad de enfrentarse a preguntas complejas, de alta demanda cognitiva, planteadas en formatos diferentes a los habituales. No se proponen situaciones con las que medir el avance o las deficiencias en el aprendizaje. Tampoco se proponen actividades de *feedback* a lo largo del proceso de aprendizaje ni se plantea la evaluación como parte de la enseñanza. En lugar de ello se resuelven situaciones-tipo en las que los alumnos deben aplicar un algoritmo. Para motivar al alumno y hacerle ver la importancia de la Teoría de la Probabilidad se recurre a las aplicaciones técnicas, sin referencia significativa a las relaciones entre la Ciencia la Técnica y la Sociedad.

Los resultados obtenidos aportan información sobre las estrategias de enseñanza que los profesores utilizan, y sobre el conocimiento que tienen acerca de las concepciones probabilísticas de los alumnos, aspectos que, según indica la bibliografía, necesitan ser ampliamente investigados (FAST, 1999; STOHL, 2005 JONES; LANGRALL; MOONEY, 2007; ORTÍZ, BATANERO; CONTRERAS, 2012).

La investigación en Educación Matemática ha desarrollado modelos de enseñanza y aprendizaje en los que la presentación del problema real, la discusión y el trabajo grupal generan dinámicas que favorecen la adquisición de competencias, dinámicas mediante las cuales los alumnos interactúan activamente en la construcción del conocimiento, recuperan conocimientos previos, se institucionalizan los significados, se presentan actividades de refuerzo etc. (JONES; LANGRALL; MOONEY, 2007; ARTIGUE; BATANERO; KENT, 2007; BARRAGUÉS; GUIASOLA, 2009). Este trabajo aporta evidencias sobre la dificultad que existe para que los hallazgos de la investigación en Educación Matemática se transfieran

a la práctica docente. Estos resultados se suman a aportaciones de estudios previos en la misma dirección (KILPATRICK, 1981; BEGG; DAVIS; BRAMALD, 2003).

El profesorado no puede seguir considerando que su trabajo se limita a mostrar formalmente ciertos contenidos recogidos en un temario, ilustrar los conceptos y procedimientos con *ejercicios de aplicación* y, finalmente, *verificar* que el alumno es capaz de reproducir, ante enunciados similares, los contenidos estudiados. El cambio metodológico que es necesario introducir en la enseñanza matemática universitaria solo es posible con el esfuerzo de muchos y con políticas de formación de profesorado que presten atención a los resultados de la investigación (BARRAGUÉS; GUIASOLA, 2009; BARRAGUÉS, 2011; BARRAGUÉS; MORAIS; GUIASOLA, 2014).

Referencias

- ARTIGUE, M.; BATANERO, C.; KENT, P. H. Mathematics thinking and learning at post-secondary level. In: LESTER, F.K. (Ed.). **Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. Charlotte, NC: NCTM, 2007. p. 1011-1049.
- ATTORRESI, H. F.; GARCÍA, A. M.; PRALONG, H. O. Sesgos en la estimación de probabilidades para dos situaciones secuenciales aleatorias. **Summa Psicológica**, Santiago, v. 5, n. 1, p. 3-12, jun. 2008.
- BACHELARD, G. **La Formation de l'esprit scientifique**. París: Vrin, 1938.
- BALACHEFF, N.; KAPUT, J. J. Chapter 13: Computer-Based Learning Environments in Mathematics. In: BISHOP, A. J.; CLEMENTS K.; KEITEL, C.; KILPATRICK, J.; LABORDE, C. (Ed.). **International Handbook of Mathematics Education**. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996, p. 469-501.
- BARONA, J. L. L. **Ciencia e historia: Debates y tendencias en la historiografía de la ciencia**. Valencia: Universidad de Valencia, 1994.
- BARRAGUÉS, J. I.; GUIASOLA, J. La introducción de los conceptos relativos al azar y la probabilidad en los libros de texto universitarios. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 24, n. 2, p. 241-256, jul. 2006.
- BARRAGUÉS, J. I.; GUIASOLA, J. Una propuesta para la enseñanza de la Probabilidad en la Universidad basada en la investigación didáctica. **Educación Matemática**, México, v. 21, n. 3, p. 127-162, dic. 2009.
- BARRAGUÉS, J. I. Capítulo VI : Estadística y Probabilidad. In: GOÑI, J. M. (Coord.). **Matemáticas**. Complementos de formación disciplinar. Barcelona: Ministerio de Educación/Editorial Graó, 2011, p.187-215.
- BARRAGUÉS, J. I.; MORAIS, A.; GUIASOLA, J.; Chapter 2: Probability. In: BARRAGUÉS, J. I.; MORAIS, A.; GUIASOLA, J. (Ed.). **Probability and Statistics: a didactic introduction**. Boca Raton, FL: CRC Press/Taylor&Francis, 2014, p. 38-123.

BATANERO, C.; NAVARRO-PELAYO, V.; GODINO, J. **Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in Secondary School pupils**, *Educational Studies in Mathematics*, Dordrecht, v. 32, n. 2, p. 181-199, feb. 1997.

BATANERO, C.; GODINO, J. D.; ROA, R. Training teachers to teach probability. **Journal of Statistics Education**, Alexandria, v. 12, n. 1, Marzo 2004. Disponible en <http://www.amstat.org/publications/jse/>. Acesso el: 10 abril de 2013.

BATANERO, C.; BURRILL, G.; READING, C. Overview: challenges for teaching statistics in school mathematics and preparing mathematics teachers. In: BATANERO, C.; BURRILL, G.; READING, C. (Ed.). **Teaching Statistics in School-Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education: A Joint ICMI/IASE Study**. Berlín: Springer Science+Business Media, 2011. p. 407-418.

BEGG, A.; DAVIS, B.; BRAMALD, R. Obstacles to the dissemination of mathematics education research. In: BICHOP, A. J.; CLEMENTS, M. A.; KEITEL, K.; KILPATRICK, J.; LEUNG, F. (Ed.). **Second International Handbook of Mathematics Education**, Dordrecht: Kluwer academic Publishers, 2003, p. 593-634.

BOROVCNIK, M.; BENTZ, H. J.; KAPADIA, R. A Probabilistic Perspective. In: KAPADIA, R.; BOROVCNIK, M. (Ed.). **Chance encounters: probability in education**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991. p. 27-70.

BRYAN, L. A.; ABELL, S. K. The development of professional knowledge in learning to teach science, **Journal of Research in Science Teaching**, Malden MA, v. 36, n. 2, p. 121-139, feb. 1999.

BRYAN L.A.; ATWATER, M.M. Teacher beliefs and cultural models: A challenge for science teacher preparation programs. **Science Education**, Malden MA, v. 86, n. 6, p. 821-839, nov. 2002.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique . Du savoir savant au savoir enseigné**. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1991.

COHEN, L.; MANION, L.; MORRISON, K. **Research methods in education**. London: Routledge, 2007.

DAVID, F. N. **Games, Gods and Gambling**. New York: Dover Publications, 1962.

DÍAZ, J.; BATANERO, C.; CAÑIZARES, M. J. **Azar y probabilidad**. Madrid: Síntesis, 1996.

DÍAZ, C.; CONTRERAS, J. M.; BATANERO, C.; ROA, R. Evaluación de Sesgos en el Razonamiento sobre Probabilidad Condicional en Futuros Profesores de Educación Secundaria. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 26, n. 44, p. 1206-1225, dic. 2012. Disponible en: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema>. Acesso el: 10 abril 2012.

FAST, G. R. Analogies and reconstruction of probability knowledge, **School Science and Mathematics**, Malden MA, v. 99, n. 5, p. 230-240, mayo. 1999.

FERNANDES, J. A.; FERNANDES DE CARVALHO, C.; CORREIRA, P. F. Contributos para a Caracterização do Ensino da Estatística nas Escolas. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 24, n. 39, p. 585-606, ago. 2011. Disponible en: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema>. Acesso el: 10 abril 2012.

FRANKE, M. L.; KAZEMI, E.; BATTEY, D. S. Mathematics teaching and classroom practices. In: LESTER, F.K. (Ed.). **The second handbook of research on mathematics teaching and Learning**, Charlotte, NC: Information Age, 2007, p. 225-256.

- FREUDENTHAL, H. **Didactical Phenomenology of Mathematical Structures**. Dordrecht: Reidel, 1983.
- GNEDENKO, B. **Teoría de las probabilidades**. Madrid: Rubiños, 1995.
- GODINO, J. D. Mathematical concepts, their meanings and understanding. In: Puig, L.; Gutiérrez, A. (Ed.). **Proceedings of the XX PME Conference**, Valencia: Universidad de Valencia, 1996, p. 417-425.
- GUISASOLA, J.; BARRAGUÉS, J. I. Heurísticas y sesgos de los estudiantes de primer ciclo de Universidad en la resolución de problemas de probabilidad. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 20, n. 2, p. 285-302, mayo. 2002.
- HILL, H. C.; BALL, D. L.; SCHILLING, S. G. Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, VA, v. 39, n. 4, p. 372-400, jul. 2008.
- JANKVIST, U. TH. On empirical research in the field of using history in mathematics education. **RELIME**, México, v. 12, n. 1, p. 67-101, mar. 2009.
- JONES, G. A.; LANGRALL, C. W.; MOONEY, E. S. Research in Probability. In: LESTER, F. K. (Ed.). **Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**, Charlotte, NC, NCTM, 2007, p. 909-955.
- KAHNEMAN, D.; SLOVIC, P.; TVERSKY, A. **Judgment under uncertainty: heuristics and biases**. New York: Cambridge University Press, 1982.
- KAPADIA, R. **Chance Encounters - 20 years later**. Fundamental ideas in teaching probability at school level. 2008. Disponible en: <http://www.tsg.icme11.org/tsg/show/14>.. Acceso el: 26 de enero 2011.
- KILPATRICK, J. The reasonable ineffectiveness of research in mathematics education. **For the Learning of Mathematics**, Fredericton, NB, Canada, v. 2, n. 2, p. 22-29, nov. 1982.
- MARTÍNEZ, S.; REQUENA, A. **Dinámica de sistemas 1. Simulación por ordenador**. Madrid: Alianza Editorial, 1986.
- MEYER, P. L. **Probabilidad y aplicaciones estadísticas**. México: Addison-Wesley Iberoamericana, 1992.
- ORTÍZ, J. J.; BATANERO, C.; CONTRERAS, J. M. Conocimiento de futuros profesores sobre la idea de juego equitativo. **RELIME**, México, v. 15, n. 1, p. 63-91, mar. 2012.
- PEARD, R. **Teaching the Mathematics of Gambling to Reinforce Responsible Attitudes towards Gambling**. 2008. Disponible en: <http://www.tsg.icme11.org/tsg/show/14>>. Acceso el: 26 de febrero de 2009.
- PORLAN, R.; MARTÍN DEL POZO, R.; RIBERO, A.; HARRES, J.; AZCÁRATE, P.; PIZZATO, M. El cambio del profesorado de ciencias: Marco teórico y formativo. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 28, n. 1, p. 31-46, mar. 2010.
- PUIG, L. Análisis fenomenológico. In: RICO, L. (Coord.). **La educación matemática en la enseñanza secundaria**. Barcelona: Horsori/ICE, 1997.

RIVAS, M. A.; GODINO, J. D.; CASTRO, W. F. Desarrollo del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 26, n. 42, p. 559-588, abr. 2012. Disponible en: <<http://www.scielo.br/pdf/bolema/v26n42b/08.pdf>>. Acceso en: 10 abril. 2013.

SÁENZ, C. Teaching Probability for Conceptual Change. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 35, n. 3, p. 233-254, mar. 1998.

SALCEDO, A.; MOSQUERA, J. Sesgo de la disponibilidad en estudiantes universitarios. **Investigación y Postgrado**, Caracas, v. 23, n. 2, p. 411-432, sep. 2008.

SCHÖN, D. **La formación de profesionales reflexivos**: Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones. Barcelona: Paidós, 1992.

SERRANO, L.; BATANERO, C.; ORTÍZ, J. J.; CAÑIZARES, M. J. Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria. **Educación Matemática**, México, v. 10, n. 1, p. 7-25, abr. 1998.

SHAUGHNESSY, J. M. Research in probability and statistics. In: GROUWS, D.A. (Ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**, New York: Macmillan, 1992, p. 465-494.

SMITH, N. C. The case study: a useful research method for information management. **Journal of Information Technology**, Oxford, UK, v. 5, n. 3, p. 123-133, sep. 1990.

SHULMAN, L. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, Londres, v. 15, n. 2, p. 4-14, feb. 1986.

SPILLANE, J. P.; ZEULI, J. S. Reform and teaching: Exploring patterns of practice in the context of national and state mathematics reform. **Educational Evaluation and Policy Analysis**, London, v. 21, n. 1, p. 1-27, mar. 1999.

STOHL, H. Probability in teacher education and development. In: JONES, G. A. (Ed.). **Exploring probability in school**: Challenges for teaching and learning. New York: Springer, 2005. p. 345-366.

VENTURIELLO, V. **¿Cómo resuelven problemas de probabilidad los estudiantes universitarios?:** Heurísticas y sesgos que intervienen en el razonamiento probabilístico. 15 f (resumen). Tesis de Maestría en Educación – Escuela de Educación, Universidad de San Andrés, Buenos Aires, 2008.

Submetido em Abril de 2014.
Aprovado em Junho de 2014.