ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48r02

REID, D.; KNIPPING, C. **Proof in Mathematics Education**: Research, Learning and Teaching. Canadá: Sense Publishers, 2010. 251p.

Por Lucas Carato Mazzi*

O texto de Reid e Knipping tem a intenção de ajudar professores, pesquisadores e estudantes a superar as dificuldades em relação a pesquisas que envolvem provas e a ação de provar[1]. Para isso, eles apresentam várias investigações acerca do tema, a fim de apresentar distintas formas de abordagem do assunto em questão, deixando a cargo do leitor escolher a perspectiva que mais lhe agrade. O livro está dividido em treze capítulos, e estes, em quatro partes. Na primeira, os autores trazem sobre a história da demonstração, os variados usos dos termos *provas e provar* no cotidiano, e algumas perspectivas de pesquisas sobre o assunto, de acordo com o que chamam de *uma abordagem tridimensional*[2]. Na segunda parte, pesquisas sobre o ensino e aprendizagem da demonstração, atuais e passadas, são apresentadas e discutidas. Alguns estudos empíricos são examinados, o papel da demonstração é avaliado e tipos de raciocínio são apresentados. Na terceira parte, os autores abordam a estrutura da argumentação e padrões de raciocínio e, finalmente, na última parte, são discutidas algumas implicações no ensino, ao que seguem as considerações finais.

No Capítulo 1, Reid e Knipping trazem um pouco sobre a história das demonstrações. Eles apresentam o ponto de vista padrão (*the standard view*), segundo o qual os gregos seriam os primeiros a utilizarem as provas, com Thales (600 a.C.). Em seguida, outros pontos de vista são introduzidos, como a perspectiva chinesa e indiana. Nestes casos, a demonstração aparece, contudo, de forma distinta da proposta por Euclides. O “Princípio da Retransmissão da Falsidade”[3] de Lakatos é apresentado, o mito Euclidiano é discutido e algumas de suas falhas são mostradas.

As palavras *proof* e *proving* são comumente usadas. No Capítulo 2, os autores mostram algumas situações de uso e quais sentidos elas tomam. No cotidiano, por exemplo, elas podem ter a função de convencer alguém de algo ou serem usadas para testar se algo está ou não correto. No uso matemático, as provas dão aos teoremas uma validade universal e

* Mestrando em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, UNESP, Rio Claro. Endereço para correspondência: Av. 36A, n. 878, apto 10, CEP: 13506-650, Rio Claro, SP, Brasil. *E-mail:* lucascarato12@gmail.com.

[1] *Proof and proving*

[2] Na continuidade desta resenha essa expressão será retomada e explicada.

[3] Principle of Retransmission of Falsity, ver Lakatos (1961, 1976).

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48r02

atemporal. Já na Educação Matemática, as palavras podem ser usadas de maneiras diferentes, sendo elas vistas como um conceito, um objeto ou um processo.

O terceiro capítulo descreve algumas perspectivas de diferentes pesquisadores e oferecem exemplos de cada uma delas. Os autores criaram uma abordagem tridimensional para trabalhar com as diversas perspectivas, facilitando o entendimento e as diferenças entre elas. A primeira dimensão refere-se à filosofia da matemática assumida pelo pesquisador. Ela foca o status ontológico do objeto de estudo da matemática. Tal dimensão é dividida nas visões priorista, infalibilista, quase-empiricista e social-construtivista. A segunda dimensão trata do significado dado às palavras *provas* e *provar*. Os sentidos utilizados aqui são: as provas como *textos-provas*; como um processo de raciocínio ou como um discurso social. Já na terceira dimensão são utilizados termos como ponto de vista estreito e amplo[4] com a intenção de caracterizar demonstrações de acordo com os níveis de dedução, convencimento e formalismo. E, por fim, a epistemologia de Balacheff, uma diferente forma de se abordar as perspectivas, é apresentada.

Nos próximos seis capítulos, uma revisão da estrutura da pesquisa em ensino e aprendizagem da demonstração será feita. Os autores começam o capítulo 4 examinando alguns estudos empíricos sobre o ensino e a aprendizagem da prova. Algumas pesquisas sugerem que a maioria dos estudantes e professores considera suficiente, para a validação de uma proposição, um conjunto de exemplos (HEALY; HOYLES, 1998). Outra crença é a de que provas dedutivas não servem como verificação. Chazan (1993) explorou alguns dos possíveis motivos para tal fato. Dentre as razões, as mais comuns foram: esse tipo de prova é apenas um caso particular; pode existir algum contraexemplo na literatura; ou até mesmo a descrença em resultados usados no decorrer da demonstração. Reid e Knipping encerram essa seção reforçando a falta de estudos empíricos em países de língua não inglesa sobre demonstrações.

O papel da demonstração é discutido no Capítulo 5. Como mencionado por De Villiers (1990), tradicionalmente, a demonstração tem função quase que exclusiva de verificação de sentenças matemáticas. Muitos autores defendem que as demonstrações deveriam ser explicativas e não meramente demonstrativas. Uma função importante das provas seria a de exploração. De Villiers (1999) cita que há numerosos exemplos na história da matemática nos quais novos resultados foram descobertos ou inventados de uma maneira puramente dedutiva.

[4] *Narrow view and broad view.*

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48r02

A sistematização, a comunicação e a realização pessoal também são apresentadas como diferentes funções das provas. No final do Capítulo, os autores trazem algumas das funções que as demonstrações têm para os estudantes e também para o ensino.

O sexto Capítulo é voltado para quatro tipos de raciocínio que são tidos como relevantes para o ensino e a aprendizagem da demonstração: dedutivo, indutivo, abdutivo e por analogia. O raciocínio dedutivo aplica uma regra geral para concluir um resultado específico que nos leva a um novo conhecimento. Devido ao fato deste tipo de raciocínio ser ensinado para estabelecer certezas, ele é sempre associado à verificação. A indução se opõe à dedução no sentido que parte de casos particulares para obter resultados gerais; usa algo já conhecido para obter algo que é previamente conhecido. O raciocínio abdutivo tem relação com os dois tipos já discutidos de forma que propicia a formulação de novas hipóteses. E por último, o raciocínio por analogia é apresentado em sua possibilidade de fazer conjecturas a partir de semelhanças entre dois casos, um bem conhecido (chamado fonte) e outro menos conhecido (chamado alvo). Vários exemplos de cada tipo de raciocínio são apresentados no decorrer deste capítulo.

A classificação de argumentos e das provas é feita no sétimo capítulo. Os argumentos podem ser divididos nas seguintes categorias: empíricos, genéricos, simbólicos e formais. Os empíricos são aqueles nos quais exemplos são usados de forma não representacional, ou seja, eles sustentam somente casos particulares. Os genéricos utilizam exemplos que representam classes mais abrangentes, ou seja, são aqueles exemplos em que resultados gerais podem ser induzidos. Os argumentos simbólicos são aqueles nos quais incógnitas e números são trabalhados de forma conjunta a fim de se obter algum resultado. E, por fim, os formais são aqueles que apenas símbolos são usados a fim de generalizar algum teorema. Vale a ressalva de que há classes intermediárias entre uma categoria e outra e que os autores trazem exemplos para cada categoria.

A argumentação, que é sempre relacionada com a demonstração em pesquisas em Educação Matemática, é discutida no Capítulo 8. Uma tentativa de definir as palavras argumentação e argumento é feita. Autores como Durval e Perelman sustentam algumas definições para tais termos.

No Capítulo 9, Reid e Knipping trazem discussões acerca de experimentos com o ensino das demonstrações. Um importante nome citado é Fawcett, que trabalha as provas como uma maneira de cultivar os pensamentos reflexivos e críticos, apesar de que seus

ISSN 1980-4415
http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48r02

métodos são considerados, de certa forma, tradicionais. Não é possível descrever um método ou uma receita pronta, embora algumas sugestões sejam feitas.

Na terceira parte do texto são apresentados tipos de raciocínio e de argumentações, de modo que a comparação entre eles seja possível. No Capítulo 10 é estudado o processo da argumentação e sua estrutura. A partir da demonstração do Teorema de Pitágoras, os autores nos mostram os quatro tipos de estruturas de argumentação, descrevendo-os e comparando-os, são eles: a estrutura de fonte; a estrutura de reservatório; a estrutura espiral e a estrutura de aglomeração[5], cada qual com suas particularidades, apresentadas a partir de exemplos.

O Capítulo 11 descreve os cinco padrões de raciocínio que têm sido observados em trabalhos empíricos. Eles compartilham certo número de características, contudo, também possuem algumas diferenças. Os padrões são: o ciclo dedução-conjectura-teste; a análise de provas; a verificação científica; a renúncia; a exceção e restrição[6].

A última parte do livro traz as conclusões. No Capítulo 12 são apresentadas algumas implicações no ensino, argumentando que elas dependem de como os professores enxergam as demonstrações e de como eles trabalham com as mesmas, se é de forma rigorosa ou não, por exemplo. No Capítulo final, algumas direções para futuras pesquisas são dadas.

Alguns pontos poderiam ser aperfeiçoados nesse livro, como por exemplo, no segundo capítulo, os autores trazem os significados e diferenças dos termos *provas e provar*, contudo no capítulo inicial os termos já são usados, deixando a leitura um pouco confusa, necessitando que o leitor retome o primeiro capítulo para total compreensão. No final de cada capítulo é feito um resumo do que foi nele discutido. Essas sínteses poderiam ser mais elaboradas, trazendo somente o que realmente importa em cada seção.

Em apenas uma obra, Reid e Knipping conseguiram juntar diversas pesquisas sobre demonstrações, fazendo desse livro um importante referencial teórico para futuras pesquisas. Os variados exemplos fazem com que o leitor entenda as pesquisas e compreenda os diferentes termos utilizados pelos autores. Cada capítulo possui algumas perguntas que

[5] *The source-structure, the reservoir-structure, the spiral-structure* and *the gathering structure.*

[6] O *ciclo dedução-conjectura-teste* começa com uma dedução, que nos leva a uma conjectura, a qual é testada. Os resultados desse teste serão usados para novas deduções, tornando esse processo cíclico. Na *análise de provas* é incluído um passo em que se busca uma sentença incorreta na demonstração, levando a uma revisão da conclusão. A *verificação científica* é similar ao que Polya (1968) chama de "verificação de consequência" e são cinco seus elementos: observar um padrão, conjecturar que tal padrão ocorre com certa frequência, testar a conjectura, generalizá-la e utilizar a generalização como base para outros resultados. A *renúncia* é um tipo de raciocínio parecido com a verificação científica, contudo, é descoberto um contraexemplo para o padrão observado, levando-nos a uma negação da conjectura. E, por fim, a *exceção e a restrição* nos mostram que é possível considerarmos contraexemplos como exceções à conjectura ou que podemos restringir nossa conjectura de forma que o contraexemplo não mais seja válido.

instigam o leitor, mostrando que este assunto tem vários questionamentos em aberto e que mais reflexões são necessárias.

Referências

CHAZAN, D. High school geometry students' justifications for their views of empirical evidence and mathematical proof. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, Holanda, NL, v. 24, n. 4, p. 359-397, 1993.

DE VILLIERS, M. The role and function of proof in mathematics. **Pythagoras**, Durbanville, South Africa, v. 24, 1990, p. 17-24.

DE VILLIERS, M. **Rethinking proof with the Geometer's Sketchpad**. Emeryville, CA: Key Curriculum Press, 1990.

HEALY, L.; HOYLES, C. **Justifying and proving in school mathematics**. Summary of the results from a survey of the proof conceptions of students in the UK. Research Report. Mathematical Sciences, Institute of Education, University of London, 1998.

POLYA, G. **Mathematics and plausible reasoning**. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1968.

REID, D.; KNIPPING, C. **Proof in Mathematics Education**: Research, Learning and Teaching. Canada: Sense Publishers, 2010, 251p.